

Werte von Dedekindschen Zetafunktionen,
Dilogarithmuswerte und
Pflasterungen des hyperbolischen Raumes

Diplomarbeit
von
Herbert Gangl
1989

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	S. 1
Kapitel I: Einführung	S. 2
Kapitel II: Die algebraische Zerlegung im imaginärquadratischen Fall	S. 5
Kurzfassung	S.13
Kapitel III: Die geometrische Zerlegung und ideale Triangulierungen des hyperbolischen Raumes	S.15
Kurzfassung und Details	S.23
Beispiel	S.26
Kapitel IV: Vier Lemmas	S.30
Anhang 1 : Eine Identität	S.34
Anhang 2 : Zweidimensionale Eckfiguren von Pflasterungen	S.37
Anhang 3 : Die algebraische Zerlegung für einen reinkubischen Körper	S.44
Anhang 4 : Vier Tabellen	S.46
Literaturverzeichnis	S.53

Danksagung

Zu Anfang gebührt—in erwartungsgemäßer Reihenfolge—mein herzlicher Dank Herrn Prof. Zagier für das sehr interessante Thema; es begann so unscheinbar, wurde von mir Banausen ziemlich verkannt, doch je mehr ich mich damit beschäftigte, desto mehr griff seine Faszination auf mich über (trotz des Gefühls, mich etwas auf Glatteis zu bewegen), was zweifellos in unüberschätzbarem Maße auf die Begeisterung und Ideenvielfalt bei der Betreuung der Arbeit zurückzuführen ist (Grazie!).

Herrn Prof. Neumann bin ich für den entscheidenden Literaturhinweis und gelegentliche Unterhaltungen sehr zu Dank verpflichtet.

Weiterhin danke ich J. Browkin für die prompte Zusendung der angefragten Artikel, Hartmut Maennel für wichtige Literaturtips, Einführung in effiziente L -Reihen-Berechnung und Bekehrungsversuche zu MODULA 2, Christian Kaiser für Nachhilfestunden während langer Autofahrten, meinen Eltern für die finanzielle Unterstützung mit einem Creative Advanced Research Year (CARY) Grant, T.R. Augendreher für die Schar der Hundert Aerger, Zar Gideon für seine Pizzagier und last and least dem bald gromovierenden Monster Matthias.

All dies hat zur Fertigstellung der Arbeit beigetragen—mögen sie zukünftige Generationen auch noch gerne lesen!

Werte von Dedekindschen Zetafunktionen,
Dilogarithmuswerte und
Pflasterungen des hyperbolischen Raumes

Kapitel I
Einführung

Der Ausgangspunkt unserer (vorwiegend numerischen) Untersuchungen ist ein Satz von Zagier ([Z1], Th.3):

Satz (Zagier): Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ein imaginärquadratischer Zahlkörper mit Diskriminante $-d$. Dann gilt:

$$\zeta_K(2) = \frac{\pi^2}{3d\sqrt{d}} \sum_{\text{endl}} n_\nu D(x_\nu) \quad \text{mit } n_\nu \in \mathbb{Z}, x_\nu \in K.$$

Hier bezeichnet D die von Bloch und Wigner eingeführte "modifizierte" Dilogarithmusfunktion (im folgenden meist einfach Dilogarithmus genannt):

$$D(z) = \mathfrak{F}(\text{Li}_2(z)) + \log |z| \arg(1-z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^\times - [1, \infty),$$

\mathfrak{F} den Imaginärteil und Li_2 den "gewöhnlichen" Dilogarithmus:

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Die Funktion Li_2 läßt sich holomorph auf $\mathbb{C} - (1, \infty)$, die Funktion D reell-analytisch auf $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ fortsetzen.

ζ_K ist die Dedekindsche Zetafunktion zu K

$$\zeta_K(s) = \sum_{\substack{\mathcal{A} \text{ ganzes} \\ \text{Ideal in } \mathcal{O}_d}} N(\mathcal{A})^{-s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

\mathcal{O}_d der Ring der ganzen Zahlen in K .

Zagier erhält diesen Satz aus einer "geometrischen" Zerlegung von $\zeta_K(2)$:

Seien wieder $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ und \mathcal{O}_d wie oben.

Nach Humbert gilt für das Volumen der hyperbolischen Mannigfaltigkeit $\mathbb{H}^3/\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$, wo \mathbb{H}^3 den oberen Halbraum als hyperbolische Mannigfaltigkeit bedeutet:

$$\text{Vol}(\mathbb{H}^3/\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)) = \frac{d\sqrt{d}}{4\pi^2} \zeta_K(2).$$

(vgl. z.B. Milnor in [Th1], Ch.7). Zerlegt man—nach eventuellem Übergang zu einer torsionsfreien Untergruppe von endlichem Index in $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ —diese Mannigfaltigkeit in sogenannte "ideale Tetraeder" (alle 4 Eckpunkte des Tetraeders liegen im "Unendlichen", im Rand von \mathbb{H}^3), so erhält man die geometrische Zerlegung von $\zeta_K(2)$, da das Volumen eines solchen idealen Tetraeders durch einen Wert der (Bloch-Wignerschen) Dilogarithmusfunktion ausgedrückt werden kann, und zwar an einem Argument, welches aus den Eckpunkten gewonnen wird.

Die bisherigen Behauptungen gelten (mit passenden Modifikationen) für beliebige Zahlkörper mit mindestens einer komplexen Stelle. Im imaginärquadratischen Fall kann man die Eckpunkte in $K \cup \{\infty\}$ selbst annehmen (dabei betrachte man $K \cup \{\infty\}$ eingebettet in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, der hyperbolischen Sphäre im Unendlichen) und man bekommt die Aussage des Satzes.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß es auch eine kanonische Zerlegung von $\zeta_K(2)$ in Dilogarithmuswerte mit Argumenten aus $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/d})$ gibt (siehe wieder Milnor [Th1], Ch.7):

$$\zeta_K(2) = \frac{\pi^2}{6\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{d-1} \binom{-d}{n} D(e^{2\pi i n/d}).$$

Uns interessieren in dieser Abhandlung nur Zerlegungen mit Argumenten in K . Diese sind jedoch nicht kanonisch.

Wir werden geometrische Zerlegungen von $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ für einige d mit Hilfe von Pflasterungen des \mathbb{H}^3 erhalten; letztere liefern uns außerdem jeweils (im Prinzip) einen Fundamentalbereich für die Operation von $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ – wir führen dies anhand eines Beispiels vor (Kapitel III).

In [Z1] hat Zagier außerdem angegeben, wie man geometrische Zerlegungen von $\zeta_K(2)$ für beliebige Zahlkörper K mit mindestens einer komplexen Stelle erhält. Allerdings kann man i.allg. nicht mit idealen Tetraedern, deren Eckpunkte in K liegen, triangulieren. Aufgrund dessen gelangte Zagier in diesem Fall zu einer schwächeren Aussage als im obigen Satz. Insbesondere zeigte er:

Satz: (Zagier): Sei K algebraischer Zahlkörper mit $r_2 = 1$ und Diskriminante D_K . Dann gilt:

$$\zeta_K(2) = \frac{\pi^{2r_1+2}}{\sqrt{|D_K|}} \sum_{\text{endl}} \alpha_\nu D(x_\nu) \quad , \quad \alpha_\nu \in \mathbb{Q} \quad , \quad x_\nu \in \mathbb{C} \quad ,$$

wobei die x_ν algebraisch vom Grad ≤ 4 über K gewählt werden können—wir betrachten K als Teilkörper von \mathbb{C} vermöge einer der beiden nichtreellen Einbettungen.

Eine schärfere Aussage gewinnt man mit algebraischer K -Theorie: Man kann die x_ν aus K wählen und eine ganze Klasse von Linearkombinationen $\sum \alpha_\nu D(x_\nu)$ mit der "Zerlegungseigenschaft" auszeichnen (zur Definition von $\wedge^2(K^\times)$ vgl. Kapitel II):

Satz: Sei K algebraischer Zahlkörper mit $r_2 = 1$ und Diskriminante D_K . Dann gilt:

$$(1) \quad \left\{ \sum n_i D(z_i) \mid n_i \in \mathbb{Z}, z_i \in K^\times - \{1\}, \sum n_i (z_i \wedge (1 - z_i)) = 0 \text{ in } \wedge^2(K^\times) \right\} = \mathbb{Z} \cdot R_D(K) \subset \mathbb{R}$$

für eine gewisse Zahl $R_D(K) > 0$ und

$$(2) \quad \zeta_K(2) = q \cdot \frac{\pi^{2r_1+2}}{\sqrt{|D_K|}} R_D(K)$$

für ein gewisses $q \in \mathbb{Q}$.

Nach Borel [Bo2] ist der Rang der K -Gruppe $K_3(K)$ gleich r_2 (hier =1) und $K_3(K)$ besitzt eine kanonische Abbildung ("Regulatorabbildung") nach $V_K \otimes \mathbb{R}$ für einen gewissen \mathbb{Q} -Vektorraum V_K vom Rang r_2 . Die Determinante—der Regulator $R_1(K)$ —dieser Abbildung ist bezüglich \mathbb{Q} -Basen in $K_3(K)$ und V_K ein rationales Vielfaches von $\pi^{-2[K:\mathbb{Q}]} \sqrt{|D_K|} \zeta_K(2)$.

Bloch ([Bl1] und [Bl2]) beschreibt nun $K_3(K)$ durch gewisse Linearkombinationen $\sum n_i [x_i]$ (vgl. die Bloch-Gruppe $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{Q}})$ in Kapitel II) und zeigt, daß der Dilogarithmus $D(x)$ —bis auf einen Faktor π^2 —den Regulator darstellt. Allerdings muß er die Argumente x_i in $\overline{\mathbb{Q}}$ wählen.

Schließlich erreichen Suslin [S] und Levine [Lev] unabhängig voneinander mit Hilfe eines Galois-Abstiegs, daß man die Argumente schon in K wählen kann, und man erhält so die Aussage des Satzes (falls $r_2 > 1$, so ist die Regulatorabbildung—wiederum bis auf einen Faktor π^2 —durch $[x] \mapsto (D(x^{(1)}), \dots, D(x^{(r_2)})) \subset \mathbb{R}^{r_2}$ gegeben, wobei $x^{(i)}$ die Bilder von x unter den verschiedenen komplexen Einbettungen von K in \mathbb{C} bedeuten). Insbesondere sehen wir, daß $R_D(K)$ ein rationales Vielfaches von $\pi^2 R_1(K)$ ist.

Die Dedekindsche Zetafunktion eines Zahlkörpers ist mit seiner algebraischen K -Theorie durch die Lichtenbaum-Vermutung [Li] verknüpft (welche im total-reellen Fall von Mazur und Wiles bis auf den 2-Anteil bewiesen wurde [M-W]).

Lichtenbaum vermutet, daß das Verhältnis zwischen $\zeta_K(2)$ und dem Regulator $R_1(K)$ bis auf triviale Faktoren gleich $\#K_2(\mathcal{O}_K)/\#K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}}$ ist. Da die Ergebnisse von Suslin und Levine nur die Beschreibung von

$K_3(K) \otimes \mathbb{Q}$ liefern, kennen wir das Verhältnis von $R_D(K)$ und $\pi^2 R_1(K)$ nicht genau, es liegt aber nahe, zu vermuten, daß die Zahl q in (2) "im wesentlichen" gleich $\#K_2(\mathcal{O}_K)/\#K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}}$ ist, insbesondere für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante:

$$\frac{|d|^{\frac{3}{2}}}{\pi^2} \zeta_K(2) = q' \frac{\#K_2(\mathcal{O}_K)}{\#K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}}} R_D(K),$$

wobei der Faktor q' vielleicht von K unabhängig ist. Unsere numerischen Ergebnisse suggerieren $q' = 16$ in den 6 Fällen, in denen $K_2(\mathcal{O}_K)$ von Tate [T] ausgerechnet worden ist. Es gilt $K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}} = 24$ für K imaginärquadratisch, wir schreiben also

$$\frac{3|d|^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \zeta_K(2) = T \cdot R_D(K), \quad T \in \mathbb{Q}_{>0},$$

und die Vermutung besagt nun, daß $T = T(K)$ ganzzahlig und sogar gleich der Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_K)$ ist. (Eine im wesentlichen gleiche Vermutung wurde von Grayson [G] angegeben.)

Aus Zagiers Satz für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ folgt immerhin schon die Ganzzahligkeit von $2T$, da "die" Linearkombination, die man aus der geometrischen Zerlegung erhält, auch die nötige algebraische Bedingung erfüllt (vgl. Kapitel II).

Ausgehend von dieser Vermutung erhält man unter der Voraussetzung, daß das von uns in Kapitel II experimentell bestimmte $(R_D(K))_{\text{exp}}$ gleich $R_D(K)$ ist, erstaunlicherweise eine Möglichkeit, eine Vermutung über die "Größe" von $K_2(\mathcal{O}_d)$ auszusprechen.

Diese vermeintliche Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_d)$ können wir dann mit Hilfe der Theorie überprüfen, welche ihren 2-Anteil und 3-Anteil nach unten abschätzt. Wir benutzen dazu die Arbeiten [B1] von Browkin, um den 3-Anteil nach unten abzuschätzen, und die Arbeit [B-S] von Browkin und Schinzel, in der der 2-Rang der abelschen Gruppe $K_2(\mathcal{O}_d)$ (also die Anzahl der zyklischen Summanden in der 2-Sylow-Gruppe von $K_2(\mathcal{O}_d)$) für quadratische Zahlkörper bestimmt und der 2-Anteil genauer untersucht wird.

Da das Ergebnis unserer Gratwanderung über Vermutung und Hoffnung so bemerkenswert gut mit der Theorie zusammenpaßt, werden wir den Glauben nicht los, daß wir mit der Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_d)$ richtig liegen; wir gehen sogar so weit, daß wir eine vermutliche (wenn auch nicht sehr weitreichende) Aussage über p -Anteile von $K_2(\mathcal{O}_d)$ für $p = 3$ und $p = 5$ wagen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, jeweils ein Verfahren für die Bestimmung der geometrischen und einer "optimalen" algebraischen Zerlegung, eine Tabelle mit vermutlichen Werten von $K_2(\mathcal{O}_d)$ sowie einige Pflasterungen des \mathbb{H}^3 durch zugehörige Eckfiguren anzugeben, wobei wir noch vorführen, wie man aus diesen Pflasterungen einen Fundamentaltbereich erstellen kann.

Dieselbe (algebraische) Prozedur, die wir im imaginärquadratischen Fall anwenden, können wir auch für beliebige Zahlkörper (d.h. also: von nicht allzu großem Grad über \mathbb{Q}) durchführen, wenn wir seine Primidealzerlegung für die kleinsten Primzahlen kennen. Wir haben das—zwecks Demonstration—für einige Fälle des (vermeintlich) nächstschwierigeren Körpers $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta^3 = M \in \mathbb{Z}$ durchgeorgelt, und wir können auch hier raten, wie groß $K_2(\mathcal{O}_K)$ ist.

Als eine Art Nebenprodukt unserer Beschäftigung mit dem Dilogarithmus und insbesondere mit der Fünf-Term-Relation beweisen wir schließlich eine von Lewin [Le2] vermutete Identität für eine Linearkombination von speziellen Dilogarithmuswerten (eine sogenannte—ausgeartete—"Ladder").

Die Programme wurden auf einem ATARI ST in (Omikron-)Basic geschrieben.

Kapitel II

Die algebraische Zerlegung im imaginärquadratischen Fall

Ein-Satz

Definition: Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist $\wedge^2(A)$ die Menge der \mathbb{Z} -Linearkombinationen von Symbolen $x \wedge y$, $x, y \in A$ mit den Relationen

$$(x_1 + x_2) \wedge y = x_1 \wedge y + x_2 \wedge y, \quad x \wedge (y_1 + y_2) = x \wedge y_1 + x \wedge y_2 \quad \text{und} \quad x \wedge x = 0.$$

[Es folgt $x \wedge y = -y \wedge x$.]

Definition: Seien K algebraischer Zahlkörper, \mathcal{O}_K sein Ring der ganzen Zahlen.

$$\zeta_K(s) = \sum_{\substack{A \text{ ganzes} \\ \text{Ideal in } \mathcal{O}_K}} N(A)^{-s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

heißt die *Dedekindsche Zetafunktion* zum Körper K .

Definition: Es sei

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}, \quad \text{für } |z| < 1,$$

der "gewöhnliche" Dilogarithmus, mit der analytischen Fortsetzung

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \log(1-u) \frac{du}{u} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} - (1, \infty).$$

Der *Bloch-Wigner-Dilogarithmus* (im folgenden meist einfach nur mit *Dilogarithmus* bezeichnet) wird für $z \in \mathbb{C}^\times - [1, \infty)$ durch

$$D(z) = \Im(\text{Li}_2(z)) + \log|z| \arg(1-z),$$

und für $z \in (1, \infty)$ durch stetige Fortsetzung (nämlich als 0) definiert; dabei ist $\arg(1-z)$ in $(-\pi, \pi)$ zu wählen.

Eigenschaften des Dilogarithmus (vgl. [N-Z], §5 und [Z2]):

D ist reell-analytisch auf $\mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Wir berechnen D mit Hilfe der *Lobatschewski-Funktion* (vgl. z.B. Milnor [Th1])

$$\text{Jl}(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\Theta}{n^2},$$

deren Berechnung Zagier ausführlich in ([Z1], App. to §3) beschreibt, und zwar gilt folgende Beziehung zwischen den beiden:

$$D(z) = \text{Jl}(\arg(z)) + \text{Jl}\left(\arg\left(\frac{z-1}{z}\right)\right) + \text{Jl}\left(\arg\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} - \{0, 1\}.$$

D besitzt einige Symmetrieeigenschaften (\bar{z} bezeichnet die zu z komplex konjugierte Zahl):

$$D(z) = D\left(1 - \frac{1}{z}\right) = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = -D\left(\frac{1}{z}\right) = -D(1-z) = -D(\bar{z}) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} - \{0, 1\},$$

und eine Funktionalgleichung:

$$D(x) + D(y) + D\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + D(1-xy) + D\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0 \quad \text{für } x, y \in \mathbb{C} - \{0, 1\}, \quad xy \neq 1,$$

die sogenannte Fünf-Term-Relation, die wir im folgenden in der Bloch-Gruppe nachbilden werden, um z.B. den Dilogarithmus zu einer linearen Abbildung auf dieser Gruppe zu machen.

Bezeichnung : Sei I Indexmenge. Wir bezeichnen mit $\mathbb{Z}^{(I)}$ die freie abelsche Gruppe $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ auf I . Ein typisches Element aus $\mathbb{Z}^{(I)}$ wird als $\sum_{i \in I} n_i [i]$ ($n_i \in \mathbb{Z}$, Summe endlich) geschrieben.

Definition: Sei K algebraischer Zahlkörper oder $K \in \{\overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}\}$. Dann heißt

$$\mathcal{B}(K) = \frac{\{\sum n_i [z_i] \in \mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})} \mid \sum n_i (z_i \wedge (1-z_i)) = 0 \text{ in } \wedge^2(K^\times)\}}{\langle [x] + [y] + [\frac{1-x}{1-xy}] + [1-xy] + [\frac{1-y}{1-xy}], [x] + [1-x], 2[x] + 2[\frac{1}{x}] \mid x, y \in K - \{0,1\}, xy \neq 1 \rangle}$$

die Bloch-Gruppe (oder Bloch-Suslin-Gruppe) zu K .

Bemerkung : Man prüft unmittelbar nach, daß für die Fünf-Term-Relationen in $\mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$ die Bedingung $\sum_{i=1}^5 z_i \wedge (1-z_i) = 0$ erfüllt ist, die Definition also Sinn macht.

Sei K wieder algebraischer Zahlkörper, r_2 die Anzahl seiner komplexen Einbettungen, für jede davon gibt es eine Injektion

$$\iota_k : \mathcal{B}(K) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}), \quad k = 1, \dots, r_2.$$

Wir setzen den Dilogarithmus linear von $\mathbb{C} - \{0,1\}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ fort:

$$D : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \sum n_i [z_i] \longmapsto \sum n_i D(z_i)$$

(was wegen der Fünf-Term-Relation für D gerechtfertigt ist) und erhalten zusammengesetzt eine Abbildung

$$\mathcal{B}(K) \xrightarrow{\Pi \iota_k} \mathcal{B}(\mathbb{C})^{r_2} \xrightarrow{(D, \dots, D)} \mathbb{R}^{r_2},$$

die wir (unter bequemer Vergewaltigung der Notation) ebenfalls D nennen wollen.

Jetzt bringen wir endlich etwas Leben in unsere Begriffe mit dem in der Einleitung erwähnten

Satz: Sei K algebraischer Zahlkörper mit Diskriminante D_K , $[K : \mathbb{Q}] = n = r_1 + 2r_2$, r_1 die Anzahl der reellen, r_2 die Anzahl der komplexen Stellen. Dann gilt:

1)

$$\Lambda = D(\mathcal{B}(K)) \text{ ist ein Gitter in } \mathbb{R}^{r_2},$$

2)

$$\text{Vol}(\mathbb{R}^{r_2}/\Lambda) = q \frac{\zeta_k(2)}{\pi^{2(r_1+r_2)} \sqrt{|D_K|}} \text{ für ein } q \in \mathbb{Q}.$$

Wir stützen den Satz auf unsere Bedürfnisse zurecht:

Spezialfall : Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante von K . Dann gilt für ein gewisses $T \in \mathbb{Q}^\times$, $T > 0$:

$$\Lambda := \left\{ \sum n_i D(z_i) \mid n_i \in \mathbb{Z}, z_i \in K - \{0,1\}, \sum n_i (z_i \wedge (1-z_i)) = 0 \right\} = \mathbb{Z} \cdot \frac{3\zeta_K(2)d\sqrt{d}}{2T\pi^2}.$$

Es ist unser Anliegen, diese Zahl T , also das Inverse des Volumens von Λ (bis auf einen bekannten Faktor) zu bestimmen. Der Faktor $\frac{3}{2}$ soll dafür sorgen, daß T (vermutlich) ganzzahlig wird, und zwar nach der Lichtenbaum-Vermutung gleich der Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_d)$.

Aufsuchen von Kombinationen

Um diesem Wunsche nachzukommen, stellen wir uns zunächst die Aufgabe, eine Kombination von Werten $x_i \in K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ zu finden, so daß

$$\sum n_i(x_i \wedge (1 - x_i)) = 0,$$

aber

$$\sum n_i D(x_i) \neq 0.$$

Da wir dabei nicht blindwütig etwa alle möglichen x_i mit kleiner Norm und Linearkombinationen davon mit kleinen Koeffizienten durchprobieren wollen, betrachten wir K^\times etwas genauer.

Allgemein gilt für einen algebraischen Zahlkörper K

$$K^\times \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\{\wp | \wp \text{ Primideal in } \mathcal{O}_K\}) \oplus \mathbb{Q}^{r_1+r_2-1}.$$

Wähle dazu für jedes Primideal \wp_i in \mathcal{O}_K ein Element $\pi_i \in K$, so daß $\wp_i^h = (\pi_i)$ das von π_i erzeugte Hauptideal ist (h die Klassenzahl von K), wähle außerdem ein System von Fundamenteinheiten $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r_1+r_2-1}\}$ und definiere für $x \in K$, falls $x^h = \epsilon_0 \prod \pi_i^{\nu_i} \cdot \prod \epsilon_\mu^{n_\mu}$ ist mit $\epsilon_0^j = 1$ für ein $j \in \mathbb{Z}$:

$$x \rightarrow \left(\dots, \frac{\nu_i}{h}, \dots \right) \oplus \left(\dots, \frac{n_\mu}{h}, \dots \right).$$

Sei im folgenden stets $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante; wir brauchen uns um Fundamenteinheiten dann nicht zu kümmern.

Um das Problem unserem Computer zugänglich zu machen, reduzieren wir es auf ein endliches, indem wir zum einen nur einen Abschnitt dieses Vektorraums untersuchen, zum andern diesem Abschnitt später noch weitere Restriktionen auferlegen. Wir folgen dabei einer Idee von Zagier.

Wir wählen eine Reihe Primzahlen nach gewissen Kriterien aus (s.u., Mathematische Kurzfassung des Verfahrens)

$$P = \{p_1, \dots, p_k | p_i \text{ prim, gewisse Bedingungen} \dots\}$$

und nehmen die zugehörigen Primideale oberhalb von P her

$$\mathcal{P} = \{\wp | \wp | p_i \text{ für ein } p_i \in P, \wp \text{ Primideal in } \mathcal{O}_K\} = \{\wp_1, \dots, \wp_r\}.$$

Wir untersuchen den Abschnitt $\mathbb{Q}^{(\mathcal{P})}$ daraufhin, ob es "genügend viele" $x \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$(1) \quad (\text{ord}_\wp(x) \neq 0 \vee \text{ord}_\wp(1-x) \neq 0) \implies \wp \in \mathcal{P},$$

d.h. sowohl x als auch $1-x$ sind \mathcal{P} -Einheiten. Dabei soll "genügend viele" zunächst einmal heißen, daß mindestens $\binom{r}{2} = \dim_{\mathbb{Q}}(\wedge^2(\mathbb{Q}^{(\mathcal{P})}))$ solcher Elemente gesucht werden, oder noch besser, wir suchen so viele Elemente x mit der Eigenschaft (1), daß $\wedge^2(\mathbb{Q}^{(\mathcal{P})})$ von den Elementen $(x) \wedge (1-x)$ aufgespannt wird. Drücken wir dann die übrigen $(y) \wedge (1-y)$ (die also nicht zur Basis beitragen) durch diese neue Basis aus, so erhalten wir für jedes einzelne dieser y eine gewünschte Linearkombination, und damit ein Element in $\mathcal{B}(K)$. Allerdings kann es jetzt sein, daß wir am Ziel unseres Vorhabens immer noch nicht angelangt sind, wenn nämlich alle entsprechenden Linearkombinationen von Dilogarithmuswerten null ergeben, was, "wie die Praxis lehrt", durchaus der Fall sein kann, wenn wir nur ca. $5 \binom{r}{2}$ Elemente gefunden haben. Folglich erhöhen wir unseren Einsatz: die Anzahl der Primzahlen in $P \subset \mathbb{N}$. Da die Menge der algebraischen Zahlen $x \in K$ mit (1) bei einer solchen Erhöhung sprunghaft anwächst, kommen wir mit relativ wenigen Primzahlen aus ($\#(P) \leq 10$), und zwar nehmen wir vorwiegend solche p mit $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0, 1$, um auf die oben skizzierte Weise ein $\xi_0 \in \mathcal{B}(K)$ mit einem möglichst kleinen positiven $D(\xi_0)$ zu finden.

Was der Computer dabei rechnet

Seien wieder $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ seine Diskriminante, m der quadratfreie Teil von d .

“Er” sucht sich die ersten k Primzahlen p_i , die die gewissen Bedingungen erfüllen, $P = \{p_1, \dots, p_k\}$. Dann durchforscht er zu jedem kleinen Wert von b (wir beschränken die Suche auf $b = 1, \dots, 20$) alle Zahlen von 0 bis 1000 nach solchen a , für die $a^2 + b^2 m$ nur durch die obigen Primzahlen p_i teilbar ist. Um aus diesen Paaren (a_i, b) Zahlen $x \in K$ mit (1) zu finden, betrachten wir zu festem b die Summen und Differenzen der zu diesem b gefundenen a_i . Sobald eine solche Summe (Differenz) $a_i \pm a_j$ nur Primteiler aus P enthält, haben wir

$$x = \frac{a_i + b\sqrt{-m}}{a_i \pm a_j} \implies 1 - x = \frac{\pm a_j - b\sqrt{-m}}{a_i \pm a_j}, \text{ also (1) für } x.$$

Es folgt sofort (1) für die Zahlen $x, 1 - x, \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, 1 - \frac{1}{1-x}$ und für deren komplex Konjugierte. Allerdings sind diese zu x verwandten Elemente insofern nur bedingt interessant, als die ersten sechs sowie die konjugierten sechs—bis aufs Vorzeichen—jeweils nur einen Koordinatenvektor liefern.

Der nächste Schritt besteht nun darin, die von den x_i in K erzeugten Hauptideale (x_i) in einer geeigneten Basis darzustellen. Es bietet sich die kanonische Basis \mathcal{P} an, die wir auch stets verwenden. Mit etwas größerem Aufwand wäre die Darstellung in einer Hauptidealbasis oder—im wesentlichen äquivalent—die Darstellung von x_i in einer \mathbb{Z} -Basis von K^\times verbunden. Man könnte damit (für $d > 4$) feststellen, ob unsere gefundenen Linearkombinationen $\xi = \sum n_i(x_i \wedge (1 - x_i))$ wirklich null ergeben, da uns bei Verwendung einer Idealbasis die Einheiten (und damit die Torsion) zwangsläufig durch die Lappen gehen, wir diese $\xi \in \mathcal{B}(K)$ daher nur mit dem Prädikat 2-Torsion (soll heißen $2\xi = 0$) versehen können.

Wir betrachten also im Grunde die “doppelte” Bloch-Gruppe

$$\widetilde{\mathcal{B}}(K) = \frac{\{\sum n_i[z_i] \in \mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})} \mid 2 \sum n_i(z_i \wedge (1 - z_i)) = 0 \text{ in } \wedge^2(K^\times)\}}{\langle [x] + [y] + [\frac{1-x}{1-xy}] + [1-xy] + [\frac{1-y}{1-xy}], [x] + [1-x], 2[x] + 2[\frac{1}{x}] \mid x, y \in K - \{0,1\}, xy \neq 1 \rangle}$$

Nach dem Korollar zu Lemma 1 (Kapitel IV) gilt aber für $d \neq 4$

$$D(\mathcal{B}(K)) = D(\widetilde{\mathcal{B}}(K)),$$

wir können aus einem Element $\tilde{\xi} \in \widetilde{\mathcal{B}}(K)$ ein Element $\xi \in \mathcal{B}(K)$ konstruieren, so daß $D(\xi) = D(\tilde{\xi})$. Das bedeutet, daß wir uns getrost auf $\widetilde{\mathcal{B}}(K)$ und die Idealbasis \mathcal{P} konzentrieren können, und daß wir mit der Angabe eines Elementes $\tilde{\xi}_0 \in \widetilde{\mathcal{B}}(K)$ mit minimalem positivem $D(\tilde{\xi}_0)$ unser Soll erfüllt haben.

Die Elemente $(x) \wedge (1 - x)$ von $\wedge^2(\mathcal{Q}^{(P)})$ werden in der Basis $\{\varphi_i \wedge \varphi_j \mid i < j, \varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{P}\}$ dargestellt, bilden also die Erzeugenden eines Gitters in diesem Vektorraum (da die Koordinatenvektoren rational sind und die Anzahl der Vektoren endlich ist), welches eventuell unvollständig ist, d.h. eine kleinere Dimension als $\wedge^2(\mathcal{Q}^{(P)})$ hat. Spannen die (darstellenden Vektoren von) $(x) \wedge (1 - x)$ wirklich ein vollständiges Gitter auf, so lassen wir unseren kleinen Rechenknecht eine Basis für den zugehörigen \mathcal{Q} -Vektorraum finden.

Auffinden einer (“Fast”-) Gitterbasis

Der für uns—und ihn—am meisten Zeit raubende Teil besteht jetzt darin, eine Gitterbasis aus dieser \mathcal{Q} -Basis und den übrigen Erzeugenden zu konstruieren, um so ein Erzeugendes unseres 1-dimensionalen Gitters Λ herauszufiltern.

Unser Algorithmus funktioniert theoretisch wunderbar, praktisch auch sehr oft — gelegentlich finden wir aber mit unserem Programm nur eine “Fast”-Basis (s.u.):

Die erzeugenden Vektoren werden nach ihrer Länge (euklidische Norm) sortiert, dann wird wie erwähnt eine Vektorraum-Basis ausgesondert. Diese gilt es sukzessive einer Gitterbasis anzunähern:

Wir schreiben die nicht in dieser Basis vorkommenden Vektoren unserer Liste in den Koordinaten der neuen Basis (wir benötigen hier also eine zeitaufwendige und Rechengenauigkeit mindernde Matrizeninversion) und verbessern dahingehend, daß wir den ersten Vektor in den neuen Koordinaten mit dem minimalen auftretenden gebrochenen Anteil (> 0)—minimal unter allen Koordinaten aller Vektoren—mit demjenigen Basisvektor vertauschen, bei dem diese Koordinate steht.

Wir reduzieren diesen neuen Basisvektor um ganzzahlige Vielfache der übrigen Basisvektoren, so daß seine neuen Koordinaten zwischen 0 und 1 zu liegen kommen. (Theoretisch würde es genügen, die entscheidende Koordinate zu reduzieren, dies erweist sich aber in der Praxis als nicht so effektiv.)

Dadurch wird das Volumen des von den Basisvektoren aufgespannten Gitters verringert, wir sind also nach endlich vielen Schritten fertig (die möglichen Gittervolumina liegen diskret in \mathbb{R}_+).

Probleme in der Praxis*

Es kommt leider oft vor, daß die Koordinaten der neuen Basisvektoren bei jedem Verbesserungsschritt sprunghaft anwachsen, nach zwei Schritten können sie durchaus bereits 5-6-stellig werden. Bei großen Gitterdimensionen (ca. > 80) dürfen wir kaum eine weitere Verbesserung wagen, zumal unsere Rechengenauigkeit auf 17 Stellen begrenzt ist, die Dilogarithmuswerte ja genauso geändert werden wie die Basisvektoren (die geänderten Werte also unter Umständen um einige 10-er-Potenzen größer sind als die anderen) und außerdem noch—gegen Ende—rationale Zahlen erkannt werden sollen, welche u.U. bereits ca. 10 Vorkommastellen besitzen...

In einem solchen Fall begnügen wir uns—falls nötig—mit einer "Fast"-Basis, d.h. die Nenner der Koordinaten der übrigen Vektoren in dieser "Fast"-Basis übersteigen eine gewisse Schranke C nicht. In unseren Fällen sind wir (d.h. für $m < 2000$) meist bei $C \leq 2$ angelangt. Wir verglichen für bestimmte d die Ergebnisse, die wir mit Hilfe einer Fast-Basis fanden, mit denjenigen, die wir mittels einer Basis bekamen. Dabei stellte sich heraus, daß sich äußerst selten ein Unterschied ergibt. Aufgrund dieser Untersuchung hielten wir es für gerechtfertigt, uns notfalls auf Fast-Basen zu beschränken.

Zwei der Körper erwiesen sich als besonders vertrackt: $m = 163$ und $m = 1978$. Die Gitter, die wir mit Hilfe unseres Algorithmus erhielten, sind sehr unschön und schwer zugänglich. Nach längerem Probieren fand sich jedoch eine Menge von Primzahlen, die immerhin einige brauchbare Linearkombinationen lieferte.

Nach Fertigstellung der Arbeit bekamen wir eine Arbeit von Pohst [P] über die Bestimmung einer Gitterbasis zu Gesicht (ein "modifizierter LLL-Algorithmus"), mit deren Hilfe es möglich sein sollte, die angeführten Probleme zu vermeiden.

Der Wert T

Haben wir endlich eine (Fast-)Gitterbasis $\{b_i\}_i$ gefunden, so können wir die übrigen Vektoren als Linearkombinationen der Basisvektoren mit (fast) ganzzahligen Koeffizienten schreiben—am besten in der (von eventuellen Nennern befreiten) Form $\sum n_i b_i = 0$, $n_i \in \mathbb{Z}$, b_i Gittervektor zu $x_i \in K$. Die entsprechenden Linearkombinationen der Dilogarithmuswerte, nämlich $\sum n_i D(x_i)$, sind nach dem Satz von Suslin lauter rationale Vielfache von $\zeta_K(2) \cdot \frac{3d\sqrt{d}}{2\pi^2}$, weil die entsprechenden $\sum n_i [x_i]$ nach Konstruktion in $\widetilde{\mathcal{B}(K)}$ liegen. Der "ggT" der Zahlen $\sum n_i D(x_i)$ ist hoffentlich $D_{\min}(\widetilde{\mathcal{B}(K)})$, der minimale positive Wert in $D(\widetilde{\mathcal{B}(K)}) = D(\mathcal{B}(K))$ (Korollar zu Lemma 1, Kap.IV).

Diese rationalen Vielfachen gilt es nun zu erkennen und deren ggT zu bestimmen, was uns bereits (numerisch) das gewünschte T (vgl. Satz) bzw. ein T_0 mit $\frac{T}{T_0} \in \mathbb{Z}$ liefert. Wir finden außerdem parallel dazu (mit Lemma 1, Kap.IV) ein $\xi_0 \in \mathcal{B}(K)$ mit

$$D(\xi_0) = \zeta_K(2) \cdot \frac{3d\sqrt{d}}{2T_0\pi^2}.$$

- Ende des Computereinsatzes -

Mit dem Wert T_0 bewaffnet, von dem wir $T = T_0$ annehmen wollen (also $D(\xi_0) = D_{\min}(\mathcal{B}(K))$), lassen wir uns nun wieder von theoretischen Überlegungen treiben.

Ein Spezialfall der Lichtenbaum-Vermutung für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ lautet in Graysons [G] Formulierung: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ seine Diskriminante, dann gilt

$$\zeta_K(2) \cdot \frac{d\sqrt{d}}{8\pi^2} = D_{\min}(\mathcal{B}^{\otimes}(K)) \cdot \frac{\#(K_2(\mathcal{O}_K))}{\#(K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}})}.$$

Dabei seien

$$\mathcal{B}^{\otimes}(K) = \ker\left(\mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})} \xrightarrow{\lambda} K^{\times} \otimes K^{\times}\right),$$

* Dies ist keine Doktorarbeit!

$\lambda : [z] \mapsto z \otimes (1 - z)$ ein Homomorphismus und K_2 und K_3 wie unten definiert. Außerdem definieren wir nach Grayson [G]

$$\mathcal{C}^\otimes(K) = \ker \left(\mathbb{Z}^{(K - \{0,1\})} \xrightarrow{\lambda} K^\times \otimes K^\times / \langle x \otimes -x, x \otimes y + y \otimes x \rangle \right).$$

Es gilt: a) $D(\mathcal{B}^\otimes(K)) = D(\mathcal{C}^\otimes(K))$,

b) $D(\mathcal{B}(K)) \leq D(\mathcal{C}^\otimes(K)) \leq 2D(\mathcal{B}(K))$ für $d \neq 4$

und bei einer der beiden Ungleichungen steht das Gleichheitszeichen.

zu a.) Sei $\sum n_i [z_i] \in \mathcal{C}^\otimes(K)$, dann gilt $(n_i, m_j \in \mathbb{Z})$

$$\sum n_i (z_i \otimes (1 - z_i)) = \sum m_j (x_j \otimes -x_j) = \sum m_j (x_j \otimes (1 - x_j) + \frac{1}{x_j} \otimes (1 - \frac{1}{x_j})),$$

$$\text{also } \sum n_i [z_i] - \sum m_j ([x_j] + [\frac{1}{x_j}]) \in \mathcal{B}^\otimes(K).$$

Wegen $D([x] + [\frac{1}{x}]) = 0$ folgt die Behauptung, da die zweite Relation aus der ersten gewonnen werden kann:

$$x \otimes y + y \otimes x = (xy \otimes -xy) - (x \otimes -x) - (y \otimes -y).$$

zu b.) Beh.: $\xi := \sum x_i \otimes (1 - x_i) = 0 \Rightarrow 2 \sum x_i \wedge (1 - x_i) = 0$.

Bew.: Sei $x_i = \epsilon_i \prod_k p_k^{\nu_{ki}}$, $1 - x_i = \epsilon'_i \prod_l p_l^{\mu_{li}}$, wobei $\{p_k\}_k$ eine \mathbb{Z} -Basis von K^\times sei und $\epsilon_i, \epsilon'_i \in \{1, -1\}$. (Das Argument muß für $d = 3$ modifiziert werden.)

$$\text{Dann gilt: } 2\xi = \sum_{i,k,l} p_k^{\nu_{ki}} \otimes p_l^{\mu_{li}} = \sum_{k < l} n_{kl} (p_k \otimes p_l) + \sum_{k,i} p_k^{\nu_{ki}} \otimes (-p_k)^{2\mu_{ki}} = 0.$$

Also müssen die n_{kl} (wg. der Eindeutigkeit der Darstellung) verschwinden, und daher ist auch

$$2 \sum x_i \wedge (1 - x_i) = \sum_{k,i} p_k^{\nu_{ki}} \wedge p_k^{2\mu_{ki}} = 0.$$

Nach Lemma 1 (Kap. IV) gibt es nun aber (für $d \neq 4$) ein $\eta \in \mathcal{B}(K)$ mit $D(\eta) = D(\xi)$. Somit folgt die erste Ungleichung.

Die zweite Ungleichung ergibt sich ganz analog (wobei ein Analogon zu Lemma 1 nicht gilt).

A priori ist nicht klar, ob es nicht zufällig eine Kombination $\eta = \sum [y_i] \in \mathcal{B}^\otimes(K)$ geben könnte, so daß $D(\eta) = D_{\min}(\mathcal{B}(K))$ ist. Wir halten es aber für eher unwahrscheinlich (es müßte sich eine Menge 2-Torsion gegenseitig wegheben) und gehen—wie die numerischen Ergebnisse suggerieren—davon aus, daß gilt:

$$D(\mathcal{B}^\otimes(K)) \stackrel{?}{=} 2D(\mathcal{B}(K)), \quad d \neq 4.$$

Damit schreibt sich unsere Formulierung der Lichtenbaum-Vermutung (im imaginärquadratischen Fall) folgendermaßen (für $d = 4$ ersetze 16 durch 8):

$$\zeta_K(2) \cdot \frac{d\sqrt{d}}{16\pi^2} \stackrel{?}{=} D_{\min}(\mathcal{B}(K)) \cdot \frac{\#(K_2(\mathcal{O}_K))}{\#(K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}})}.$$

Zu K_2 und $K_3 \dots$

Definition: Sei K algebraischer Zahlkörper. Nach Matsumoto gilt—sogar für beliebige Körper—(siehe [Mi], §11):

$$K_2(K) = K^\times \otimes K^\times / \langle x \otimes (1 - x) \mid x \in K - \{0,1\} \rangle.$$

Wir wollen dies als unsere Definition von $K_2(K)$ ansehen.

Sei \mathcal{O}_K der Ring der ganzen Zahlen in K , v eine diskrete Bewertung von K . Die Abbildung

$$T_v(\{a, b\}) = (-1)^{v(a)v(b)} a^{v(b)} b^{-v(a)} \pmod{v} \quad \forall a, b \in K^\times$$

heißt *zahmes Symbol (tame symbol)* zu v und ist ein Homomorphismus

$$T_v : K_2(K) \longrightarrow \overline{K}_v^\times,$$

wo \overline{K}_v den Restklassenkörper von K zur Bewertung v und $\{a, b\}$ die Restklasse von $a \otimes b$ in $K_2(K)$ bezeichnen soll. Sei

$$\tau : K_2(K) \longrightarrow \bigoplus_v \overline{K}_v^\times$$

der von den zahmen Symbolen definierte Homomorphismus, die direkte Summe geht dabei über alle diskreten Bewertungen von K .

Es gilt ([Q]):

$$K_2(\mathcal{O}_K) = \text{Ker } \tau .$$

Sei $[a, b]_v$ das Hilbert-Symbol ([Mi], §15) für eine nicht-komplexe Bewertung v , und sei

$$\eta : K_2(K) \longrightarrow \bigoplus_v \mu_v$$

der von den Hilbertsymbolen definierte Homomorphismus, diesmal erstreckt sich die Summe über alle nicht-komplexen Bewertungen von K .

μ_v sei die Gruppe der Einheitswurzeln in K_v , der Vervollständigung von K an der Stelle v .
Wir nennen

$$\mathcal{K}_2(K) = \text{Ker } \eta$$

den *Hilbert-Kern* von $K_2(K)$.

Es gelten die beiden folgenden Tatsachen:

- 1) $\mathcal{K}_2(K) \subset K_2(\mathcal{O}_K)$
- 2) $\#\mathcal{K}_2(\mathcal{O}_K) < \infty$.

Eine Definition von $K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}}$ benötigen wir nicht, es genügt uns zu wissen, daß nach Sätzen von Merkurjew-Suslin und Soulé die Ordnung gleich der Zahl $w_2(K)$ ist, die man beispielsweise folgendermaßen definieren kann:

$$w_2(K) = \text{ggT}_{\substack{\varphi \text{ Primideal} \\ \text{in } \mathcal{O}_K}} (N(\varphi)^\infty (N(\varphi)^2 - 1)) .$$

[Mit $N(\varphi)^\infty$ meinen wir eine "genügend hohe" Potenz von $N(\varphi)$.]

Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ gilt stets

$$w_2(K) = 24 .$$

[Bew.: $8|w_2(K)$, da $N(\varphi)^2 \equiv 1(8)$ für $\varphi \nmid 2$.

$3|w_2(K)$, da $N(\varphi)^2 \equiv 1(3)$ für $\varphi \nmid 3$.

$16 \nmid w_2(K)$, da die Kongruenzen $p \not\equiv \pm 1(8)$ und $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$ nach dem Dirichletschen Primzahlsatz gleichzeitig für eine Primzahl p erfüllbar sind.

$9 \nmid w_2(K)$, betrachte die Kongruenzen $p \not\equiv \pm 1(9)$ und $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$.

Sei $q > 3$ prim, $q \nmid d$, dann $\exists p \equiv 2(q) : \left(\frac{-d}{p}\right) = 1$.

Sei $q > 3$ prim, $q|d$, dann $\exists p \equiv 2(q)$ mit $(p, 2d) = 1$, es gilt $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$ oder $\left(\frac{-d}{-p}\right) = 1$, da $\left(\frac{-d}{-p}\right)$ ein ungerader Charakter ist.

Jeweils gilt für $\varphi|p$: $N(\varphi)^2 = p^2 \not\equiv 1(q)$.]

Deshalb erhalten wir für die Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_K)$:

$$\#\mathcal{K}_2(\mathcal{O}_K) \stackrel{?}{=} \zeta_K(2) \cdot \frac{3d\sqrt{d}}{2\pi^2 D_{\min}(\mathcal{B}(K))} \quad (\text{Lichtenbaum - Vermutung}) .$$

Bei dieser Formulierung sehen wir sofort, daß der von uns bestimmte Wert T "modulo aller Vermutungen" die Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_K)$ darstellt. Unsere Mutmaßung, daß für imaginärquadratische Körper die Vermutung so richtig ist, wird gestützt durch die Tatsache, daß wir eine erstaunliche Übereinstimmung dieses Wertes T mit den theoretischen Ergebnissen von Browkin [B1] und Browkin-Schinzel [B-S] zu $K_2(\mathcal{O}_K)$ erzielen, deren Abschätzung (bzw. in einigen Fällen genaue Bestimmung) des 2- und 3-Anteils von $K_2(\mathcal{O}_K)$ nach unten unsere Rechnungen—unter Voraussetzung der obigen Form der Lichtenbaum-Vermutung—in jedem einzelnen Fall bestätigen.

Wir zitieren den entscheidenden Satz aus [B-S]:

Satz: (Browkin, Schinzel) Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, m quadratfrei, t die Anzahl der ungeraden Primteiler von m , NK die Normen von Elementen aus K in \mathbb{Q} und e_k die Anzahl der Faktoren in einer Darstellung von $K_2(\mathcal{O}_K)$ als direktes Produkt zyklischer Gruppen, deren Ordnung durch k teilbar ist. Dann gilt:

$$e_2 = \begin{cases} t, & \text{falls } 2 \in NK, \text{ d.h. } \forall p|m, p \text{ prim: } \left(\frac{2}{p}\right) = 1, \\ t-1, & \text{falls } 2 \notin NK, \end{cases}$$

$$e_4 \leq e_2 - 1, \quad \text{falls } m \equiv -1 \pmod{8}.$$

Korollar: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, m quadratfrei.

- a) $2 \nmid K_2(\mathcal{O}_K) \iff m = 1, 2, p, 2p$, wobei p prim, $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$.
 b) Sei $m \equiv -1 \pmod{8}$. Dann gilt (\parallel bedeutet: "teilt genau")

$$2 \parallel K_2(\mathcal{O}_K) \iff \{m = p, p \text{ prim oder } m = pq, p, q \text{ prim, } p \equiv -q \equiv 3 \pmod{8}\}.$$

Der von uns bestimmte "experimentelle" 2-Anteil von $K_2(\mathcal{O}_K)$ stimmt in den im Korollar angegebenen Fällen mit dem richtigen 2-Anteil überein; wir wagen sogar eine noch weitergehende Vermutung im Falle $m \equiv 1 \pmod{8}$, was die Abschätzungen des Satzes anbelangt.

Doch zunächst zitieren wir einen weiteren Satz von Browkin [B1], der den "zahmen" Anteil von $K_2(\mathcal{O}_K)$, d.h. die Faktorgruppe $K_2(\mathcal{O}_K)/\mathcal{K}_2(K)$, für alle algebraischen Zahlkörper bestimmt hat.

Satz: (Browkin) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, m quadratfrei. Dann gilt:

$$K_2(\mathcal{O}_K)/\mathcal{K}_2(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & m \equiv \pm 1(8), m \neq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \times \begin{cases} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & m \equiv 3(9), m \neq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Auch der hier angegebene 3-Anteil von $K_2(\mathcal{O}_K)$ erscheint in jedem Fall in unserer Tabelle.

Unsere Tabelle suggeriert die folgenden Vermutungen:

Vermutung: Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, m quadratfrei gilt:

- a) $m \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow e_4 \geq 1$, (d.h. $\#K_2(\mathcal{O}_K)_{2\text{-Tors}} \geq 2^{e_2+1}$),
 b) $m \equiv 1 \pmod{16}$, $2 \in NK \Rightarrow \#K_2(\mathcal{O}_K)_{2\text{-Tors}} \geq 2^{e_2+2}$, insbesondere
 $m \equiv 1 \pmod{16}$, m prim $\Rightarrow e_8 \geq 1$,
 c) $3 \mid \#\mathcal{K}_2(K) \Rightarrow 3 \mid h(\mathbb{Q}(\sqrt{-m}))$,
 d) $5 \mid \#K_2(\mathcal{O}_K) \Rightarrow 5 \mid h(\mathbb{Q}(\sqrt{-5m}))$.

Hier sei $h(K)$ die Klassenzahl des Körpers K .

Wir geben in Anhang 4 zwei Tabellen für die imaginärquadratischen Körper an, die eine listet die vermutliche $K_2(\mathcal{O}_K)$ -Ordnung von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ für $m < 2000$, die andere die Abweichung dieser Ordnung vom "zahmen" Anteil (bezüglich des 3-Anteils) sowie von e_2 und von Teil a) der obigen Vermutung (bezüglich des 2-Anteils). Teil b) der Vermutung haben wir dabei noch nicht berücksichtigt, er könnte sich als zu forsch herausstellen...

Eine ähnliche Aussage wie in c) für reellquadratische Körper wurde von Browkin [B2] (unter Verwendung der für diesen Fall bis auf 2-Anteil geltenden Lichtenbaum-Vermutung) bewiesen.

Mathematische Kurzfassung des Verfahrens

Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante von K , \mathcal{O}_K der Ring der ganzen Zahlen in K , $N(x)$ die Norm von x in K , m der quadratfreie Teil von d .

Wähle $k \in \mathbb{N}$ fest.

Suchen

Wir wählen k Primzahlen

$$P = \{2 = p_1, p_2, \dots, p_k\},$$

die "günstig" sind (im Sinne, daß die unten definierte Menge \mathcal{F} groß genug ist). Häufig wählt man für p_2, \dots, p_k die $k-1$ kleinsten Primzahlen $p > 2$, für die folgendes gilt:

$$\text{entweder } \left(\frac{-d}{p}\right) = 0 \text{ und } p < \sqrt{m} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{-d}{p}\right) = 1.$$

Es kann sich sehr wohl als sinnvoll herausstellen, ein paar Primzahlen p mit $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$ zu verwenden, etwa bei "größerem" k ($k \geq 7$) und bei "großen" p_2, \dots, p_k (≥ 20).

Wir bilden die folgenden 3 Mengen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal in } \mathcal{O}_K, \mathfrak{p}|p \text{ für ein } p \in P\} = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}, \\ \mathcal{M} &= \{p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k} \mid \nu_i \in \mathbb{Z}, p_j \in P\} \subset \mathbb{Q}_{>0}, \\ \mathcal{F} &= \left\{x = \frac{a + b\sqrt{-m}}{c} \in K \mid N(x) \in \mathcal{M} \wedge N(1-x) \in \mathcal{M}, \right. \\ &\quad \left. |a| < 1000, 1 \leq b \leq 20, |c| \leq 2000, a, b, c \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

(Zur Bestimmung von \mathcal{F} siehe Seite 8.)

Darstellen

Bezeichne (x) das von x in K erzeugte Hauptideal. Schreibe (x_i) und $(1-x_i)$ in der Abschnitts-Idealbasis \mathcal{P} ,

$$(x_i) = \mathfrak{p}_1^{\alpha_{i1}} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_{ir}}, \quad (1-x_i) = \mathfrak{p}_1^{\beta_{i1}} \cdots \mathfrak{p}_r^{\beta_{ir}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Bilde für $i = 1, \dots, n$ Vektoren

$$b_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir}) \wedge (\beta_{i1}, \dots, \beta_{ir}) = (\alpha_{i1}\beta_{i2} - \alpha_{i2}\beta_{i1}, \dots, \alpha_{i,r-1}\beta_{ir} - \alpha_{ir}\beta_{i,r-1}) \in \mathbb{Z}^\rho, \quad \rho = \binom{r}{2},$$

und sei G das von b_1, \dots, b_n aufgespannte Gitter in \mathbb{Z}^ρ . O.B.d.A. nehmen wir an, daß $\text{rg}(G) = \rho$ ist (sonst wiederholt man den ersten Schritt mit einer größeren Menge von Primzahlen).

Gitterbasis konstruieren

Wir erhalten eine Gitterbasis von G wie folgt: sei o.B.d.A. b_1, \dots, b_ρ eine \mathbb{Q} -Basis und setze

$$b_i^{(0)} = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$B^{(0)} = \left(\begin{array}{c} b_{1\nu}^{(0)} \\ \vdots \\ b_{n\nu}^{(0)} \end{array} \right)_{\nu=1, \dots, \rho}, \quad B^{(0)} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Q}^\rho.$$

(Wir betrachten die Elemente in \mathbb{Z}^n und \mathbb{Q}^ρ als Zeilenvektoren.) Gesucht ist nun eine \mathbb{Z} -Basis für $\text{Im}(B^{(0)})$.

Sei $v^{(0)} = v(b_1^{(0)}, \dots, b_\rho^{(0)}) = (\det(b_1^{(0)}, \dots, b_\rho^{(0)}))$ das Volumen des von $\{b_1^{(0)}, \dots, b_\rho^{(0)}\}$ aufgespannten Gitters. Dieses wird nun sukzessive verbessert.

Induktiver Schritt ($i \rightarrow i+1$):

$$M = \begin{pmatrix} b_{1\nu}^{(i)} \\ \vdots \\ b_{\rho\nu}^{(i)} \end{pmatrix}_{\nu=1, \dots, \rho},$$

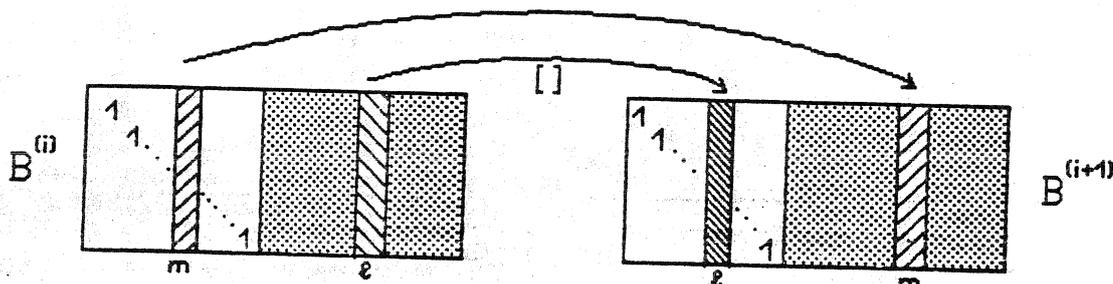
$$b_j^* = b_j^{(i)} \cdot M^{-1} = (b_{jk}^*)_{k=1, \dots, \rho},$$

also gilt für $j = 1, \dots, \rho$: $b_j^* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.
 j -te Stelle

Sind alle b_{jk}^* ganzzahlig, so sind wir fertig.

Sonst wähle ein Paar von Indizes (l, m) , so daß $b_{lm}^* - [b_{lm}^*]$ minimal unter den $b_{jk}^* - [b_{jk}^*] > 0$ wird. Ersetze

$\{b_1^{(i)}, \dots, b_n^{(i)}\}$ durch $\{b_1^{(i)}, \dots, b_l^{(i)} - \sum_{k=1}^{\rho} [b_{lk}^*] b_k^{(i)}, \dots, b_m^{(i)}, \dots, b_n^{(i)}\} =: \{b_1^{(i+1)}, \dots, b_n^{(i+1)}\}$. (s. Figur)



Dann gilt $\text{Im}(B^{(i+1)}) = \text{Im}(B^{(i)})$. Die m -te Koordinate von $b_m^{(i+1)}$ in der vorigen Basis $\{b_1^{(i)}, \dots, b_\rho^{(i)}\}$ (nämlich $b_{lm}^* - [b_{lm}^*]$) liegt echt zwischen 0 und 1, daher bildet $\{b_1^{(i+1)}, \dots, b_\rho^{(i+1)}\}$ wiederum eine \mathbb{Q} -Vektorraum-Basis für $\mathbb{Q}^{(\rho)}$, außerdem hat das von dieser neuen Basis aufgespannte Gitter ein echt kleineres Volumen als $v^{(i)}$.

Da die Menge der möglichen Gittervolumina diskret in $\mathbb{R}_{>0}$ liegt, sind wir nach endlich vielen, etwa s , Schritten fertig und die $b_1^{(s)}, \dots, b_\rho^{(s)}$ bilden die gewünschte Gitterbasis.

Optimale Zerlegung finden Die zugeordneten Dilogarithmuswerte seien $d_i^{(s)}$, $i = 1, \dots, n$.

Wegen des Satzes von Suslin, Levine, Bloch und Borel gilt

$$b_j^{(s)} = \sum_{i=1}^{\rho} n_i b_i^{(s)}, \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad d_j^{(s)} - \sum_{i=1}^{\rho} n_i d_i^{(s)} = q_j \cdot \zeta_K(2) \cdot \frac{3d\sqrt{d}}{2\pi^2} \quad \text{für } j = \rho+1, \dots, n,$$

wobei $q_j \in \mathbb{Q}$. Im Falle $d = 3$ bzw. $d = 4$ müssen wir alle Koeffizienten (wegen der nicht berücksichtigten Torsion) evtl. mit 3 bzw. 2 multiplizieren.

Sei $q = \text{ggT}(q_j \mid j = \rho+1, \dots, n)$.

Die Lichtenbaum-Vermutung impliziert—unter der Voraussetzung, daß wir $q\zeta_K(2) \cdot \frac{3d\sqrt{d}}{2\pi^2} = D_{\min}(B(K))$ haben—

$$\#K_2(\mathcal{O}_K) = \frac{1}{q}.$$

Die Chancen, daß wir mit unserer Methode das "richtige" q , also auch das volle Gitter $\Lambda = D(B(K))$ getroffen haben, sind recht hoch, da wir meist Hunderte von verschiedenen Werten q_j geliefert bekommen.

Wir berechnen $\zeta_K(2)$ mit Hilfe von Epstein-Zetafunktionen, man vergleiche auch hier wieder [Z1], App. to §3.

Kapitel III

Die geometrische Zerlegung und ideale Triangulierungen des hyperbolischen Raumes

Zwei Modelle und ihre Entsprechung

Im folgenden sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ein imaginärquadratischer Zahlkörper, $-d$ die Diskriminante von K . Wir gehen aus von zwei Modellen für den hyperbolischen Raum, das zweite ist dabei abhängig von d ,

1.) dem oberen Halbraum $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$ mit der von \mathbb{R}^3 induzierten Topologie und der Metrik

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dr^2}{r^2}.$$

Geodätische in \mathbb{H}^3 sind euklidische Geraden senkrecht zur komplexen Ebene und euklidische Halbkreise, die \mathbb{C} orthogonal schneiden.

2.) der oberen Schale eines Hyperboloids im Minkowski-Raum M^4

$$H^+ = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M^4 \mid x_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1, x_4 > 0\},$$

mit der von \mathbb{R}^4 induzierten Topologie und der Metrik, die von der (leicht modifizierten) Lorentz-Metrik

$$ds^2 = dx_1^2 + d dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$$

des M^4 auf (dem Tangentialraum von) H^+ induziert wird. M^4 ist ein 4-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer quadratischen Form f vom Typ $(3, 1)$,

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

den wir als Vektorraum mit \mathbb{R}^4 identifiziert haben. Geodätische in H^+ sind Durchschnitte von euklidischen Ebenen durch den Nullpunkt in M^4 mit dem Hyperboloid.

Die beiden Modelle gehen durch die folgende Isometrie φ ineinander über:

$$\begin{aligned} \varphi: (u + iv, w) \in \mathbb{H}^3 &\longmapsto \left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w\sqrt{d}}, \frac{u^2 + v^2 + w^2 - 1}{2w}, \frac{u^2 + v^2 + w^2 + 1}{2w} \right) \in H^+, \\ \varphi^{-1}: (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H^+ &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_4 - x_3} + i \frac{x_2\sqrt{d}}{x_4 - x_3}, \frac{1}{x_4 - x_3} \right) \in \mathbb{H}^3. \end{aligned}$$

Ein weiteres Modell werden wir gelegentlich erwähnen: das Kleinsche oder projektive Modell

$$D_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 < 1\},$$

das wir durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa: H^+ &\longrightarrow D_1 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1 \right) \end{aligned}$$

erhalten (Projektion von H^+ vom Ursprung in M^4 aus auf die Hyperebene $x_4 = 1$).

Auf \mathbb{H}^3 operiert

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von links wie folgt ($z \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{R}_{>0}$):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : (z, \zeta) \longmapsto \left(\frac{(\alpha z + \beta)(\bar{\gamma}z + \bar{\delta}) + \zeta^2 \alpha \bar{\gamma}}{|\gamma z + \delta|^2 + \zeta^2 |\gamma|^2}, \frac{\zeta}{|\gamma z + \delta|^2 + \zeta^2 |\gamma|^2} \right).$$

Jeder dieser Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix}$ ordnen wir nun eine entsprechend (linear auf M^4) operierende Matrix aus $SO(f)$ zu, und zwar vermöge des Isomorphismus (vgl. z.B. Miller [M], Ch.8) :

$$\psi : \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} SO(f)^\circ,$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \mapsto M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,4},$$

mit m_{ij} wie in Lemma 2 (Kapitel IV). Der Kringel $^\circ$ an $SO(f)$ steht für die Zusammenhangskomponente der Eins, wobei $SO(f)$ als reelle Liegruppe aufgefaßt wird.

Bemerkung : Unsere Matrizen sind zu denen, die Miller für $SO(3,1)^\circ$ erhält, mit $\Lambda = \text{diag}(1, \frac{1}{\sqrt{d}}, -1, 1)$ konjugiert, ψ ist also wie φ und H^+ von d abhängig.

Sei \mathcal{O}_d der Ring der ganzen Zahlen in K . $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H}^3 . Sei π die Projektion $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{C}$.

Unter einer *Fundamentalmasche* (in \mathbb{C}) bezüglich $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ verstehen wir die Projektion $\pi(T)$ eines Fundamentalbereichs $T \subset \mathbb{H}^3$ für die Operation von Γ_∞ (dem Stabilisator von ∞ in Γ), unter einer *Eckfigur* einer Pflasterung des hyperbolischen Raumes—in der Ecke ∞ —verstehen wir die Projektion aller Kanten derjenigen Polyeder dieser Pflasterung, welche die Ecke ∞ enthalten (vgl. dagegen die Bezeichnung "Eckfigur" in [G-G-M]); dabei begnügen wir uns damit, eine Fundamentalmasche zu betrachten, da unsere Pflasterungen $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ -invariant sind.

Wir erweitern (außer für $d = 4$) $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ um das Element $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ —genauer: um seine Äquivalenzklasse $\xi = \{\pm iX\}$ in $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ — der Ordnung 2 zu

$$\tilde{\Gamma} = \widetilde{\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)} = \text{PSL}(2, \mathcal{O}_d) \rtimes \langle \xi \rangle = \{\gamma \in M_2(\mathcal{O}_d) \mid \det(\gamma) = \pm 1\} = \text{PGL}(2, \mathcal{O}_d)$$

(\rtimes bezeichnet semidirektes Produkt, X operiert als Automorphismus auf $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ durch $A \mapsto XAX^{-1}$). X operiert auf \mathbb{H}^3 durch $(z, r) \mapsto (-z, r)$, also durch die Drehung um 180° um die Achse (d.h. die Geodätische) durch $(0,1)$ und $(0,2)$ (oder, schöner ausgedrückt, um die Achse durch die Punkte $0=(0,0)$ und ∞ , die wir gleich einführen werden); analog operiert $\psi(X)$ auf H^+ durch $(a, b, c, d) \mapsto (-a, -b, c, d)$ und wird die zu konstruierende Pflasterung invariant lassen.

Der Vorteil dieser erweiterten Gruppe $\tilde{\Gamma}$ wird sich in einer Halbierung der Arbeit äußern: es wird fast immer genügen, die Pflasterung oberhalb einer halben Fundamentalmasche für die Operation von Γ zu bestimmen, da wir dann den dazu um 180° gedrehten Bereich als die zweite Hälfte hinzunehmen können—unter einer gewissen Bedingung, die für $d > 11$ stets der Fall zu sein scheint (und bei unseren Beispielen der Fall ist).

Da in $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ die endlichen Untergruppen eine Ordnung ≤ 12 haben (vgl. z.B. [Z1], §6), können wir in $\widetilde{\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)}$ die Ordnung durch 24 nach oben beschränken.

Wir werden im Beispiel am Ende des Kapitels sehen, daß es angebracht ist, eine noch größere Gruppe $\hat{\Gamma}$ zu betrachten, die schon von Bianchi [Bi] gefunden wurde. Wenn z.B. $d \equiv 0 \pmod{4}$, so ist

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{\substack{m \geq 1 \\ m|d}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}\sqrt{m} + \mathbb{Z}\sqrt{-d/4m}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

Eine einheitliche Definition, die für alle Zahlkörper gilt und von Hurwitz eingeführt wurde, lautet:

$$\hat{\Gamma} = \text{PSL}(2, \overline{\mathbb{Z}}) \cap \text{PGL}(2, K),$$

($\overline{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{C} \mid x \text{ ganz algebraisch über } \mathbb{Q}\}$), oder expliziter:

$$\hat{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha/\sqrt{\omega} & \beta/\sqrt{\omega} \\ \gamma/\sqrt{\omega} & \delta/\sqrt{\omega} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{O}_K; \omega = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \alpha^2/\omega, \beta^2/\omega, \gamma^2/\omega, \delta^2/\omega \in \mathcal{O}_K \right\}.$$

Maaß [Maa] schließlich hat gezeigt, daß für total-reelle Körper diese Gruppe als diskontinuierliche Gruppe auf $(\mathbb{H}^2)^n$, $n = [K : \mathbb{Q}]$, "maximal" ist. Aus diesem Grund wird (im total-reellen Fall) diese erweiterte Gruppe in der Literatur "Hurwitz-Maaß-Erweiterung" (der Hilbertschen Modulgruppe) genannt, für den imaginärquadratischen Fall ist sie als "erweiterte Bianchi-Gruppe" bekannt. Bei uns taucht sie als volle (orientierungserhaltende) Symmetriegruppe der zu konstruierenden Pflasterung auf. Der Index von $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ in $\widehat{\Gamma}$ ist 2^t , t die Anzahl der verschiedenen Primteiler von d .

Erweitern wir \mathbb{H}^3 unter Hinzunahme von $\partial\mathbb{H}^3 = K \cup \{\infty\}$ zu

$$\widehat{\mathbb{H}^3} = \{(z, r) \mid z \in \mathbb{C}, r > 0\} \cup \{(z, 0) \mid z \in K\} \cup \{\infty\}$$

[der Hut soll an "Spitzenhäubchen" erinnern...], wobei die Topologie von der üblichen Topologie auf der Sphäre $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ herkommen soll, so erhalten wir durch stetige Fortsetzung der Operation von $\widehat{\Gamma}$ eine solche auf $K \cup \{\infty\}$ vermöge der Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \forall \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \widehat{\Gamma}, \forall z \in K \cup \{\infty\}.$$

Bemerkung : Da wir im Text d fest wählen, beladen wir $\varphi, \psi, \widehat{\mathbb{H}^3}$ und H^+ nicht mit einem solchen Index, sind uns aber stets der Tatsache bewußt, daß wir für jedes d eine etwas andere Situation vorliegen haben. Wir wählen diese Modelle deshalb abhängig von d , weil wir später "ganzzahlig arbeiten" wollen (natürlich ginge alles analog im üblichen Modell für M^4). Wir könnten d anstatt wie oben auch quadratfrei annehmen (wie etwa im Beispiel am Ende des Kapitels), dabei ändert sich gegebenenfalls (falls nämlich die Diskriminante von K durch 4 teilbar ist) in der x_2 -Koordinate alles um einen Faktor 2.

Die Pflasterung

Wir streben im folgenden eine $\widehat{\Gamma}$ -invariante Pflasterung von \mathbb{H}^3 bzw. $\widehat{\mathbb{H}^3}$ an, und zwar sollen die pflasternden Polyeder die schöne Eigenschaft haben, daß ihre Eckpunkte allesamt im "Unendlichen" liegen, in unserem Modell $\widehat{\mathbb{H}^3}$ also auf $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \cup \{\infty\}$. Aus dieser Pflasterung (oder auch "Polyangulierung") folgt unmittelbar eine ideale Triangulierung von \mathbb{H}^3 . Diese ideale Triangulierung wird sich für uns vor allem deshalb auszahlen, weil man das Volumen eines solchen idealen Tetraeders sehr einfach mit der Dilogarithmusfunktion hinschreiben kann.

Um zu dieser Pflasterung zu kommen, verwenden wir die "convex hull construction" von Epstein und Penner [E-P]. Sei

$$L^+ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M^4 \mid x_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, x_4 > 0\}$$

der positive Lichtkegel im Minkowski-Raum M^4 . Ein Strahl auf L^+ vom Ursprung (in M^4) aus entspricht einem Punkt auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, der Sphäre im Unendlichen von \mathbb{H}^3 , die Strahlen mit rationalen Richtungen auf L^+ (also den Richtungen $L^+(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}_{>0}$) entsprechen dabei gerade $K \cup \{\infty\}$, wie wir unten sehen werden. Es sei für jede der h (= Klassenzahl von K) Spitzen \bar{s}_i (Äquivalenzklassen von Elementen von $K \cup \{\infty\}$ unter der Gruppenoperation) ein Repräsentant $s_i \in L^+$ gewählt. Dann bilden wir

$$C = C(s_1, \dots, s_h) = \text{euklidische konvexe Hülle von } \{\widehat{\Gamma}s_i \mid i = 1, \dots, h\}.$$

Diese konvexe Hülle hat die folgenden Eigenschaften (siehe [E-P]):

- C ist invariant unter $\widehat{\Gamma}$.
- Die topologische Dimension von C ist 4, der Rand von C setzt sich aus lauter Polyedern sowie aus den Strahlen $\{t \cdot \gamma s_i \mid t \geq 1\}$ "oberhalb" der einzelnen γs_i zusammen ($\gamma \in \widehat{\Gamma}, i = 1, \dots, h$).
- Auf den affinen Hüllen der einzelnen Polyeder des Randes wird eine euklidische Struktur induziert, bezüglich der die Eckpunkte eines Polyeders auf einer Sphäre liegen.
- Die Menge $C = \{C(s_1, \dots, s_h) \mid \{s_1, \dots, s_h\} \text{ Repräsentantensystem für die Spitzen von } K\}$ liefert eine $(h-1)$ -Parameterfamilie von $\widehat{\Gamma}$ -invarianten Pflasterungen des hyperbolischen Raumes.
- Die so erhaltenen Pflasterungen sind lokal endlich: eine kompakte Teilmenge des Inneren von L^+ schneidet nur endlich viele der Polyeder, aus denen der Rand ∂C von C zusammengesetzt ist.

Man erhält diese Pflasterungen im projektiven Modell D_1 durch (Zentral-)Projektion der Polyeder von $\partial\mathcal{C}$ und dann durch eine Isometrie auch in \mathbb{H}^3 .

Zusätzlich ergibt sich eine gewisse Dualität dieser Konstruktion zum klassischen Ford-Domain:

Sei $\tilde{\Gamma}_\infty$ der Stabilisator von ∞ in $\tilde{\Gamma}$, $F = \mathbb{H}^3 - \bigcup_{\gamma \in \tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}_\infty} B_\gamma$, wobei B_γ der einem Element $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}_\infty$ zugeordnete (euklidische) offene Halbkugel um $-\frac{d}{c}$ mit Radius $|c|^{-1}$ ist. Ein Ford-Domain ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}_\infty$ auf F .

Die erwähnte Dualität besagt nun, daß jede Ecke von F (d.h. jeder Punkt von \mathbb{H}^3 , in dem mindestens 3 der B_γ mit F zusammenstoßen) bezüglich der üblichen euklidischen Struktur auf M^4 dem Umellipsoidmittelpunkt eines Polyeders von $\partial\mathcal{C}$ entspricht (für jedes $C \in \mathcal{C}$), bezüglich der induzierten euklidischen Struktur auf der affinen Hülle des Polyeders sogar dem Umsphärenmittelpunkt.

Die Auswahl der Repräsentanten

Die "convex hull"-Konstruktion liefert nur für Klassenzahl 1 (also eine Spitze) eine kanonische Pflasterung von \mathbb{H}^3 .

Wir geben im folgenden für jede Wahl von d , also für eine beliebige Anzahl von Spitzen, eine ausgezeichnete "arithmetische" $\psi(\tilde{\Gamma})$ -invariante Menge von Punkten auf L^+ an.

Zunächst bekommen wir durch stetige Fortsetzung von φ auf $\widehat{\mathbb{H}^3}$ (wir ordnen einem Punkt von $\partial\mathbb{H}^3$ die entsprechende Richtung auf dem Lichtkegel zu):

$$\varphi(a + ib, 0) = (2a : \frac{2b}{\sqrt{d}} : a^2 + b^2 - 1 : a^2 + b^2 + 1).$$

(Wir könnten dieselbe Entsprechung auch mit Hilfe der Parametrisierung $t_1 = \frac{x}{1-z}$, $t_2 = \frac{y}{1-z}$ der Lösungen von $x^2 + dy^2 + z^2 = 1$ erhalten.)

Wir führen diese ganzzahlige Lösung auf einen kanonischen Repräsentanten des Strahles zurück:

Definition: Sei $(x : y : z : w)$ eine Geradenrichtung auf dem Lichtkegel L^+ . Ein *grobgekürzter Repräsentant* des Strahles durch 0 und (x, y, z, w) ist ein Tupel $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{Z}^4$ mit $w_0 > 0$ und $(x_0, y_0, z_0, w_0) = \lambda(x, y, z, w)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß (1) oder (2) gilt:

- (1) $\text{ggT}(x_0, y_0, z_0, w_0) = 1$ und $w_0 - z_0 \equiv 0 \pmod{2}$,
- (2) $\text{ggT}(x_0, y_0, z_0, w_0) = 2$ und $w_0 - z_0 \equiv 2 \pmod{4}$.

Die Menge dieser grobgekürzten Repräsentanten (auch grobgekürzte Lösungen von $x^2 + dy^2 + z^2 = w^2$ genannt) ist invariant unter der Operation der $\tilde{\Gamma}$ entsprechenden Matrizenengruppe in $\text{SO}(f)^\circ$ (Lemma 3, Kapitel IV).

Somit haben wir eine Bijektion, die wir wiederum der Einfachheit halber φ nennen wollen (wir sind uns des Mißbrauchs der Notation durchaus bewußt)

$$\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \cup \{\infty\} \xrightarrow{1:1} \mathcal{G} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4 \mid (x, y, z, w) \text{ grobgekürzte Lösung von } x^2 + dy^2 + z^2 = w^2\}$$

$$\varphi: (a_1 + a_2\sqrt{-d}, 0) \mapsto \text{grobgekürzt}(2a_1, 2a_2, a_1^2 + a_2^2 - 1, a_1^2 + a_2^2 + 1),$$

$$\varphi^{-1}: (x, y, z, w) \mapsto \left(\frac{x}{w-z} + \frac{y}{w-z}\sqrt{-d}, 0 \right) \text{ für } w \neq z,$$

$$\infty \mapsto (0, 0, 1, 1).$$

Nach Lemma 4, Kapitel IV ist diese Abbildung $\tilde{\Gamma}$ -äquivariant, wobei $\tilde{\Gamma}$ vermöge der Abbildung ψ operiert; d.h.

$$\varphi(Mx) = \psi(M)\varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \cup \{\infty\}, \quad \forall M \in \tilde{\Gamma}.$$

Im folgenden werden wir hierbei die Abbildung ψ unterdrücken.

Wir haben bis hierher die Korrespondenz zwischen den beiden erstgenannten Modellen errichtet, soweit wir sie benötigen. Die Vorteile des ersten Modells \mathbb{H}^3 liegen darin, daß man hier den Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ darstellen und außerdem Information in der Eckfigur ablesen und verpacken kann (siehe das unten angegebene Beispiel oder betrachte beispielsweise unsere Eckfiguren in Anhang 2...). Die Vorzüge des zweiten Modells H^+ liegen in der Linearität und dem einfachen Konzept der Höhe der x_4 -Koordinate, mit welcher wir leicht die zu findenden (grobgekürzten) Lösungen daraufhin untersuchen können, ob sie unterhalb einer gewissen Schranke liegen—da die Punkte diskret auf \mathcal{C} liegen, treten von einer solchen Sorte (mit $x_4 < \text{Schranke}$) nur endlich viele auf.

Pflasterung und Fundamentalbereich

Nehmen wir einmal an, wir hätten dem Rand von \mathcal{C} eine Menge \mathcal{P} von $\tilde{\Gamma}$ -inäquivalenten Polyedern entnommen, die zusammengesetzt einen Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ enthalten. Um hieraus einen Fundamentalbereich zu bestimmen, müssen wir jedes $P \in \mathcal{P}$ durch einen Fundamentalbereich der Operation von $\text{Sym}(P)$, der Symmetriegruppe von P in $\tilde{\Gamma}$, ersetzen. Die erwähnte Dualität der Konstruktion liefert außerdem, daß die Eckpunkte von P (bezüglich der euklidischen Metrik auf M^4) auf einem Ellipsoid liegen, das Polyeder also einen wohldefinierten Umellipsoidmittelpunkt U_P besitzt. U_P ist ein Punkt in P mit maximalem Stabilisator. Ist $\text{Sym}(P)$ zyklisch, so bilden wir die Gerade g durch die beiden Punkte auf ∂P (Umellipsenmittelpunkte von Seiten bzw. Kantenmittelpunkte bzw. Ecken), welche unter $\text{Sym}(P)$ in sich übergehen. Die Ebene E durch g und einen (weiteren) Eckpunkt und die Ebene γE (γ ein Erzeugendes von $\text{Sym}(P)$) hacken aus P eine Art "Kuchenstück" heraus, das zum Fundamentalbereich beiträgt. Ist $\text{Sym}(P)$ weder trivial noch zyklisch, so fällt der Umellipsoidmittelpunkt mit dem (leichter zu bestimmenden) Schwerpunkt zusammen. Wir zerlegen P mit Hilfe der Strecken durch U_P und die übrigen Eckpunkte in Pyramiden, deren Grundseiten gerade den Seiten von P entsprechen. Der herauszuschneidende Teil von P setzt sich in geeigneter Form aus diesen Pyramiden bzw. Teilen von ihnen zusammen, und zwar aus einer maximalen Menge von unter $\text{Sym}(P)$ inäquivalenten Pyramiden. Gehen diese noch durch (nichttriviale) Elemente von $\text{Sym}(P)$ in sich über, so trägt nur der entsprechende Teil zum Fundamentalbereich bei. In \mathbb{H}^3 müssen wir die genannten Geraden (Strecken) durch die entsprechenden Geodätischen ersetzen. Auf diese etwas willkürliche Weise kommen wir noch nicht ganz zu einem Fundamentalbereich im "üblichen" Sinne, da diese Pyramiden(-Teile) keinen zusammenhängenden topologischen Raum bilden müssen, aber wir kennen ja die Art der Verklebung untereinander, was völlig ausreichend ist.

Wir verweisen auf das unten angegebene Beispiel $\mathcal{Q}(\sqrt{-6})$, wo wir die Bestimmung eines Fundamentalbereiches explizit durchführen.

Das Aufsuchen der Polyeder

Zuerst speichern wir eine beträchtliche Anzahl von Lösungen (x_1, x_2, x_3, x_4) (die im folgenden stets grobgekürzt sein sollen) der Gleichung $x_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ (alle, für die $x_4 < \text{Schranke}$). Um daraus Polyeder zu basteln, starten wir "zuunterst", d.h. wir nehmen eine derjenigen Hyperebenen her, die durch die Eckpunkte unserer konvexen Hülle \mathcal{C} mit den kleinsten x_4 -Koordinaten gehen, bei uns stets durch $P_0 = (0, 0, 1, 1), P_1 = (0, 0, -1, 1), P_2 = (2, 0, 0, 2)$ ($\simeq \infty, 0, 1$). Zu diesen dreien suchen wir uns einen vierten (Lösungs-)Punkt P' , der zusammen mit ihnen eine Hyperebene *Hyp* aufspannt. Das Tetraeder mit diesen 4 Punkten als Eckpunkten muß noch nicht auf dem Rand von \mathcal{C} liegen, doch wir verbessern so lange, bis wir dort ankommen. Da es unterhalb von diesen drei "Startpunkten" keine weiteren gibt und ihre Ortsvektoren linear unabhängig sind, liegt das von ihnen aufgespannte (bezüglich der Lorentz-Metrik gleichseitige) Dreieck auf dem Rand.

Die Verbesserung

Für die folgenden Ausführungen betrachte man Figur 1, welche die Situation eine Dimension niedriger graphisch zu skizzieren versucht. Wir bilden den Durchschnitt von *Hyp* mit H^+ ; das sollte uns ein Ellipsoid E geben—falls nicht, so müssen wir so lange weiter nach Lösungen P' suchen, bis wir ein solches als Durchschnitt erhalten (da die Geradenrichtungen, die dem Rand von $\widehat{\mathbb{H}^3}$ entsprechen, auf \mathcal{C} dicht liegen, gibt es stets eine Hyperebene—sogar unendlich viele—mit dieser Eigenschaft). Die größte x_4 -Koordinate eines Punktes auf E liefert uns eine obere Schranke c_0 , bis zu der wir wiederum alle Lösungen suchen.

Dann prüfen wir, ob eine dieser (endlich vielen) Lösungen—etwa P'' —den (normierten) Normalenvektor N' auf Hyp verbessern kann: Sei N'' der (ebenfalls normierte) Normalenvektor zur Ebene durch P_0, P_1, P_2, P'' , und zwar sei N''_4 , die x_4 -Koordinate von N'' , größer als null. Ist N''_4 größer als N'_4 , dann ist N'' "besser" als N' , die neue Hyperebene liegt näher am Rand von C .

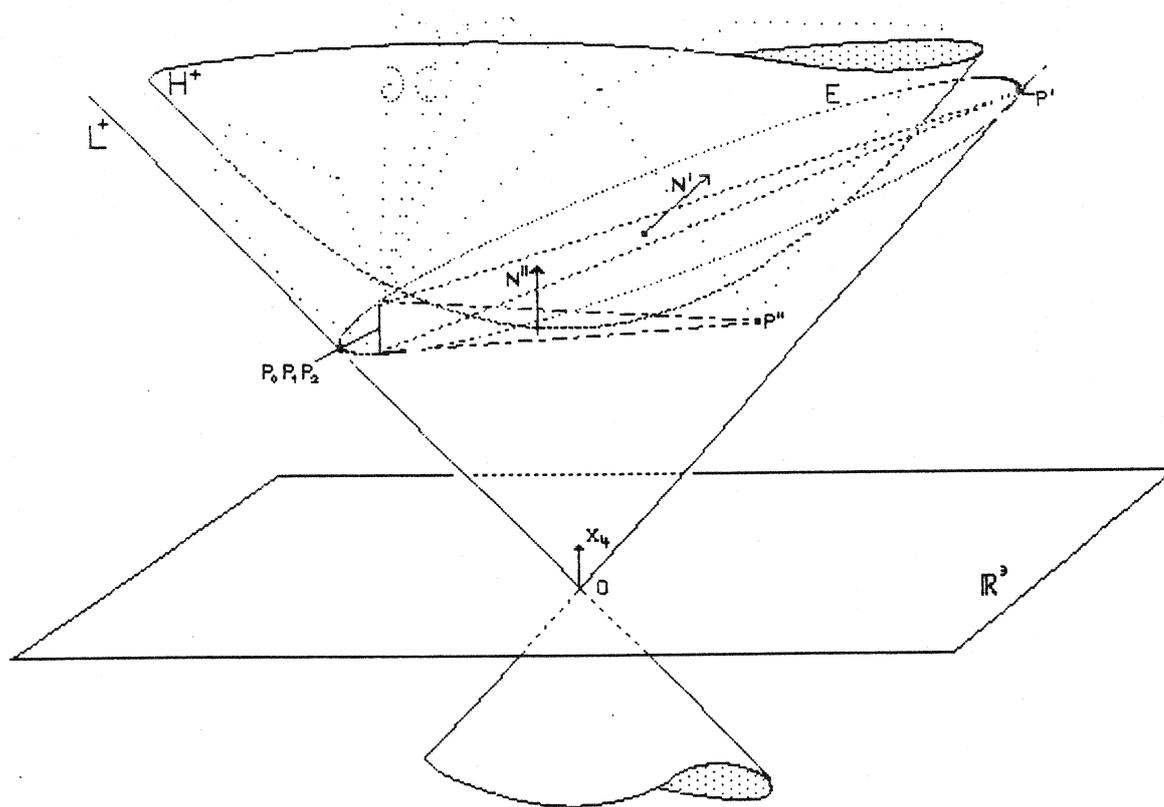
Haben wir alle durchprobiert und sukzessive—falls möglich—verbessert, so sind wir schließlich am Rand angelangt und haben vier Punkte an der Hand, welche zu unserem ersten Polyeder beitragen. Wir suchen jetzt unter den bisher aufgefundenen Lösungen alle, die in deren Hyperebene liegen. Es kann unter den übrigen (noch nicht gespeicherten) Lösungen keine weiteren geben, die sich in dieser Hyperebene befinden (der Durchschnitt dieser Hyperebene mit H^+ ergibt ein Ellipsoid, dessen größte x_4 -Koordinate kleiner ist als c_0), somit sind die Eckpunkte für das erste Polyeder \mathcal{P}_0 bestimmt.

Es schließt sich die Bestimmung der Seiten aus diesen Eckpunkten an. Da wir auch an der graphischen Darstellung der Projektion interessiert sind, bewerkstelligen wir diese Aufgabe gleich im Modell \mathbb{H}^3 .

Falls wir die Seiten von \mathcal{P}_0 unter $\bar{\Gamma}$ paarweise identifizieren können, so sind wir bereits fertig.

Ansonsten nehmen wir uns eine der noch nicht identifizierten Seiten her (Genauerer s.u., Auswahl der Seiten) und suchen dasjenige Polyeder des Randes, das an dieser Seite S anliegt. Dazu konstruieren wir die Hyperebene durch drei der Eckpunkte von S (Q_1, Q_2, Q_3) und den Punkt $Q_1 + (0, 0, 0, 1)$. Diese Hyperebene hat mit \mathcal{P}_0 als Durchschnitt die ausgewählte Seite S , außerdem liegen in beiden Halbräumen, welche die Hyperebene in M^4 berandet, Punkte auf dem Rand von C .

Wir suchen uns in jenem Halbraum, in dem \mathcal{P}_0 nicht liegt, einen Eckpunkt P' , und bilden wieder den Normalenvektor N' zu der Hyperebene durch P' und S . Alsdann verbessern wir N' wie gehabt, bis wir am Rand angelangt sind, suchen das zugehörige Polyeder \mathcal{P}_1 und identifizieren paarweise Seiten von $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \dots$ etc.



Figur 1

Auswahl der Seiten

Wir wollen die Seiten so auswählen, daß wir am Ende möglichst viel an der Projektion der Pflasterung nach \mathbb{C} erkennen können. Es bietet sich daher an, eine Fundamentalmasche zu überdecken. Dazu müssen wir alle Polyeder (bis auf Äquivalenz unter Γ_∞) kennen, die den Punkt ∞ enthalten. Wir werden also danach trachten, zuerst mit denjenigen Seiten fortzufahren, die ∞ enthalten. Es soll uns dabei nicht einmal stören, wenn eine solche Seite bereits durch eine Nicht-Translation identifiziert wurde, als "Entschädigung" für diesen Mehraufwand erhalten wir ein informativeres Bild der Eckfigur.

Die Triangulierung

Haben wir eine Eckfigur vollständig bestimmt, so entnehmen wir der Pflasterung von \mathbb{H}^3 eine Menge A von Polyedern, die inäquivalent unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$ sind und zusammengenommen einen Fundamentalbereich umfassen.

Wir nehmen an, daß es eine solche Menge A gibt, so daß jedes der Polyeder in A den Punkt ∞ enthält. Diese Annahme können wir für Klassenzahl 1 stets und für höhere Klassenzahlen in erstaunlich vielen Fällen machen, welche zunächst als unsere Beispiele ausreichen sollen.

Dann ist eine Triangulierung sofort zu sehen: Wir nehmen jede der Seiten her, deren Projektion nach \mathbb{C} einen Flächeninhalt $\neq 0$ hat. Diese Seiten sind in der Projektion als Polygone zu erkennen; wir unterteilen letztere in Dreiecke, deren drei Eckpunkte auch Eckpunkte der Polygone sind, nehmen zu den Ecken eines solchen Dreiecks als vierten Punkt ∞ hinzu, bilden die jeweiligen konvexen Hüllen und haben mit diesen Daten eine Triangulierung der Polyeder (und damit eine ideale Triangulierung von \mathbb{H}^3) angegeben.

Allerdings ist hierbei etwas Sorgfalt geboten, wenn man diese zu einer Triangulierung von \mathbb{H}^3 bzw. $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^3$ für eine torsionsfreie Untergruppe $\Gamma_0 \subset \tilde{\Gamma}$ liften möchte, da die Triangulierung der Polyeder nicht kanonisch ist und mit der Triangulierung der (nach eventueller Identifikation) anliegenden Körper verträglich sein muß. Wir gehen bei unseren Beispielen so vor, daß wir gegebenenfalls einfach zu jedem der Polyeder diejenige Triangulierung hinzunehmen, die von der spiegelsymmetrischen Unterteilung der genannten Polygone herkommt, wodurch wir das Doppelte des Volumens von $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^3$ erhalten. Nur wenn eine Triangulierung der Mannigfaltigkeit $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^3$ (mit endlichem Volumen) vorliegt, können wir daraus (vgl. [Z2]) ein Element der Bloch-Gruppe (vgl. Kapitel II) konstruieren—was ja eines der Ziele dieser Arbeit darstellt.

Etwas komplizierter wird die Bestimmung der Triangulierung, wenn es nicht ausreicht, die Polyeder um den Punkt ∞ herauszufinden, also mehrere Eckfiguren zu bestimmen sind. Dann nämlich tauchen in der Pflasterung Polyeder auf, die wir erst durch eine Isometrie aus $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ in andere überführen müssen, die eine Ecke in ∞ haben, um so leicht eine Triangulierung zu sehen.

Auswertung

Zuletzt berechnen wir das Volumen der Tetraeder mit der Dilogarithmusfunktion: Die Projektion eines idealen Tetraeders mit Eckpunkt ∞ ist ein Dreieck, das wir ähnlich auf ein Dreieck in der oberen Halbebene von \mathbb{C} mit zwei Eckpunkten in 0 und 1 abbilden. Der dritte Eckpunkt z liefert uns das Argument für den Dilogarithmus (vgl. [N-Z], §5).

Die oben genannte Hinzunahme der "spiegelsymmetrischen" Triangulierung entspricht der Substitution $D(z) \mapsto D(z) + D(1 - \bar{z})$ für jedes der Tetraedervolumina.

Die gewisse Bedingung

Es reicht aus, die Hälfte einer Fundamentalmasche zu untersuchen, wenn die Polyeder in \mathbb{H}^3 so angeordnet sind, daß die Ebene durch $\infty, \frac{\omega}{2}, 1 + \frac{\omega}{2}$ keines von ihnen im Inneren schneidet. Diese Bedingung ist in unseren Beispielen—wie oben bereits erwähnt—für $d > 11$ erfüllt, für $d \leq 11$ ist eines der Polyeder so groß, daß es sich von der Ebene $y = 0$ zur Ebene $y = \Im(\omega)$ erstreckt (y der Imaginärteil der Koordinate z in \mathbb{C}).

Ein kurzes Plädoyer

Die Art der Bestimmung eines Fundamentalbereichs für $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$, die unser Verfahren beinhaltet, erscheint (zumindest für einen Computer) einfacher als diejenige von Bianchi (ausführlich beschrieben von Swan [Sw]), außerdem fallen kanonische Pflasterungen des \mathbb{H}^3 dabei ab (siehe hierzu das Beispiel am Ende dieses Kapitels und die Eckfiguren in Anhang 2). Man vergleiche auch die Arbeiten von Grunewald, Gushoff

und Mennicke [G-G-M] und von Hatcher [Ha], die dieselben Pflasterungen wie wir für kleine Diskriminanten auf andere Weise (gewissermaßen umgekehrt zu der Methode, wie wir von der Pflasterung zum Fundamentbereich kommen) erhalten.

Bezug zur geometrischen Zerlegung

Wegen Zagiers Satz

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(2) = \frac{\pi^2}{3d\sqrt{d}} \sum_{\text{endl}} n_i D(z_i) \quad \text{mit } z_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$$

samt dessen Beweis finden wir sofort nach einer idealen Triangulierung von \mathbb{H}^3 eine Zerlegung von $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ mit der Eigenschaft

$$(*) \quad 2 \sum n_i (z_i \wedge (1 - z_i)) = 0$$

(vgl. [Z2]). Der Faktor 2 kommt wegen der willkürlichen Auswahl eines Elementes aus $\{z, 1 - \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}\}$ ins Spiel. Auch die geometrische Zerlegung liefert also (mit Lemma 1, Kapitel IV) ein Element ξ_{geom} der Bloch-Gruppe $\mathcal{B}(K)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ (in $\mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$) entspricht die obige Spiegelsymmetrie-Substitution natürlich der Ersetzung $[z] \mapsto [z] + [1 - \bar{z}]$. Da die Dilogarithmuswerte von z und $1 - \bar{z}$ identisch sind, springt—wenn wir die Kombination ohne die dazu gespiegelte betrachten—im Falle $d > 11$ eine Zerlegung $\sum n_i D(z_i)$ mit $n_i \in \mathbb{Z}$ von $\zeta_K(2)$ heraus, für die oftmals gilt:

$$\sum n_i [z_i] \notin \widetilde{\mathcal{B}(K)}.$$

Im Falle $d = 40$ ergibt sich dadurch sogar eine Kombination, deren Dilogarithmuswert um den Faktor 2 kleiner ist als die beste auf algebraische Weise (sprich: wie in Kapitel II) gewonnene Kombination ξ_0 . Es ist klar, daß die Relation (*) noch nicht alle Linearkombinationen von Dilogarithmuswerten (mit Argumenten im vorgegebenen Körper) charakterisiert, welche ein rationales Vielfaches von $\zeta_K(2)\sqrt{d}/\pi^2$ darstellen. Man müßte, um eine solche Charakterisierung zu erreichen, zumindest noch die Relationen $[z] - [1 - \bar{z}]$ für $z \in K - \{0,1\}$ hinzunehmen. Dabei können sich ganzzahlige Kombinationen ergeben, die ein kleineres Vielfaches von $\zeta_K(2)$ liefern als die aus (*) entstehenden Relationen (ein Faktor 2 dürfte immer drin sein).

Im geometrischen Fall haben wir aufgrund des Zagierschen Satzes die Ganzzahligkeit von

$$(**) \quad \frac{\sum n_i D(z_i)}{\zeta_K(2) \cdot \frac{3d\sqrt{d}}{\pi^2}}$$

garantiert, im algebraischen Fall haben wir jedoch keine Nennerabschätzung.

Sei $\xi_0 \in \mathcal{B}(K)$ ein Element, das wir wie in Kapitel II auf algebraische Weise erhalten, für das $D(\xi_0)$ vermutlich ein Erzeugendes von $D(\mathcal{B}(K))$ ist, und ξ_{geom} dasjenige aus der geometrischen Untersuchung.

Wir sehen für die Diskriminanten 3, 4 und 7 sofort durch einen Vergleich der beiden Tabellen 3 und 4 in Anhang 4, daß sich ξ_0 aus ξ_{geom} durch Anwenden der Symmetrierelationen $2[z] - 2[1 - \frac{1}{z}]$, $2[z] - 2[\frac{1}{1-z}]$, $2[z] + 2[\frac{1}{z}]$ etc. ergibt. Können wir allgemein ein Vielfaches von ξ_0 aus ξ_{geom} durch Addition von 5-Term-Relationen konstruieren (die Symmetrierelationen fassen wir—mit der Konvention $[0] = [1] = [\infty] = 0$ —als Spezialfälle der Fünf-Term-Relation auf), so ist das gefundene Verhältnis (**) im algebraischen Fall definitiv der Wert in Tabelle 1 (Anhang 4).

Ansonsten bleibt an jenem Wert ein kleiner Makel, da er ja nur bis auf maximal 18 Stellen mit dem "wahren" Wert übereinstimmt. Allerdings wird jedermann annehmen, daß es der richtige ist [nur ein böser Dämon könnte uns lauter Werte q_i bescheren, so daß für den wahren Wert q gilt:

$$\frac{q_i}{q} > 10^{10}, \quad \text{und } \frac{q_i}{q} \in \mathbb{Z} \text{]}.$$

Mathematische Kurzfassung des Verfahrens und Details

Seien $\widehat{\mathbb{H}^3}$, H^+ , \mathcal{C} und Λ wie im Text, ebenso die Operation von $\tilde{\Gamma} = \text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ auf $\widehat{\mathbb{H}^3}$ bzw. $\text{SO}(f)$ auf H^+ (Genauerer zu den Operationen siehe den Anfang dieses Kapitels und Kapitel IV, Lemma 2 und Lemma 3), außerdem $K = \mathcal{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante von K .

$$\psi: \tilde{\Gamma} \longrightarrow \psi(\tilde{\Gamma}) \subset \text{SO}(f)^\circ$$

ist ein Gruppenisomorphismus und

$$\varphi: \mathcal{Q}(\sqrt{-d}) \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathcal{G} = \{ \text{grobgekürzte ganzzahlige Lösungen von } x^2 + dy^2 + z^2 = w^2 \}$$

ist eine $\tilde{\Gamma}$ -äquivalente Bijektion.

Epstein-Penner: Eine $\tilde{\Gamma}$ -invariante Pflasterung des hyperbolischen Raumes—mit idealen Polyedern—für die diskontinuierlich operierende Gruppe $\tilde{\Gamma}$ ergibt sich mittels der Bahnen $\tilde{\Gamma}s_i$ unter je einem Repräsentanten $s_i \in L^+$ der h Spitzen (h ist hier die Klassenzahl von $\mathcal{Q}(\sqrt{-d})$), L^+ der positive Lichtkegel von H^+ .

Wähle \mathcal{G} als diese Punktmenge $\bigcup \tilde{\Gamma}s_i$.

Bilde $\mathcal{C} =$ euklidische konvexe Hülle von \mathcal{G} .

Es gilt: $\tilde{\Gamma}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ und $\tilde{\Gamma}(\partial\mathcal{C}) = \partial\mathcal{C}$.

Projektion der Zerlegung des Randes auf das Kleinsche Modell D_1 liefert die gewünschte Pflasterung.

Wegen der $\tilde{\Gamma}$ -Invarianz der Pflasterung operiert $\tilde{\Gamma}$ auch auf der Menge der Polyeder. Wähle aus jeder Bahn einen Repräsentanten. Diese Repräsentanten (bzw. ihre Bilder in \mathbb{H}^3) umfassen zusammengenommen einen Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf \mathbb{H}^3 . Bestimme die Ordnung der Symmetriegruppe $\text{Sym}(P)$ dieser Polyeder P .

Berechne nun das Volumen V des Fundamentalbereichs. V setzt sich aus den Volumina der verschiedenen Fundamentalbereiche der Operation von $\text{Sym}(P)$ auf P zusammen, $24V$ läßt sich sogar als ganzzahlige Linearkombination der Polyeder-Volumina schreiben. Unterteile die Polyeder in (ideale) Tetraeder und berücksichtige, daß die Unterteilungen mit den Identifikationen unter $\tilde{\Gamma}$ verträglich sein müssen.

Nach Lobatschewski gilt (vgl. [Th1], Ch.7 und [N-Z]) für ein ideales hyperbolisches Tetraeder Δ (Def. von II und D siehe Kapitel II):

$$\text{Vol}(\Delta) = \text{JI}(\alpha) + \text{JI}(\beta) + \text{JI}(\gamma),$$

—dabei sind α, β, γ die Diederwinkel des Tetraeders—, oder, falls Δ isometrisch (also unter einem Element von $\text{PSL}(2, \mathcal{C})$) auf ein Tetraeder mit Eckpunkten $0, 1, \infty, z$ abgebildet wird, $z \in \mathcal{C}$:

$$\text{Vol}(\Delta) = D(z).$$

Zagier: Die obige Volumenbestimmung liefert—unter Berücksichtigung des in der Einführung erwähnten Satzes von Humbert—eine geometrische Zerlegung $\zeta_{\mathcal{Q}(\sqrt{-d})}(2) = \frac{\pi^2}{3d\sqrt{d}} \sum n_i D(z_i)$ mit $z_i \in \mathcal{Q}(\sqrt{-d})$, $n_i \in \mathbb{Z}$, und zwar gilt (bis auf 2-Torsion) auch die "Zauberrelation" $\sum n_i (z_i \wedge (1 - z_i)) = 0$ (siehe [Z2]).

Näheres zur Bestimmung der Pflasterung

Seien

$$\mathcal{G}_c = \mathcal{G} \cap \{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 \leq c \},$$

$$\underline{\infty} = (0, 0, 1, 1), \underline{0} = (0, 0, -1, 1), \underline{1} = (2, 0, 0, 2).$$

Wähle $\underline{x} \in \mathcal{G}_c$ so, daß $x_2 \geq 0$ [wegen der angestrebten Eckfigur], daß die affine Hülle von $\{ \underline{\infty}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{x} \}$ eine Hyperebene $\text{Hyp}_0 \in M^4$ und $E = \text{Hyp}_0 \cap H^+$ ein Ellipsoid in M^4 ist.

Setze $c_0 = \max_{\underline{x} \in E} x_4$,

erweitere \mathcal{G}_c zu \mathcal{G}_{c_0} , falls $c < c_0$.

Sei $\underline{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)$ Normalenvektor auf Hyp_0 mit $N_4 > 0$.

$s(\underline{y}) = \langle \underline{y} - \underline{\infty}, \underline{N} \rangle$ für $\underline{y} \in \mathcal{G}_{c_0}$. (\langle, \rangle steht für das Skalarprodukt in M^4 .)

Solange $s(\underline{y}) > 0$ für ein $\underline{y} \in \mathcal{G}_{c_0}$, ersetze \underline{x} durch \underline{y} in Hyp_0 und erneuere \underline{N} .

Schließlich setze (für das "optimale" N)

$$\text{Pol}_0 = \{ \underline{x} \in \mathcal{G}_{c_0} \mid \langle \underline{x} - \underline{\infty}, N \rangle = 0 \}.$$

Pol_0 bildet die Menge der Eckpunkte des ersten Polyeders \mathcal{P}_0 .

Seitenbestimmung

1) Seiten durch $\underline{\infty}$:

$\pi: \mathcal{C} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{C}$ sei die Projektion. Untersuche $\pi(\varphi(\mathcal{P}_0))$ auf Außenkanten: eine davon ist die (gerichtete) Kante durch 0 und 1, sie kommt von der Seite durch $\underline{0}, \underline{1}, \underline{\infty}$ (diese ist stets ein Dreieck) her, suche maximalen Winkel $\alpha = \angle(0, 1, \pi(\varphi(\underline{x})))$, $\underline{x} \in \text{Pol}_0$, und ordne alle $\underline{x}^i \in \text{Pol}_0$ mit $\angle(0, 1, \pi(\varphi(\underline{x}^i))) = \alpha$ nach der Größe des (euklidischen) Abstands ihres Bildes von 1, etwa $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n$. Die Seite ist dann durch $\underline{\infty}, \underline{1}, \underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n$ gegeben. Fahre fort mit Außenkante durch 1 und $\pi(\varphi(\underline{x}^n))$ anstelle von 0 und 1. Fertig, falls eine Außenkante wieder den Ausgangspunkt 0 enthält.

Damit sind alle Seiten $S_j \subset \mathcal{P}_0$ mit $\underline{\infty} \in S_j$ bestimmt.

2) Andere äußere Kanten von $\varphi(\mathcal{P}_0)$:

Die Geodätische durch 2 Punkte $g, h \in \mathbb{H}^3$ schreiben wir gh . Sei $\underline{x}_1 \underline{x}_2$ Kante in \mathcal{P}_0 (hier ist die Strecke zwischen \underline{x}_1 und \underline{x}_2 gemeint), untersuche alle $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{P}_0^2$ mit $I = \pi(\varphi(\underline{x}_1)\varphi(\underline{x}_2)) \cap \pi(\varphi(\underline{y}_1)\varphi(\underline{y}_2)) \neq \emptyset$ und $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}_1, \underline{y}_2$ nicht kollinear daraufhin, ob die Koordinate in Projektionsrichtung von $\pi^{-1}(I) \cap \varphi(\underline{y}_1)\varphi(\underline{y}_2)$ kleiner ist als diejenige von $\pi^{-1}(I) \cap \varphi(\underline{x}_1)\varphi(\underline{x}_2)$. Im letzteren Falle ist $\underline{x}_1 \underline{x}_2$ keine Außenkante von \mathcal{P}_0 . Diese Methode ist allerdings nur für eine kleine Eckenanzahl des Polyeders (≤ 30) zeitlich vertretbar.

3) Kanten zu Seiten, welche $\underline{\infty}$ nicht enthalten:

Ähnlich wie die Bestimmung der Seiten durch $\underline{\infty}$, nur daß diesmal minimale Winkel ($\neq 0$) betrachtet werden. Beginne wieder bei der (gerichteten) bekannten Kante (durch 0 und 1); wenn das Polygon geschlossen ist, nimm eine der Kanten in umgekehrter Reihenfolge als neue "bekannte Kante" her und verfähre analog. Fertig, wenn jede Kante in zwei Seiten von \mathcal{P}_0 aufgetreten ist.

Seitenidentifikation

Von jeder Seite S_i nimm drei aufeinanderfolgende (durch einen Kantenzug zweier Kanten verbundene) Eckpunkte e_1, e_2, e_3 her und vergleiche sie mit anderen solchen f_1, f_2, f_3 , und zwar nur von Seiten S_j mit derselben Eckenanzahl wie S_i (auch von S_i selbst). Dabei beachte Orientierung des Kantenzugs. Konstruiere die Identifikationsabbildung folgendermaßen:

Suche Matrix M , so daß $M: \Lambda^{-1}e_k \mapsto \Lambda^{-1}f_k$, $k = 1, 2, 3$, und daß für die Zeilen von $M = (m_{ij})$ —analog für die Spalten—gilt:

$$m_{i1}^2 + m_{i2}^2 + m_{i3}^2 - m_{i4}^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } i=1,2,3 \\ -1 & \text{für } i=4 \end{cases}.$$

Dies läßt maximal 16 Möglichkeiten für M zu. Falls für eine davon $M \in \text{SO}(3,1)^\circ$ gilt und das Urbild $\psi^{-1}(\Lambda M \Lambda^{-1})$ in $\tilde{\Gamma}$ liegt, so identifiziere S_i mit S_j (wegen der $\tilde{\Gamma}$ -Invarianz der Pflasterung genügt es, ein Teildreieck jeder Seite zu betrachten).

Verfahre analog bei der Bestimmung der Symmetriegruppe des Polyeders.

Das nächste Polyeder

Falls noch nicht alle Polyederseiten identifiziert sind, suche ein nicht identifiziertes $S = S_i$ mit $\underline{\infty} \in S$. Nimm eventuell sogar ein bereits identifiziertes S (mit $\underline{\infty} \in S$), sofern eine in der Projektion um ± 1 gegenüber S translatierte Seite sich nicht unter den bereits gesammelten befindet. Achte dabei noch darauf, daß der auf $\mathcal{C} \subset \partial\mathbb{H}^3$ projizierte Bereich der Eckfigur so gut wie möglich mit dem üblicherweise betrachteten Bereich in der Bianchi-Humbert-Theorie (vgl. Swan [Sw]) übereinstimmt.

Tausche $\underline{0}$ und $\underline{1}$ mit 2 Elementen aus $S - \{\underline{\infty}\}$ und wiederhole die Prozedur in analoger Weise. Berücksichtige dabei, wie man auf die "andere Seite" von S gelangt:

Hyp' sei die Hyperebene durch S und durch $\underline{x} + (0, 0, 0, 1)$ für ein $\underline{x} \in S$, N' ein Normalenvektor auf Hyp' , der mit allen Eckpunkten von \mathcal{P}_0 nichtpositives Skalarprodukt hat. Suche $\underline{x}' \in \mathcal{G}_c$ (evtl. c vergrößern) mit $\langle \underline{x}', N' \rangle > 0$, Hyp_1 sei die Hyperebene durch S und \underline{x}' .

Fahre nun mit Hyp_1 fort wie oben mit Hyp_0 .

Der Fundamentalbereich

Wähle eine Menge von idealen Polyedern P_1, \dots, P_n der Pflasterung, die unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$ inäquivalent sind, so daß

$$\mathbb{H}^3 = \bigcup_{k=1}^n \tilde{\Gamma} P_k.$$

Dann gilt für einen gewissen (nicht notwendig zusammenhängenden) Fundamentalbereich \mathcal{F} für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf \mathbb{H}^3 :

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^n P_k.$$

Definiere

$$\mathcal{F}' = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{F}(P_k),$$

$\mathcal{F}(P_k)$ Fundamentalbereich der Operation von $\text{Sym}(P_k)$, der Symmetriegruppe von P_k in $\tilde{\Gamma}$, auf P_k . \mathcal{F}' ist wieder ein Fundamentalbereich.

Wir bestimmen $\mathcal{F}(P_k)$:

Fall 1: $\text{Sym}(P_k)$ trivial. $P_k \subset \mathcal{F}'$.

Fall 2: $\text{Sym}(P_k) = \langle \gamma \rangle$ zyklisch. Verbinde zwei Fixpunkte unter $\text{Sym}(P_k)$ auf dem Rand von P_k durch Geodätische g , lege Ebene E durch g und einen weiteren Randpunkt (z.B. Eckpunkt).

$\mathcal{F}(P_k)$ ist der Durchschnitt von P_k mit zweien der Halbräume, die durch E und γE bestimmt werden.

Fall 3: $\text{Sym}(P_k)$ hat mindestens 2 Erzeugende. Seien III der Schwerpunkt und S_i die Seiten von P_k , bilde die Pyramiden $\rho_i =$ konvexe Hülle von III und S_i , also $P_k = \bigcup \rho_i$, entnehme jeder $\text{Sym}(P_k)$ -Bahn eine Pyramide ρ_j und untersuche diese auf "Torsion": wähle ein Element $\gamma \in \text{Sym}(P_k)$ maximaler Ordnung mit $\gamma \rho_j = \rho_j$ und entnehme ρ_j einen Fundamentalbereich für die Operation von $\langle \gamma \rangle$; dies ist $\mathcal{F}(P_k)$.

Das Beispiel $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$

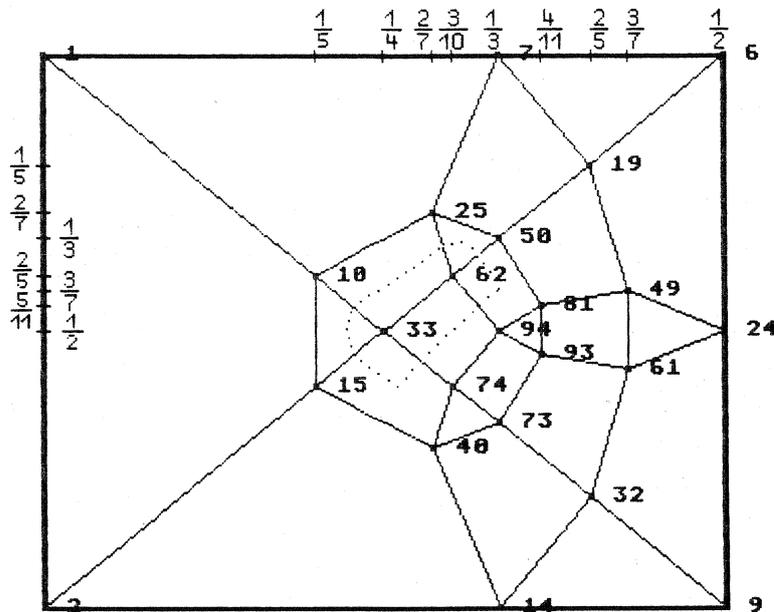
Die Pflasterung

Es stellt sich heraus, daß es bequemer ist, mit dem quadratfreien Anteil $d = 6$ der Diskriminante 24 zu arbeiten. Wir erhalten als Eckpunkte des ersten Polyeders die folgenden 24 Punkte (x, y, z, w) , die also grobgekürzte Lösungen der Gleichung $x^2 + 6y^2 + z^2 = w^2$ sind. Wir geben ihnen eine gewisse Numerierung, um sie in der nachfolgenden Zeichnung wiederzufinden:

0:(0, 0, 1, 1)	1:(0, 0,-1, 1)	2:(2, 0, 0, 2)	6:(0, 2, 1, 5)
7:(0, 2,-1, 5)	9:(4, 2, 3, 7)	10:(4, 2,-3, 7)	14:(6, 2, 2, 8)
15:(6, 2,-2, 8)	19:(2, 4, 0,10)	24:(4, 4, 3,11)	25:(4, 4,-3,11)
32:(8, 4, 3,13)	33:(8, 4,-3,13)	40:(10, 4, 0,14)	49:(6, 6, 2,16)
50:(6, 6,-2,16)	61:(8, 6, 3,17)	62:(8, 6,-3,17)	73:(12, 6, 1,19)
74:(12, 6,-1,19)	81:(10, 8, 0,22)	93:(12, 8, 1,23)	94:(12, 8,-1,23)

Addiert man den n -ten und $(25 - n)$ -ten Vektor dieser Aufzählung (nicht mit der Numerierung zu verwechseln), so erkennt man, daß sich stets derselbe Vektor als Summe ergibt. Wir erläutern dies weiter unten.

Es ergibt sich das folgende Bild:



Wir bemerken 22 Seiten in der Draufsicht, hinzu kommen 4 Seiten, die den Punkt ∞ "enthalten" (auch wenn wir nur mit idealen Polyedern arbeiten, so ist doch klar, was mit dieser saloppen Ausdrucksweise gemeint ist).

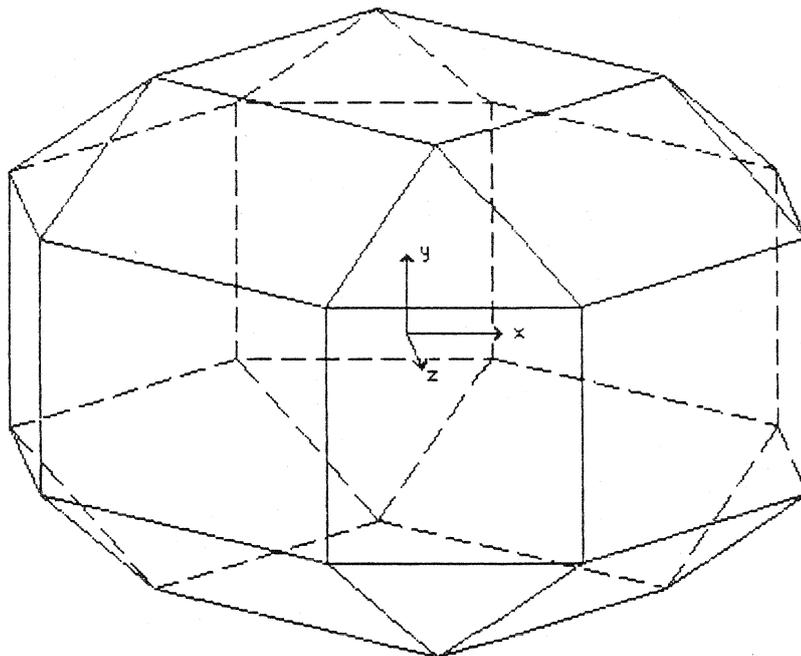
Stellt man sich diese letzteren 4 Seiten nach außen geklappt vor, so kann man das entstandene Gebilde als Faltbogen für ein Polyeder \mathcal{P} betrachten, der an den eingezeichneten Kanten vorgefalzt ist. Je weiter eine Seite im Innern liegt, desto tiefer wird sie im zusammengefalteten Polyeder zu liegen kommen. Man kann beispielsweise so vorgehen:

Um das "innerste" Viereck (mit den Eckpunkten 62,33,74,94 in der obigen Numerierung) liegt ein Ring mit abwechselnd 3- und 4-Ecken, darüber ein Ring mit 4-Ecken, darüber wieder ein Ring mit 3- und 4-Ecken und "ganz oben" noch ein Viereck. Das Polyeder sieht also kombinatorisch aus wie ein kleines Rhombikuboktaeder; es ist eckenregulär (es gibt je eine Isometrie, die das Polyeder in sich überführt und dabei eine Ecke

in eine beliebige andere transformiert), doch die Kanten sind nicht kongruent (die Kanten der Dreiecke sind $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mal so lang wie die übrigen Kanten). Wir werden es im folgenden trotzdem Rhombikuboktader nennen. Wir transformieren das Polyeder in die Hyperebene $x_4 = 1$ mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten für die neuen Koordinaten $\xi, \eta, \zeta, 1$, daß $\xi^2 + 2\eta^2 + \zeta^2 = 12$. Das Polyeder hat darin folgende Gestalt:



Der Schwerpunkt ist $(6,4,0,12)$, er entspricht in \mathbb{H}^3 dem Punkt $(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{\sqrt{12}})$.

Die Seiten können unter $\tilde{\Gamma}$ folgendermaßen identifiziert werden (wir betrachten hierzu unser euklidisches Bild):

- eine Dreiecksseite Δ mit sich selbst oder mit einer derjenigen drei anderen Dreiecksseiten Δ' , für die $S \cap (\Delta \cup \Delta')$ für keine andere Seite S des Polyeders aus zwei Kanten besteht.
- eine Vierecksseite mit sich selbst oder mit einer der 5 bzw. 11 dazu kongruenten Vierecksseiten.

Da die Seiten paarweise identifiziert werden können, haben wir die Pflasterung bereits bestimmt: es ist eine Pflasterung mit lauter kleinen Rhombikuboktäedern.

Die Symmetriegruppe des Polyeders in $\tilde{\Gamma}$ hat die Ordnung 12 (sie wird erzeugt durch die Drehungen des Polyeders \mathcal{P} , die eine Dreiecksseite festlassen), die volle (orientierungserhaltende) Symmetriegruppe des Rhombikuboktäeders ist aber von der Ordnung 24. Es gibt außerdem nach dem Beweis von Lemma 3 (Kapitel IV) eine größere Symmetriegruppe der Pflasterung: sei nämlich $SO(f')$ die spezielle orthogonale Gruppe der quadratischen Form

$$f'(\underline{x}) = x_1^2 + 6x_2^2 + x_3x_4,$$

also $M \in SO(f') \Leftrightarrow M^T F M = F$, wobei F die f' zugeordnete Matrix bezeichnet. Dann ist $SO(f')^\circ \cap M_4(\mathbb{Z})$ —mit der Matrix $\text{diag}(1, \frac{1}{2}, 1, 1)K$ konjugiert— die genaue orientierungserhaltende Symmetriegruppe der konvexen Hülle \mathcal{C} , also auch der Pflasterung (wegen K vgl. Lemma 3, Kapitel IV). Auf $SL(2, \mathbb{C})$ übertragen

ergibt dies die Gruppe

$$\tilde{\Gamma} = \left(\text{SL}(2, \mathcal{O}_{24}) \rtimes \left\langle \left(\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right) \right\rangle \right) \rtimes \left\langle \left(\begin{array}{cc} -2\sqrt{2} + i\sqrt{3} & 2\sqrt{2} + i\sqrt{3} \\ 2i\sqrt{3} & 2\sqrt{2} - i\sqrt{3} \end{array} \right) \right\rangle$$

bzw. die entsprechende projektive Gruppe $P\tilde{\Gamma}$, da diese die volle (orientierungserhaltende) Symmetriegruppe des obigen (ersten) Polyeders enthält und außerdem transitiv auf den Spitzen operiert. Unser Isomorphismus ψ (s. Anfang des Kapitels) induziert also einen Isomorphismus zwischen $P(\text{SO}(f)^\circ \cap M_4(\mathbb{Z}))$ und $P\tilde{\Gamma}$. Wir erkennen $P\tilde{\Gamma}$ wieder als die erweiterte Bianchi-Gruppe bzw. als die Hurwitz-Maaßsche Erweiterung (vom Grad 4) von $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_{24})$, d.h. als $\text{PSL}(2, \overline{\mathbb{Z}}) \cap \text{PGL}(2, \mathbb{Q}(\sqrt{-6}))$. Diese ist somit die "richtige" (orientierungstreue) Pflasterungsgruppe.

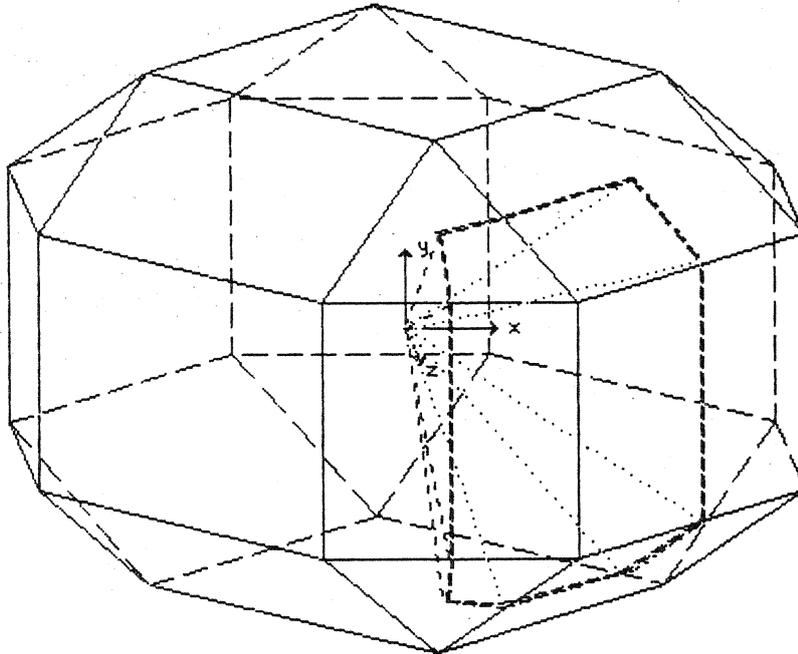
Wir können auch, wenn wir $z = -2\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ setzen, die angegebene Matrix als $Z = \begin{pmatrix} z & -\bar{z} \\ z - \bar{z} & -z \end{pmatrix}$ schreiben. Sie hat die Ordnung 2 in $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ und operiert auf $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathcal{O}_{24})$ durch Konjugation.

Geometrisch dreht Z das Rhombikuboktaeder um die Achse durch die Mittelpunkte der beiden Rhomben $\diamond(7, 25, 50, 19)$ und $\diamond(14, 32, 73, 40)$, und zwar um 180° , überführt also das Dreieck $(0, 1, 2)$ in das Dreieck $(94, 81, 93)$ (wir beziehen uns bei den Winkeln und den Rhomben auf das entsprechende euklidische Bild).

Der Fundamentalbereich

Wir geben einen Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma} = \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathcal{O}_{24})$ durch die Zusammensetzung von Pyramiden an—für die Identifikation beachten wir, daß die Drehungen des Polyeders \mathcal{P} , die eine Dreiecksseite festlassen, die Symmetriegruppe erzeugen:

Wir bezeichnen mit III den Schwerpunkt von \mathcal{P} , die Numerierung der Kanten sei wie oben, dann betrachten wir die Pyramiden mit Basispunkt III und Grundseiten $\diamond(10, 33, 62, 25)$, $\diamond(33, 74, 94, 62)$, $\diamond(62, 94, 81, 50)$, $\diamond(33, 15, 40, 74)$, $\triangle(25, 62, 50)$, $\triangle(10, 15, 33)$. Von den ersten beiden Vierecken nehmen wir die Hälfte, von den nächsten zweien ein Viertel, von den Dreiecken schließlich ein Drittel, so daß wir in der obigen Projektion den gepunkteten Bereich erhalten. Die hyperbolische konvexe Hülle von diesem Bereich und III ist das gesuchte Fundamentalgebiet. Euklidisch sieht der Bereich innerhalb des Rhombikuboktaeders folgendermaßen aus:



Etwas unschön ist dabei, daß eine (größere) Seite mit 2 (kleineren) Seiten identifiziert werden muß. Dafür sieht man die Identifikation "mit bloßem Auge" (Drehungen von \mathcal{P}).

Für $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathcal{O}_{24})$ besteht ein Fundamentalbereich aus zwei von diesen eben konstruierten Gebilden, ein Fundamentalgebiet einer torsionsfreien Untergruppe von Γ mit endlichem Index (z.B. die volle Kongruenzuntergruppe $\Gamma(n)$, $n > 3$) läßt sich aus einer endlichen Anzahl von kleinen Rhombikuboktaedern zusammensetzen.

Wie angekündigt noch ein paar Worte zu dem Phänomen, daß die (Vektor-)Summe von gewissen Paaren der 24 Punkte denselben Vektor ergibt. Diese Punktepaare bestehen aus 2 Punkten, die auf dem Polyeder einander diametral gegenüberliegen (bezüglich der Umsphäre). Die Bezeichnungen seien wie zu Anfang des Kapitels.

Bemerkung : Sei d quadratfrei, $Hyp \in M^4$ eine Hyperebene, die den negativen Lichtkegel L^- nicht schneidet, und $\underline{N} = \underline{N}(Hyp)$ ein Normalenvektor von Hyp . Dann gilt:

a) Für $\underline{i} \in Hyp$, $\underline{x} \in L^+ \cap Hyp$:

$$2\underline{N} - \underline{x} \in L^+ \cap Hyp \iff \langle \underline{N}, \underline{N} \rangle = \langle \underline{N}, \underline{x} \rangle = \langle \underline{N}, \underline{i} \rangle = N_3 - N_4.$$

b) Für $\{\underline{i}, \underline{0}, \underline{1}\} \in Hyp$, $\underline{x} \in L^+ \cap Hyp$:

$$2\underline{N} - \underline{x} \in L^+ \cap Hyp \iff \underline{N} = \left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda(3\lambda-2)}{d}}, 0, 2\lambda \right) \text{ für ein } \lambda > \frac{2}{3}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Für $\{\underline{i}, \underline{0}, \underline{1}\} \in Hyp$ und Hyp eine Stützhyperebene von \mathcal{C} , $\underline{x} \in \mathcal{G} \cap Hyp$:

$$2\underline{N} - \underline{x} \in \mathcal{G} \cap Hyp \iff \underline{N} = \left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda(3\lambda-2)}{d}}, 0, 2\lambda \right) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]^4.$$

Beweis : a) "⇐" Es gelte $\langle \underline{N}, \underline{N} \rangle = \langle \underline{N}, \underline{x} \rangle = \langle \underline{N}, \underline{i} \rangle = N_3 - N_4$.

Dann ist zu zeigen: $\langle \underline{N}, 2\underline{N} - \underline{x} - \underline{i} \rangle = 0$, $\langle 2\underline{N} - \underline{x}, 2\underline{N} - \underline{x} \rangle = 0$ und $2N_4 - x_4 > 0$.

Die beiden ersten Gleichungen sind trivial nachzurechnen, $2N_4 - x_4 > 0$ folgt wegen $Hyp \cap L^- = \emptyset$.

"⇒" Es gelte $2\underline{N} - \underline{x} \in L^+ \cap Hyp$.

Wegen $\langle (2\underline{N} - \underline{x}) - \underline{x}, \underline{N} \rangle = 0$ gilt $\langle \underline{N}, \underline{N} \rangle = \langle \underline{N}, \underline{x} \rangle$.

b) $\langle \underline{i} - \underline{0}, \underline{N} \rangle = \langle \underline{i} - \underline{1}, \underline{N} \rangle = 0 \Rightarrow \underline{N} = (\lambda, N_2, 0, 2\lambda)$. Mit a) folgt $N_2^2 = \frac{\lambda(3\lambda-2)}{d}$.

c) Hyp Stützhyperebene von \mathcal{C} : $\iff Hyp \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ und \mathcal{C} liegt in einem der beiden Halbräume, die von Hyp berandet werden.

"⇒" Wenn mit \underline{x} auch $2\underline{N} - \underline{x}$ in $\mathcal{G} \cap Hyp$ liegt, so muß $2\underline{N} \in \mathbb{Z}^4$ gelten.

"⇐" Hat \underline{N} obige Gestalt, so folgt aus b), daß $2\underline{N} - \underline{x}$ immerhin in $L^+ \cap Hyp$ liegt, wegen $2\underline{N} - \underline{x} \in \mathbb{Z}^4$ folgt sogar $2\underline{N} - \underline{x} \in \mathcal{G}$, da Hyp Stützhyperebene [sonst läge auf beiden Seiten ein Punkt von \mathcal{G}].

Im Falle $d = 6$ gilt $3d - 2 = 4^2$, das "Phänomen" der Punktepaare ist also etwas näher beleuchtet (das Polyeder liegt nach unserer Computerrechnung auf dem Rand, "der" Normalenvektor dazu hat die Gestalt $\underline{N} = (6, 4, 0, 12)$).

(Beispiel für $d \neq \lambda$: $d = 10$, $\lambda = 4$.)

Kapitel IV Vier Lemmas*

Lemma 1: Seien K algebraischer Zahlkörper, $F \subset K^\times$ mit $1 \in F$, $F \cup -F = K^\times$, $F \cap -F = \emptyset$,
 $\lambda : \mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})} \rightarrow \wedge^2(K^\times)$ der durch $[z] \mapsto z \wedge (1-z)$ eindeutig bestimmte Homomorphismus.

Für $z \in K - \{0, 1\}$ hat eines der vier Elemente

$$\xi = [z], \left[1 - \frac{1}{z}\right], \left[\frac{1}{1-z}\right], \left[z - \left[1 - \frac{1}{z}\right] + \left[\frac{1}{1-z}\right]\right]$$

die Eigenschaft

$$\lambda(\xi) = a \wedge b, \quad a, b \in F, \quad a = \pm z, b = \pm(1-z).$$

Insbesondere gilt:

$$2\lambda(\xi) = 2\lambda(z),$$

$$D(\xi) = D(z).$$

Beweis: Sei $z = (-1)^\delta a$, $1-z = (-1)^\varepsilon b$, mit $a, b \in F$, $\delta, \varepsilon \in \{0, 1\}$.

Wir setzen im Falle

$$(\delta, \varepsilon) = (0, 0): \quad \xi = [z],$$

$$(\delta, \varepsilon) = (0, 1): \quad \xi = \left[1 - \frac{1}{z}\right],$$

$$(\delta, \varepsilon) = (1, 0): \quad \xi = \left[\frac{1}{1-z}\right],$$

$$(\delta, \varepsilon) = (1, 1): \quad \xi = [z] - \left[1 - \frac{1}{z}\right] + \left[\frac{1}{1-z}\right].$$

Es gilt jedesmal:

$$\lambda(\xi) = a \wedge b \quad \text{und} \quad D(\xi) = D(z).$$

Letzteres gilt wegen der Symmetrierelationen für den Dilogarithmus.

Wir rechnen ersteres für $(\delta, \varepsilon) = (1, 1)$ nach:

$$\lambda(\xi) = z \wedge (1-z) - \left(1 - \frac{1}{z}\right) \wedge \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{1-z}\right) \wedge \left(1 - \frac{1}{1-z}\right)$$

$$= -a \wedge -b - \frac{b}{-a} \wedge \frac{1}{-a} + \frac{1}{-b} \wedge \frac{a}{-b}$$

$$= a \wedge b + -1 \wedge b + -1 \wedge a + b \wedge a + b \wedge -1 - b \wedge a + -1 \wedge a = a \wedge b.$$

Den Rest verifiziert man leicht.

Korollar: Seien K algebraischer Zahlkörper mit $\sqrt{-1} \notin K$, $\mathcal{B}(K)$ die zugehörige Bloch-Gruppe, $\widetilde{\mathcal{B}}(K)$ die "doppelte" Bloch-Gruppe (Def. vgl. Kapitel II). Dann ist die natürliche Abbildung

$$\mathcal{B}(K) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}(K)$$

surjektiv und D faktorisiert über $\widetilde{\mathcal{B}}(K)$.

Beweis: $\sqrt{-1} \notin K \Rightarrow$ es existiert eine 2-torsionsfreie Untergruppe F von K^\times , so daß $K^\times = \langle -1 \rangle \times F$ (die Torsion in K^\times ist eine zyklische Gruppe der Ordnung $\equiv 2 \pmod{4}$).

Nach Lemma 1 gilt: Zu (einem Repräsentanten) $\eta = \sum n_i [z_i] \in \widetilde{\mathcal{B}}(K)$ erhalten wir ein Element $\xi = \sum m_j [w_j] \in \mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$ mit $\lambda(\xi) = \sum a_i \wedge b_i$, $a_i, b_i \in F$, also $\lambda(\xi) \in \wedge^2(F)$, und $D(\xi) = D(\eta)$ sowie $2\lambda(\xi) = 2\lambda(\eta)$.

Wegen $2\lambda(\eta) = 0$ folgt $2\lambda(\xi) = 0$, aber weil F 2-torsionsfrei angenommen wurde, ist auch $\wedge^2(F)$ 2-torsionsfrei, also $\lambda(\xi) = 0$. Es folgt $\xi \in \mathcal{B}(K)$.

* Dies scheint die richtige Pluralbildung zu sein; ein palindramatischer Beleg hierfür ist der Schlußsatz dieses Kapitels

Lemma 2: Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante von K , $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

$$A = \rho^2(a_1c_1 + a_2c_2) + \xi(a_1d_1 + b_1c_1 + a_2d_2 + b_2c_2) + \eta(a_1d_2 + b_2c_1 - a_2d_1 - b_1c_2) + b_1d_1 + b_2d_2$$

$$B = \rho^2(a_2c_1 - a_1c_2) + \xi(a_2d_1 + b_2c_1 - a_1d_2 - b_1c_2) + \eta(a_1d_1 - b_2c_2 + a_2d_2 - b_1c_1) + b_2d_1 - b_1d_2$$

$$N = \rho^2(c_1^2 + c_2^2) + 2\xi(c_1d_1 + c_2d_2) + 2\eta(c_1d_2 - c_2d_1) + d_1^2 + d_2^2.$$

Sei φ die Isometrie aus Kapitel III und auch die Operation von $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ wie dort beschrieben. Dann gilt:

$$(\xi + i\eta, \zeta) \in \mathbb{H}^3 \longmapsto \left(\frac{A}{N} + i\frac{B}{N}, \frac{\zeta}{N} \right) \in \mathbb{H}^3$$

und es gibt einen Gruppenisomorphismus $(f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$

$$\psi: \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{SO}(f)^\circ,$$

so daß das folgende Diagramm (für alle M) kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^3 & \xrightarrow{M} & \mathbb{H}^3 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H^+ & \xrightarrow{\psi(M)} & H^+ \end{array}$$

und speziell

$$\begin{array}{ccc} (\xi + i\eta, \zeta) & \xrightarrow{M} & \left(\frac{A}{N} + i\frac{B}{N}, \frac{\zeta}{N} \right) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta\sqrt{d}}, \frac{\rho^2 - 1}{2\zeta}, \frac{\rho^2 + 1}{2\zeta} \right) & \xrightarrow{\psi(M)} & \left(\frac{A}{\zeta}, \frac{B}{\zeta\sqrt{d}}, \frac{A^2 + B^2 + \zeta^2 - N^2}{2\zeta N}, \frac{A^2 + B^2 + \zeta^2 + N^2}{2\zeta N} \right) \end{array}$$

Beweis : Wir konstruieren uns zu M einfach jene Matrix $\psi(M) \in \text{M}_4(\mathbb{R})$, die das Diagramm kommutativ macht. Es ergibt sich für die vorgegebene Diskriminante d , (wenn wir die Vektoren als Spaltenvektoren auffassen, damit $\psi(M)$ von links operiert):

$$\psi(M) = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,4} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= a_1d_1 + b_1c_1 + a_2d_2 + b_2c_2 \\ m_{21} &= (a_2d_1 + b_2c_1 - a_1d_2 - b_1c_2)/\sqrt{d} \\ m_{31} &= a_1b_1 + a_2b_2 - c_1d_1 - c_2d_2 \\ m_{41} &= a_1b_1 + a_2b_2 + c_1d_1 + c_2d_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= (a_1d_2 + b_2c_1 - a_2d_1 - b_1c_2)\sqrt{d} \\ m_{22} &= a_1d_1 - b_1c_1 + a_2d_2 - b_2c_2 \\ m_{32} &= (a_1b_2 - a_2b_1 - c_1d_2 + c_2d_1)\sqrt{d} \\ m_{42} &= (a_1b_2 - a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)\sqrt{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{13} &= a_1c_1 + a_2c_2 - b_1d_1 - b_2d_2 \\ m_{23} &= (a_2c_1 - a_1c_2 - b_2d_1 + b_1d_2)/\sqrt{d} \\ m_{33} &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 - c_1^2 - c_2^2 + d_1^2 + d_2^2) \\ m_{43} &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - d_1^2 - d_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{14} &= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 \\ m_{24} &= (a_2c_1 - a_1c_2 + b_2d_1 - b_1d_2)/\sqrt{d} \\ m_{34} &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - c_1^2 - c_2^2 - d_1^2 - d_2^2) \\ m_{44} &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + d_1^2 + d_2^2). \end{aligned}$$

Bis auf Konjugation mit $\text{diag}(1, \sqrt{d}, -1, 1)$ erhalten wir gerade diejenige Matrix, die Miller ([M], Ch.8) für den Isomorphismus ψ von $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\text{SO}(3, 1)^\circ$ konstruiert.

Lemma 3: Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $-d$ die Diskriminante von K , ψ wie in Lemma 2. Jede Matrix aus $\psi(\tilde{\Gamma})$ führt die Menge der grobgekürzten (Def. siehe Kapitel III) Lösungen $(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}^4$ von

$$(0) \quad x^2 + dy^2 + z^2 = w^2$$

in sich über.

Beweis : Setze

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ falls } d \equiv 0(4), \quad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ falls } d \equiv 3(4).$$

Wir bemerken:

a) Eine grobgekürzte Lösung $\underline{x} = (x, y, z, w)$ von (0) entspricht unter der Abbildung $\underline{x} \mapsto \underline{x}K$ einem 4-Tupel $(A, B, C, D) \in \mathbb{Z}^4$ mit $f'(A, B, C, D) = 0$, wobei

$$(1) \quad f'(A, B, C, D) = A^2 + \left(\frac{d}{4}\right)B^2 + CD, \quad \text{falls } d \equiv 0 \pmod{4},$$

$$(2) \quad f'(A, B, C, D) = AB + \left(\frac{d+1}{4}\right)(A-B)^2 + CD, \quad \text{falls } d \equiv 3 \pmod{4}.$$

Dabei gilt wegen der Grobgekürztheit des Ausgangstupels, daß (A, B, C, D) primitiv ist, also $\text{ggT}(A, B, C, D) = 1$.

b) Einem ganzzahligen primitiven 4-Tupel (A, B, C, D) , welches (1) oder (2) erfüllt, entspricht —unter K^{-1} —andererseits eines der Form

$$(x, y, z, w) = (2A, B, C + D, C - D), \quad \text{falls } d \equiv 0 \pmod{4},$$

$$(x, y, z, w) = (A + B, A - B, C + D, C - D), \quad \text{falls } d \equiv 3 \pmod{4},$$

mit $x^2 + dy^2 + z^2 - w^2 = 0$, und es gilt (x, y, z, w) grobgekürzt:
 p teile $\text{ggT}(x, y, z, w)$.

$d \equiv 0(4)$: $p|2A, B, 2C, 2D \Rightarrow p|2$. Sei $p = 2 (\Rightarrow 2|B)$.

Ann.: $2|C \Rightarrow 2|D, 2 \nmid A \Rightarrow A^2 + \left(\frac{d}{4}\right)B^2 + CD \equiv 1(4)$. Widerspruch.

Also $2 \nmid C \Rightarrow 2 \nmid D \Rightarrow z - w = 2D \equiv 2(4)$.

$d \equiv 3(4)$: $p|2A, 2B, 2C, 2D \Rightarrow p|2$. Sei $p = 2$.

Ann.: $2|D \Rightarrow 2|C, 2 \nmid A, 2 \nmid B \Rightarrow AB + \left(\frac{d+1}{4}\right)(A-B)^2 + CD \equiv AB \not\equiv 0(4)$. Widerspruch.

Also $2 \nmid D \Rightarrow z - w = 2D \equiv 2(4)$.

Es bleibt zu zeigen, daß die primitiven 4-Tupel (A, B, C, D) mit (1) resp. (2) unter $K\psi(M)K^{-1}$ für alle $M \in \tilde{\Gamma}$ in ebensolche übergehen, d.h.

$$K^{-1}\text{SO}(f')K \supset \psi(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathcal{O}_d)).$$

Zunächst folgt aus der Tatsache, daß eine Lösung von (0) unter $\psi(M)$ in eine weitere Lösung von (0) übergeführt wird (Lemma 2), daß Analoges für Lösungen von (1) resp. (2) unter $K\psi(M)K^{-1}$ gilt.

Im folgenden verwenden wir folgende Kurznotation:

Bezeichnung : Für $x, y \in \mathcal{O}_d$, $x = x_1 + x_2\sqrt{-d}$, $y = y_1 + y_2\sqrt{-d}$, $x_i, y_i \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ schreiben wir

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + dx_2y_2 = \Re(x\bar{y}),$$

$$[x, y] := x_2y_1 - x_1y_2 = \Im(x\bar{y})/\sqrt{d}.$$

$$\text{Sei } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-d} & \beta_1 + \beta_2\sqrt{-d} \\ \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{-d} & \delta_1 + \delta_2\sqrt{-d} \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathcal{O}_d).$$

Behauptung: $\widetilde{M} = K\psi(M)K^{-1} \subset \text{SL}(4, \mathbb{Z})$.

Beweis: Im Falle $d \equiv 0(4)$ ist

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \langle \alpha, \delta \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle & (-[\alpha, \delta] + [\beta, \gamma]) \frac{d}{2} & \langle \alpha, \gamma \rangle & \langle \beta, \delta \rangle \\ 2([\alpha, \delta] + [\beta, \gamma]) & \langle \alpha, \delta \rangle - \langle \beta, \gamma \rangle & 2[\alpha, \gamma] & -2[\beta, \delta] \\ 2 \langle \alpha, \beta \rangle & -[\alpha, \beta]d & \langle \alpha, \alpha \rangle & -\langle \beta, \beta \rangle \\ -2 \langle \gamma, \delta \rangle & [\gamma, \delta]d & -\langle \gamma, \gamma \rangle & \langle \delta, \delta \rangle \end{pmatrix},$$

was offensichtlich in $M_4(\mathbb{Z})$ liegt.

Im Falle $d \equiv 3(4)$ ist

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \langle \alpha, \delta \rangle + [\alpha, \delta] + (\frac{d+1}{2})(-[\alpha, \delta] + [\beta, \gamma]) & \langle \beta, \gamma \rangle - [\beta, \gamma] + (\frac{d+1}{2})(-[\alpha, \delta] + [\beta, \gamma]) & \langle \alpha, \gamma \rangle + [\alpha, \gamma] & -(\langle \beta, \delta \rangle + [\beta, \delta]) \\ \langle \beta, \gamma \rangle + [\beta, \gamma] - (\frac{d+1}{2})(-[\alpha, \delta] + [\beta, \gamma]) & \langle \alpha, \delta \rangle - [\alpha, \delta] - (\frac{d+1}{2})(-[\alpha, \delta] + [\beta, \gamma]) & \langle \alpha, \gamma \rangle - [\alpha, \gamma] & -(\langle \beta, \delta \rangle - [\beta, \delta]) \\ \langle \alpha, \beta \rangle + [\alpha, \beta] - (d+1)[\alpha, \beta] & \langle \alpha, \beta \rangle - [\alpha, \beta] + (d+1)[\alpha, \beta] & \langle \alpha, \alpha \rangle & -\langle \beta, \beta \rangle \\ -\langle \gamma, \delta \rangle - [\gamma, \delta] + (d+1)[\gamma, \delta] & -\langle \gamma, \delta \rangle + [\gamma, \delta] - (d+1)[\gamma, \delta] & -\langle \gamma, \gamma \rangle & \langle \delta, \delta \rangle \end{pmatrix}.$$

Wir haben zu zeigen:

$$\langle x, y \rangle \pm [x, y] \in \mathbb{Z}, \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{für} \quad x, y \in \mathcal{O}_d.$$

Es gilt $2x_1, 2x_2 \in \mathbb{Z}$ und $2x_1 \equiv 2x_2 \pmod{2}$ sowie

$$\langle x, x \rangle = x\bar{x} = N(x) \in \mathbb{Z},$$

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2d = x_1y_1 - x_2y_2 + (d+1)x_2y_2 = \frac{1}{4}(2x_12y_1 - 2x_22y_2) + (\frac{d+1}{4})2x_22y_2 \quad \text{und}$$

$$[x, y] = x_2y_1 - x_1y_2 = \frac{1}{4}(2x_22y_1 - 2x_12y_2), \quad \text{also}$$

$$\langle x, y \rangle \pm [x, y] = \frac{1}{4}(2x_1 \pm 2x_2)(2y_1 \mp 2y_2) + (\frac{d+1}{4})2x_22y_2 \in \mathbb{Z}, \quad \text{da} \quad d \equiv 3 \pmod{4}.$$

Es folgt sofort $2\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$, $2[x, y] \in \mathbb{Z}$, womit wir uns überzeugt haben, daß \widetilde{M} in $M_4(\mathbb{Z})$ liegt.

Die Determinante der Matrix \widetilde{M} ist 1, da $\psi(M) \in \text{SO}(f')^0$. Somit hat das Bild einer Lösung (A, B, C, D) mit (3) auch nur den größten gemeinsamen Teiler 1.

Der Beweis funktioniert ganz analog für $M \in \text{PSL}(\widetilde{2}, \mathcal{O}_d) - \text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$; wir erinnern daran, daß das zusätzliche Element X der Diagonalmatrix $\text{diag}(-1, -1, 1, 1)$ entspricht.

Lemma 4: Seien die Bezeichnungen wie in Lemma 2, \mathcal{G} die Menge der grobgekürzten Lösungen von (0).

Wir erhalten durch stetige Fortsetzung von φ nach $\widehat{\mathbb{H}}^3$ und der stetigen Operation von $M \in \widetilde{\Gamma}$ nach $\widehat{\mathbb{H}}^3$ ein weiteres kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\partial\mathbb{H}}^3 & \xrightarrow{M} & \widehat{\partial\mathbb{H}}^3 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi(M)} & \mathcal{G} \end{array}.$$

Beweis: Aus dem kommutativen Diagramm von Lemma 2 erhalten wir durch stetige Fortsetzung, daß die Kommutativität zumindest für die Geradenrichtungen anstelle der Punkte \mathcal{G} erfüllt ist, wenn wir $\widehat{\partial\mathbb{H}}^3$ durch φ (derselbe Notationsmißbrauch wie in Kapitel III) in die Menge der Geradenrichtungen abbilden. Mit Lemma 3 folgt die Behauptung.

— S A M M E L T L E M M A S ! —

Anhang 1 Eine Identität

Lewin [Le2] vermutete folgende Gleichung:

Sei $\theta = 2 \cos \frac{4\pi}{9}$, also

$$(0) \quad \theta^3 - 3\theta + 1 = 0$$

Dann gilt:

$$3\text{Li}_2(-\theta) + 3\text{Li}_2(\theta^2) - \text{Li}_2(-\theta^3) = -\frac{\pi^2}{18}.$$

Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{Q}(\theta))$ die in Kapitel II definierte Bloch-Gruppe von $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Man prüft sofort nach, daß

$$\xi = 3[-\theta] + 3[\theta^2] - [-\theta^3] \in \mathcal{B}(\mathbb{Q}(\theta)).$$

Da $\mathbb{Q}(\theta)$ total-reell ist (die beiden anderen Wurzeln von (0) sind $2 \cos \frac{2\pi}{9}$ und $-2 \cos \frac{\pi}{9}$), gilt:

$$\text{rg } \mathcal{B}(\mathbb{Q}(\theta)) = 0,$$

(rg = Rang als abelsche Gruppe), also kann man ξ als rationale Linearkombination von 5-Term-Relationen in $\mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$ schreiben. Um dies zu bewerkstelligen, suchen wir möglichst viele $x = \frac{a+b\theta+c\theta^2}{d} \in \mathbb{Q}(\theta)$, so daß für die Normen

$$(1) \quad N(x) \text{ und } N(1-x) \in \mathcal{M} = \{\pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}, p_i \text{ prim}\}$$

gilt. Dann suchen wir x und y mit (1), so daß für $1-xy$ und somit für jeden der 5 Terme in der "zyklischen" Form der Fünf-Term-Relation (vgl. [Z2]),

$$[x] + [y] + \left[\frac{1-x}{1-xy} \right] + [1-xy] + \left[\frac{1-y}{1-xy} \right],$$

die Bedingung (1) erfüllt ist. Es fügt sich nun, daß es genügt, $\mathcal{M} = \{\pm 3^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und den Bereich $\{|a| \leq 30, 0 \leq b \leq 3, |c| \leq 3\}$ zu untersuchen, um ξ als Linearkombination solcher Relationen zu finden. Das Resultat drucken wir auf der nachfolgenden Seite ab.

Bemerkung 1: Da wir von θ nur die Eigenschaft (0) verwendet haben, kann man mit dieser Kombination zwei analoge Identitäten für die beiden anderen Wurzeln direkt beweisen, ohne wie Loxton [Lo] komplizierte Partitionsidentitäten verwenden zu müssen.

Bemerkung 2: Auch Coxeters Relation für $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (vgl. z.B. [Le2], eq.(10))

$$\text{Li}_2(\rho^{20}) = 2\text{Li}_2(\rho^{10}) + 15\text{Li}_2(\rho^4) - 10\text{Li}_2(\rho^2) + \frac{\pi^2}{5}$$

erfüllt

$$\xi = [\rho^{20}] - 2[\rho^{10}] - 15[\rho^4] + 10[\rho^2] \in \mathcal{B}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})),$$

wie man schnell nachrechnet, wird sich also—entgegen Lewins Befürchtung ([Le2], p.357 Fußnote)—ebenfalls aus der Funktionalgleichung erhalten lassen.

Dasselbe gilt für die von Phillips erhaltene Identität ([Le2], eq.(34))

$$\text{Li}_2(\rho^{24}) - 6\text{Li}_2(\rho^8) - 3\text{Li}_2(\rho^6) + 6\text{Li}_2(\rho^4) = \frac{\pi^2}{30}.$$

Wir haben jedoch nicht versucht, eine der beiden Relationen zusammenzubasteln.

Wir bezeichnen $\frac{a + b\theta + c\theta^2}{d}$ bzw. sein Bild in $\mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$ mit $[a \ b \ c \ d]$, die beiden ersten Zahlen in jeder Zeile geben Zähler und Nenner des Koeffizienten an. Die ersten 6 Zeilen zeigen die verwendeten Fünf-Term-Relationen in der zyklischen Form, die übrigen sind die zusätzlich benötigten Symmetrierelationen. Es gilt (in $\mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$):

$$\begin{aligned} \xi &= 3 [0 \ 1 \ 0 \ -1] + 3 [0 \ 0 \ 1 \ 1] - [-1 \ 3 \ 0 \ -1] = \\ &1/1 ([0 \ 1 \ 0 \ -1] + [0 \ 0 \ 1 \ 1] + [-4 \ 0 \ 1 \ -3] + [0 \ 3 \ 0 \ 1] + [-3 \ 1 \ 1 \ -3]) \\ &+1/3 ([-4 \ 0 \ 1 \ -1] + [2 \ 1 \ -1 \ -3] + [2 \ 1 \ -1 \ -3] + [-4 \ 0 \ 1 \ -1] + [1 \ 1 \ 0 \ 3]) \\ &+2/3 ([-4 \ 0 \ 1 \ -1] + [-1 \ 0 \ 1 \ 3] + [1 \ 1 \ 0 \ -1] + [-7 \ 1 \ 2 \ -3] + [1 \ 2 \ 1 \ 3]) \\ &+2/3 ([-4 \ 0 \ 1 \ -1] + [0 \ 0 \ 1 \ 1] + [-6 \ 1 \ 2 \ 1] + [-1 \ 1 \ 1 \ -1] + [-2 \ 1 \ 0 \ -1]) \\ &-2/3 ([-4 \ 0 \ 1 \ -3] + [-1 \ 0 \ 1 \ 1] + [-1 \ 1 \ 2 \ 3] + [-7 \ 1 \ 2 \ -3] + [-1 \ 0 \ 1 \ -1]) \\ &+1/3 ([-4 \ 0 \ 1 \ -3] + [2 \ 1 \ -1 \ 1] + [0 \ 1 \ 1 \ 3] + [-2 \ 0 \ 1 \ 1] + [-1 \ 1 \ 0 \ -1]) \\ &-1/1 ([0 \ 3 \ 0 \ 1] + [-1 \ 3 \ 0 \ -1]) \\ &-2/1 ([-4 \ 0 \ 1 \ -1] - [0 \ 1 \ 0 \ -1]) \\ &-1/3 ([1 \ 1 \ 0 \ 3] - [1 \ 1 \ -1 \ -1]) \\ &-2/3 ([-1 \ 0 \ 1 \ 3] + [-4 \ 0 \ 1 \ -3]) \\ &-2/3 ([1 \ 1 \ 0 \ -1] + [2 \ 1 \ -1 \ -3]) \\ &-2/3 ([1 \ 2 \ 1 \ 3] + [-2 \ 1 \ 0 \ -1]) \\ &-2/3 ([-1 \ 1 \ 1 \ -1] + [-2 \ 0 \ 1 \ -1]) \\ &-2/3 ([-6 \ 1 \ 2 \ 1] + [-3 \ 1 \ 1 \ -3]) \\ &+2/3 ([-1 \ 0 \ 1 \ 1] + [-2 \ 0 \ 1 \ -1]) \\ &+2/3 ([-1 \ 1 \ 2 \ 3] + [0 \ 0 \ 1 \ 1]) \\ &+2/3 ([-1 \ 0 \ 1 \ -1] + [0 \ 0 \ 1 \ 1]) \\ &-1/3 ([2 \ 1 \ -1 \ 1] + [1 \ 1 \ -1 \ -1]) \\ &-1/3 ([-2 \ 0 \ 1 \ 1] + [-3 \ 0 \ 1 \ -1]) \\ &-1/3 ([0 \ 1 \ 1 \ 3] + [-3 \ 1 \ 1 \ -3]) \\ &-1/3 ([-1 \ 1 \ 0 \ -1] - [-3 \ 0 \ 1 \ -1]). \end{aligned}$$

Wir entnehmen die entsprechenden Funktionalgleichungen für Li_2 Lewins Buch [Le1], und es ergibt sich auf Li_2 -Niveau übertragen (wir denken uns Li_2 auf offensichtliche Weise linear auf $\mathbb{Z}^{(C-\{0,1\})}$ fortgesetzt; die Zahlen $[a, b, c, d] \in K$, deren Logarithmus auftritt, sind allesamt positiv):

$$3\text{Li}_2(\xi) =$$

$$\begin{aligned} &3\left(\frac{\pi^2}{2} - \log[0, 1, 1, 3] \log[-3, 1, 1, -3] - \log[-1, 3, 0, 1] \log[0, 3, 0, 1] - \log[0, 1, 0, 1,] \log[4, 0, -1, 3] \right. \\ &\quad \left. - \pi i \log[0, 3, 0, 1] - \pi i \log[4, 0, -1, 3] \right) \\ &+1\left(\frac{\pi^2}{2} - \log[5, 1, -1, 3] \log[2, 1, -1, 3] - \log[3, 0, -1, 1] \log[4, 0, -1, 1] - \log[2, 1, -1, 3] \log[1, 1, 0, 3] \right. \\ &\quad \left. - \pi i \log[4, 0, -1, 1] - \pi i \log[4, 0, -1, 1] \right) \\ &+2\left(\frac{\pi^2}{2} - \log[2, 1, 0, 1] \log[1, 1, 0, 1] - \log[4, -1, -2, 3] \log[7, -1, -2, 3] - \log[1, 0, -1, 3] \log[1, 2, 1, 3] \right. \\ &\quad \left. - \pi i \log[4, 0, -1, 1] - \pi i \log[7, -1, -2, 3] \right) \\ &+2\left(\frac{\pi^2}{2} - \log[1, -1, 0, 1] \log[2, -1, 0, 1] - \log[0, 1, 1, 1] \log[1, -1, -1, 1] - \log[4, 0, -1, 1] \log[6, -1, -2, 1] \right. \\ &\quad \left. - \pi i \log[2, -1, 0, 1] - \pi i \log[4, 0, -1, 1] \right) \\ &-2\left(\frac{\pi^2}{2} - \log[4, -1, -2, 3] \log[1, -1, -2, 3] - \log[4, -1, -2, 3] \log[7, -1, -2, 3] - \log[1, 0, -1, 1] \log[1, 0, -1, 1] \right. \\ &\quad \left. - \pi i \log[4, 0, -1, 3] - \pi i \log[7, -1, -2, 3] \right) \\ &+1\left(\frac{\pi^2}{2} - \log[0, 1, 0, 1] \log[1, -1, 0, 1] - \log[3, 0, -1, 1] \log[2, 0, -1, 1] - \log[4, 0, -1, 3] \log[0, 1, 1, 3] \right. \\ &\quad \left. - \pi i \log[3, 0, -1, 1] \right) \\ &-3\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[0, 3, 0, 1] \log[-1, 3, 0, 1] - \pi i \log[0, 3, 0, 1] \right) \\ &-6\left(\frac{\pi^2}{3} - \log[4, 0, -1, 1] \log[3, 0, -1, 1] + \frac{1}{2} \log[3, 0, -1, 1] \log[3, 0, -1, 1] - \pi i \log[4, 0, -1, 1] \right) \\ &-1\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \log[1, 1, 0, 3] \log[1, 1, 0, 3] + \log[2, 1, -1, 1] \log[1, 1, -1, 1] \right) \\ &-2\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[1, 0, -1, 3] \log[4, 0, -1, 3] - \pi i \log[4, 0, -1, 3] \right) \\ &-2\left(-\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \log[1, 1, 0, 1] \log[1, 1, 0, 1] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \log[2, -1, 0, 1] \log[2, -1, 0, 1] - \pi i \log[2, -1, 0, 1]\right) \\
& -2\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \log[2, 0, -1, 1] \log[2, 0, -1, 1] - \pi i \log[2, 0, -1, 1]\right) \\
& -2\left(-\frac{1}{2} \log[6, -1, -2, 1] \log[6, -1, -2, 1] + \log[1, -2, -1, 1] \log[2, -2, -1, 1] - \frac{1}{2} \log[2, -2, -1, 1] \log[2, -2, -1, 1]\right) \\
& +2\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[1, 0, -1, 1] \log[2, 0, -1, 1] - \pi i \log[2, 0, -1, 1]\right) \\
& +2\left(-\frac{1}{2} \log[8, -1, -3, 1] \log[8, -1, -3, 1] + \log[8, -1, -3, 1] \log[9, -1, -3, 1] - \frac{1}{2} \log[9, -1, -3, 1] \log[9, -1, -3, 1]\right) \\
& +2\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[1, 0, -1, 1] \log[0, 0, 1, 1]\right) \\
& -1\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[2, 1, -1, 1] \log[1, 1, -1, 1] - \pi i \log[2, 1, -1, 1]\right) \\
& -1\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[2, 0, -1, 1] \log[3, 0, -1, 1] - \pi i \log[3, 0, -1, 1]\right) \\
& -1\left(\frac{\pi^2}{6} - \log[0, 1, 1, 3] \log[3, -1, -1, 3]\right) \\
& -1\left(-\frac{\pi^2}{6} - \log[1, -1, 0, 1] \log[0, 1, 0, 1] + \frac{1}{2} \log[3, 0, -1, 1] \log[3, 0, -1, 1] + \pi i \log[3, 0, -1, 1]\right) \\
& = -\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Um dies zu verifizieren, zerlege man die Zahlen $[a, b, c, d]$ in Potenzen der Fundamenteinheiten θ und $1 - \theta$ und des Primelementes $1 + \theta$ der Norm 3.

Anhang 2

Zweidimensionale Eckfiguren von Pflasterungen

Auf den folgenden Seiten bilden wir einige Eckfiguren (in der Ecke ∞) ab, mit etwas zusätzlicher Information.

Legende: Sei d quadratfrei, wir zeigen diejenigen $\text{PSL}(\widetilde{2}, \mathcal{O}_d)$ -invarianten Pflasterungen von \mathbb{H}^3 , die wir mit Hilfe der "convex hull"-Konstruktion erhalten, in der Projektion von ∞ aus nach \mathbb{C} . Der linke Rand stellt die Strecke von 0 nach 1 auf der Geraden $y = 0$ dar, der rechte die Gerade

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{d}}{2} & \text{für } d = 3, 7, d \equiv 1, 2(4), d > 2, \\ \frac{\sqrt{d}}{4} & \text{für } d \equiv 3(4), d > 11, \\ \sqrt{d} & \text{für } d = 1, 2. \end{cases}$$

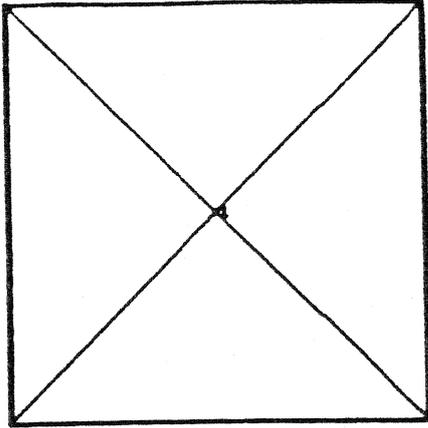
Die Eckfigur erstreckt sich demgemäß in die obere Halbebene. Die dick gezeichneten Polygone stellen den Rand der Projektionen unserer Polyeder dar, die darin befindlichen (gelegentlich noch erkennbaren) Nummern zeigen die Reihenfolge an, in welcher die Polyeder gefunden wurden. Die angegebenen Polyeder umfassen eine maximale Menge von inäquivalenten, die Pflasterung ist also aus ihnen aufgebaut. Wie im Beispiel $\mathcal{Q}(\sqrt{-6})$ (Kapitel III) ausgeführt, gelingt es, sich die Polyeder plastisch vorzustellen, wenn man die Projektionen als Faltbögen betrachtet.

Die Proportionen stimmen für größere d nicht mehr, die Figur wird dann im Imaginärteil zusammengestaucht abgebildet.

Für $d = 1, 2, 3, 7, 11, 19$ und 43 erkennt man Eckfiguren wieder, wie sie auch bei Grunewald, Gushoff und Mennicke [G-G-M] sowie bei Hatcher [Ha] und (analog zu unseren Bildern) bei Cremona [Cr] vorkommen. Für höhere Klassenzahlen ergeben sich teils recht einfache Pflasterungen (z.B. $d = 15$), teils aber auch welche mit Polyedern mit recht vielen Eckpunkten (z.B. 48 Ecken bei $d = 17$). Trotzdem haben die Polyeder des öfteren eine nichttriviale Symmetriegruppe (die nicht notwendig ganz von $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ oder von $\text{PSL}(\widetilde{2}, \mathcal{O}_d)$ herkommt, vgl. Beispiel), das jeweils erste hat immer mindestens die Ordnung 3 (Drehung des Dreiecks $0, 1, \infty$), und es sind meist nur wenige inäquivalente Polyeder, aus denen die Pflasterung aufgebaut ist.

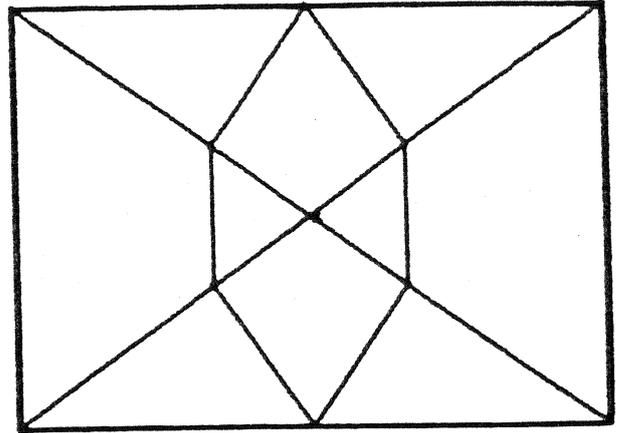
Die erste Zeile von Zahlen (V) neben den Figuren sind die "Vielfachheiten", mit denen die Polyeder (in der angegebenen Reihenfolge) zu zählen sind, sie bestimmen das Verhältnis, in welchem die Polyeder in der Pflasterung auftreten (z.B. bedeutet die Angabe $2, 3, 0_1$: das erste Polyeder tritt im Verhältnis $2 : 3$ zum zweiten Polyeder auf, das dritte Polyeder ist zu Polyeder 1 äquivalent). Die zweite Zeile (S) gibt (für die inäquivalenten Polyeder) die Ordnung der Symmetriegruppe in $\text{PSL}(\widetilde{2}, \mathcal{O}_d)$ an.

d=1



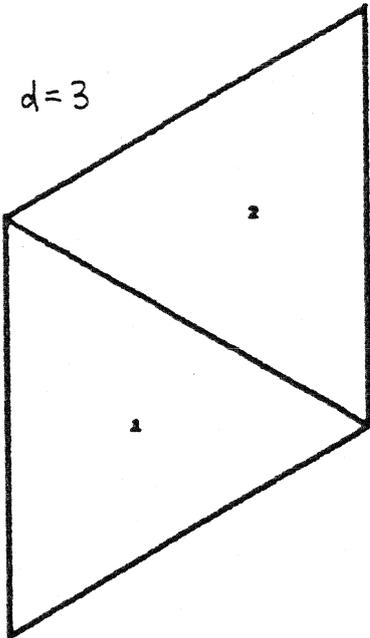
V: 1
S: 12

d=2



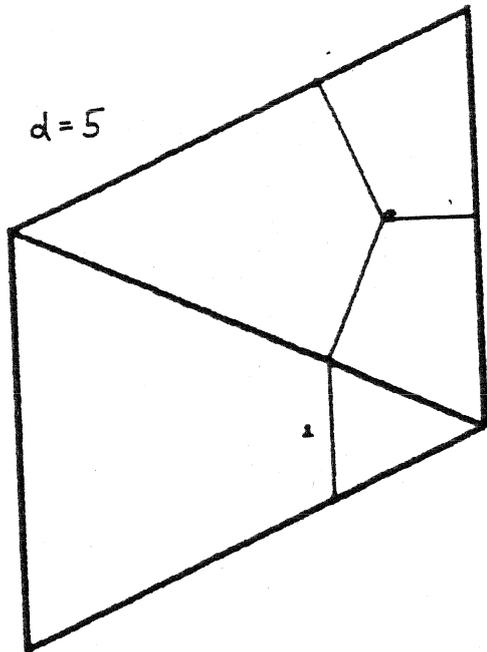
V: 1
S: 24

d=3



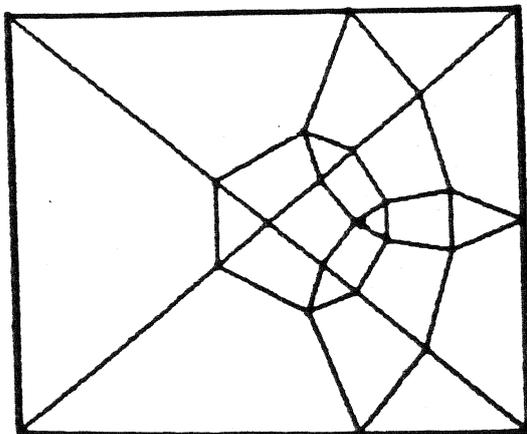
V: 1, 0
S: 12, -

d=5



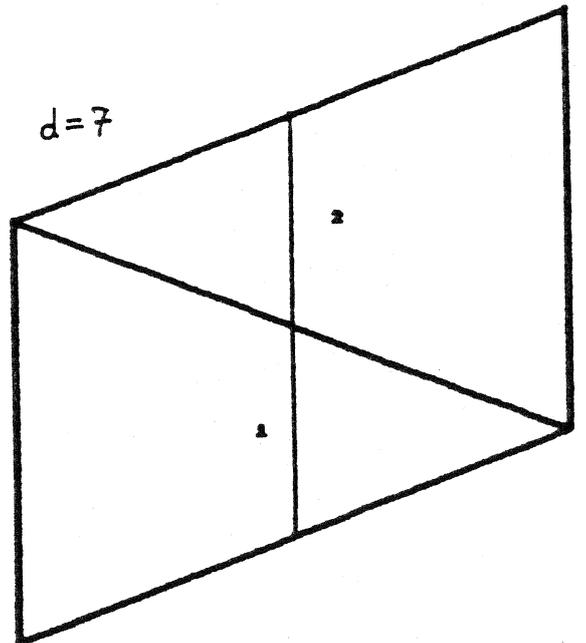
V: 4, 3
S: 3, 4

d=6



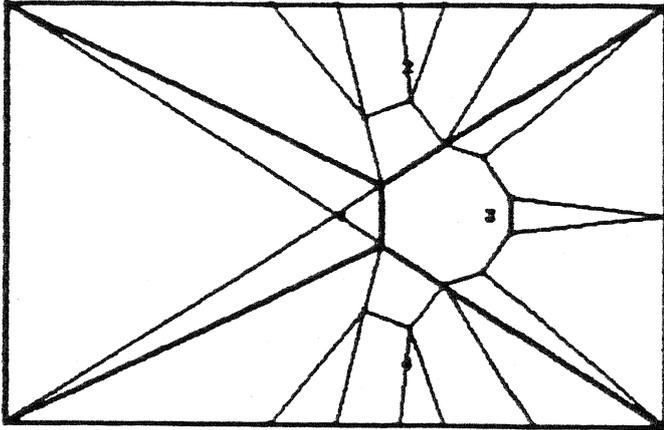
V: 1
S: 42

d=7



V: 1, 1
S: 6

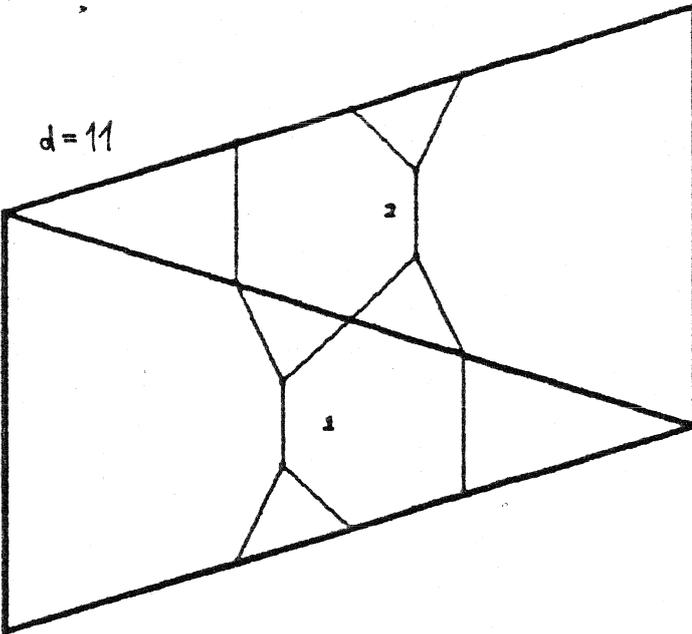
d = 10



V: 2, 3, 0, 0, 2, 2

S: 3, 2, -, -

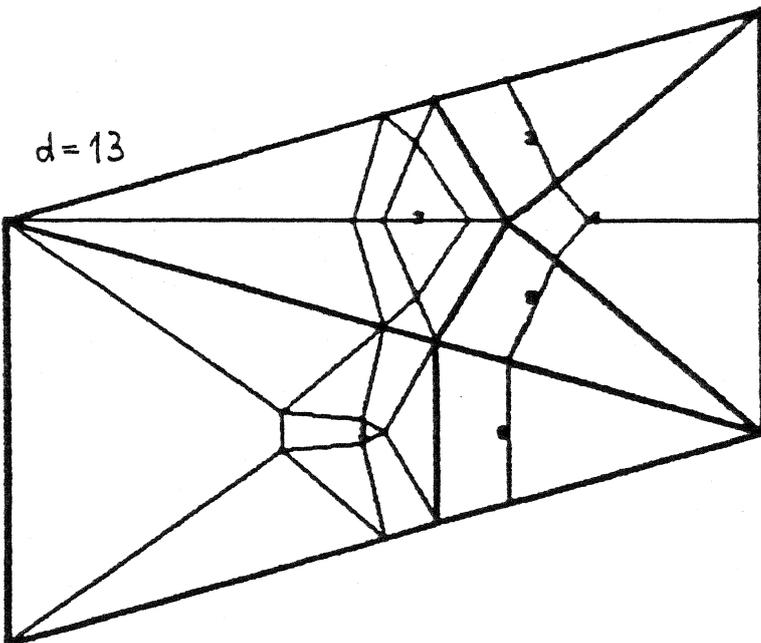
d = 11



V: 1, 0

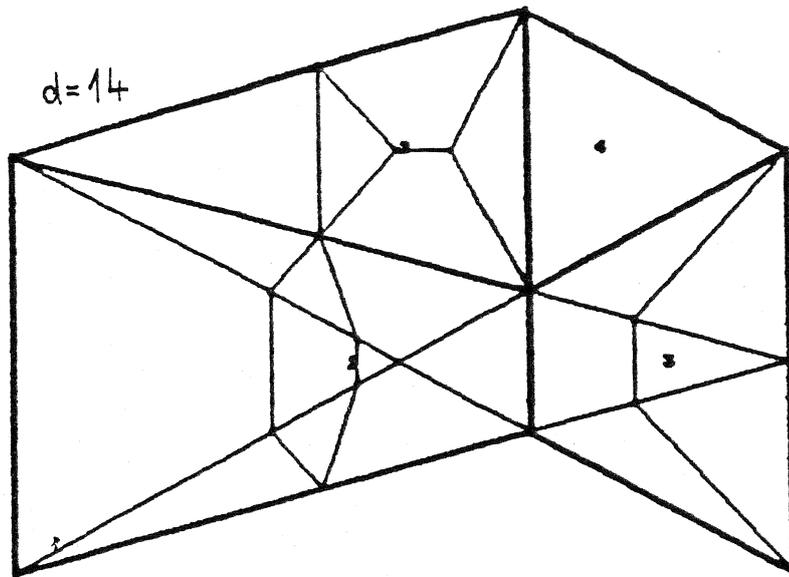
S: 12

d = 13



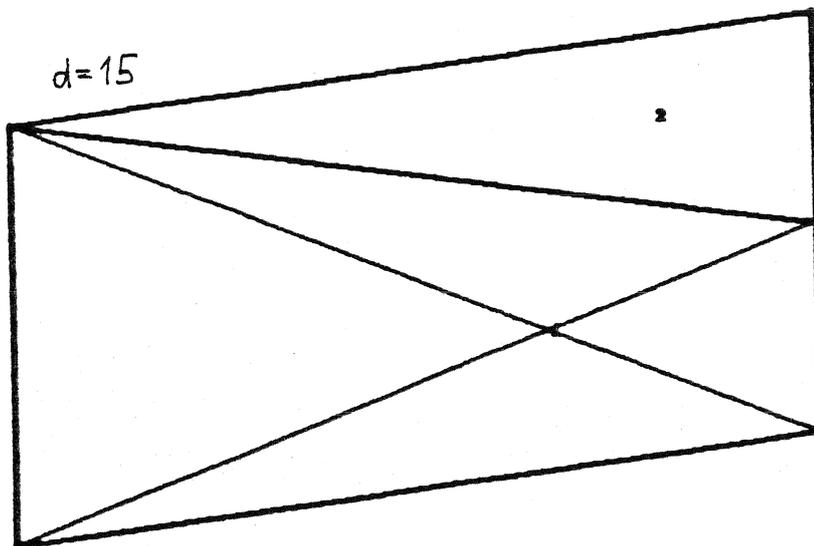
V: 2, 2, 12, 3, 0, 0, 3, 3

S: 6, 6, 1, 4, -, -



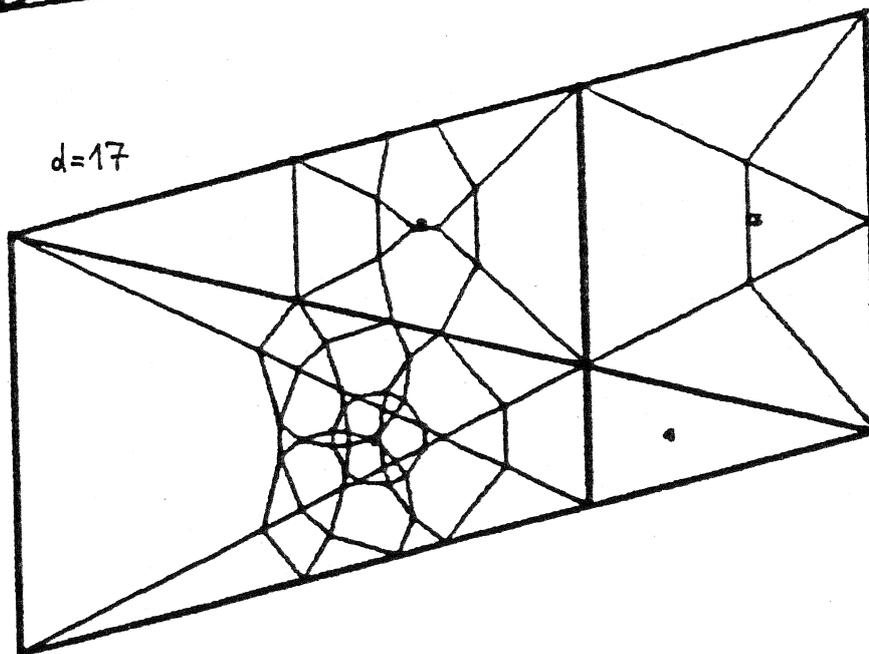
V: 2, 3, 6, 3

S: 3, 2, 1, 2



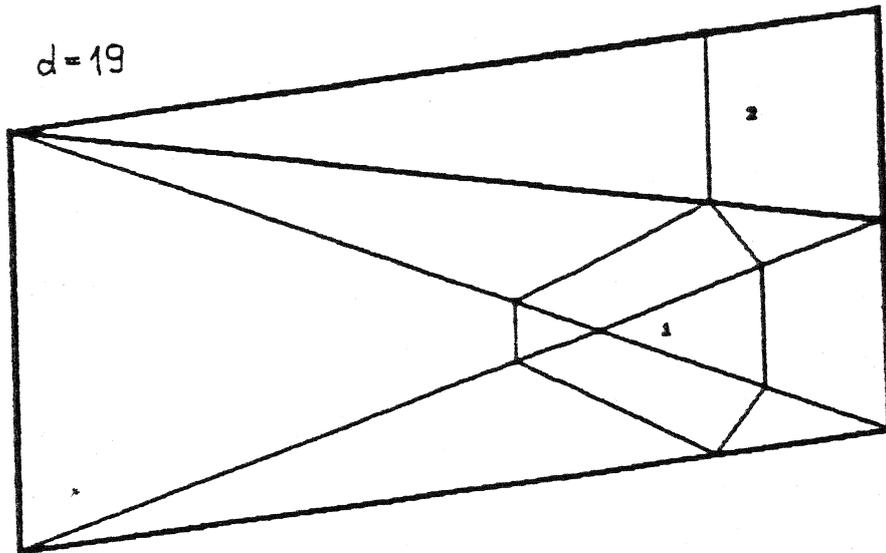
V: 2, 3

S: 3, 2



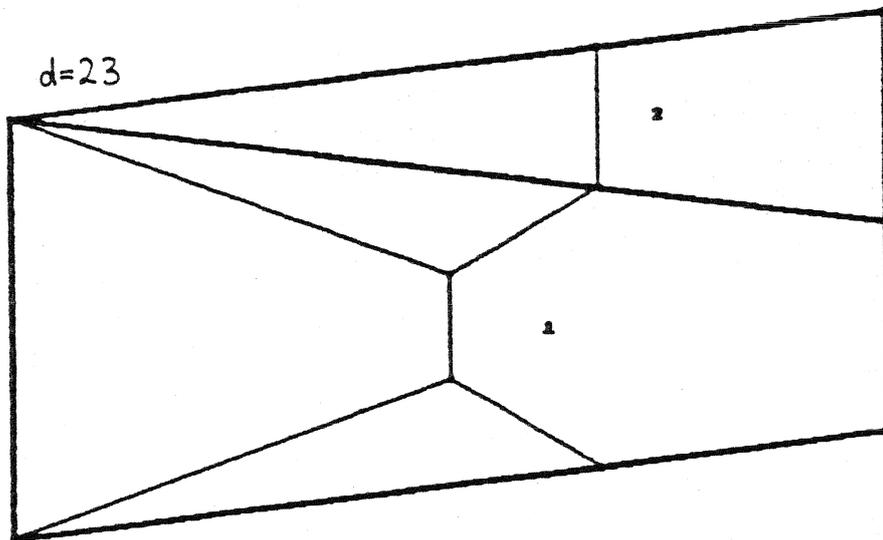
V: 1, 3, 6, 12

S: 12, 4, 2, 1



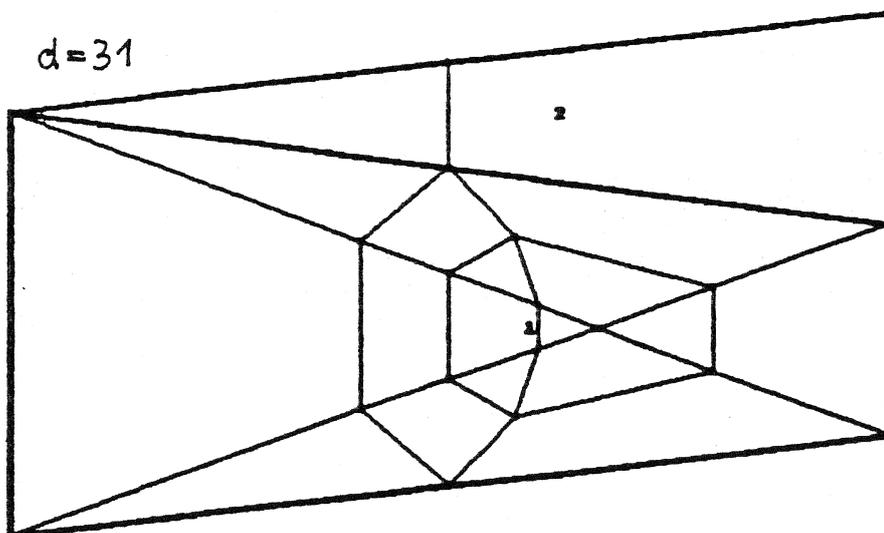
V: 1,2

S: 12,6



V: 2,3

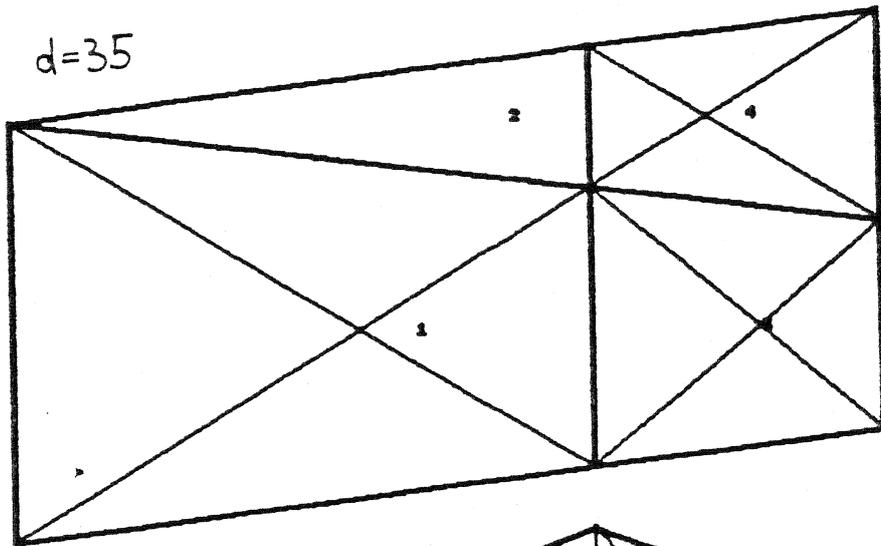
S: 3,2



V: 1,3

S: 6,2

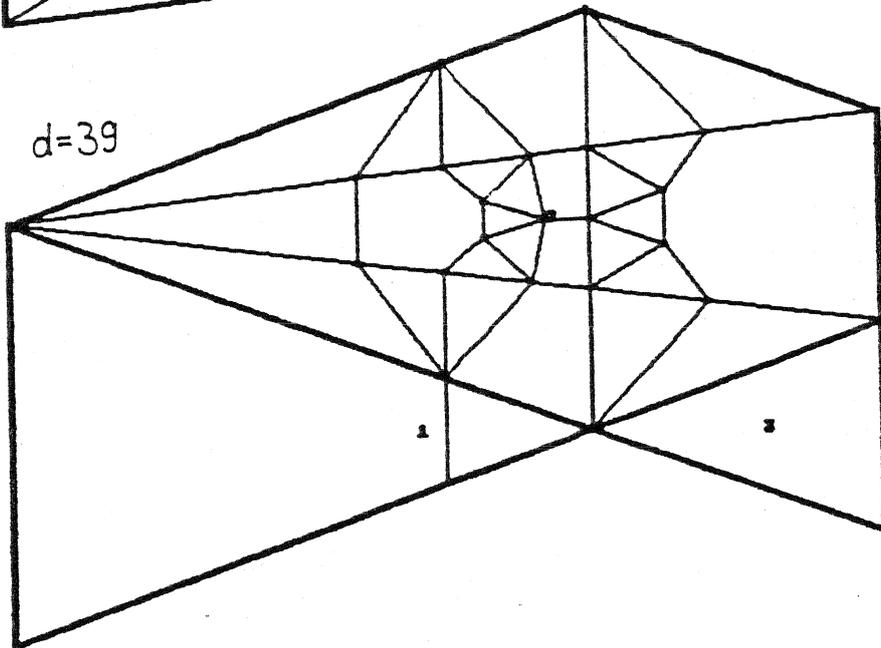
d=35



V: 2,3,2,2

S: 3,2,3,3

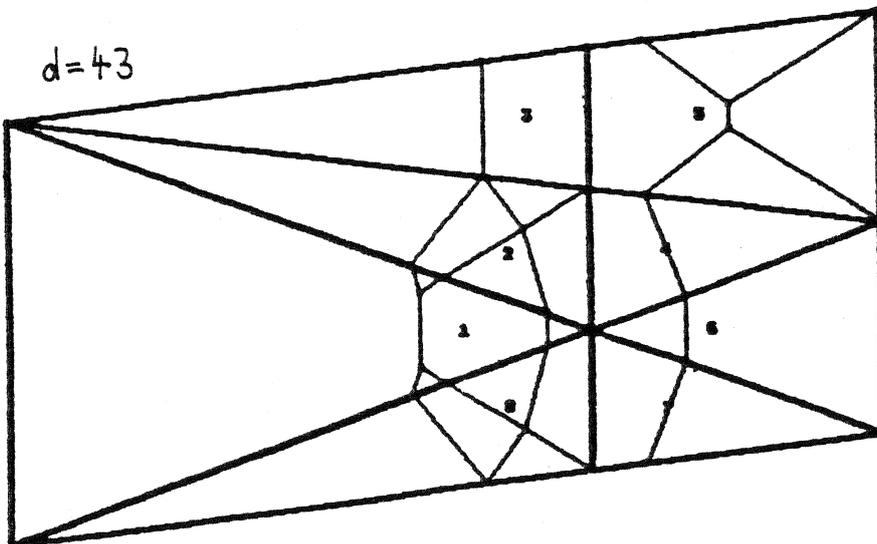
d=39



V: 2,1,6

S: 3,6,1

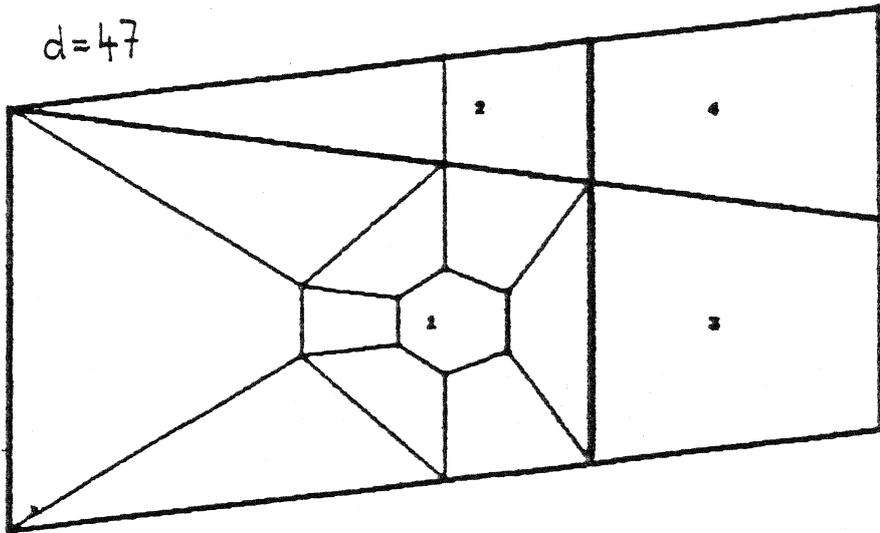
d=43



V: 1,4,6,0,0,2,0

S: 12,3,2,-,-,6,0

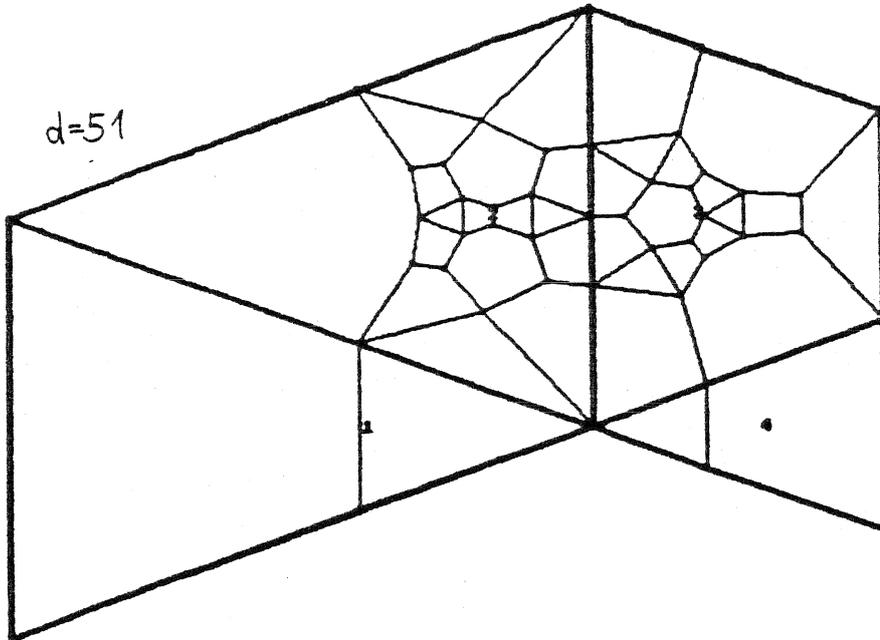
d=47



V: 2,3,6,6

S: 3,2,1,1

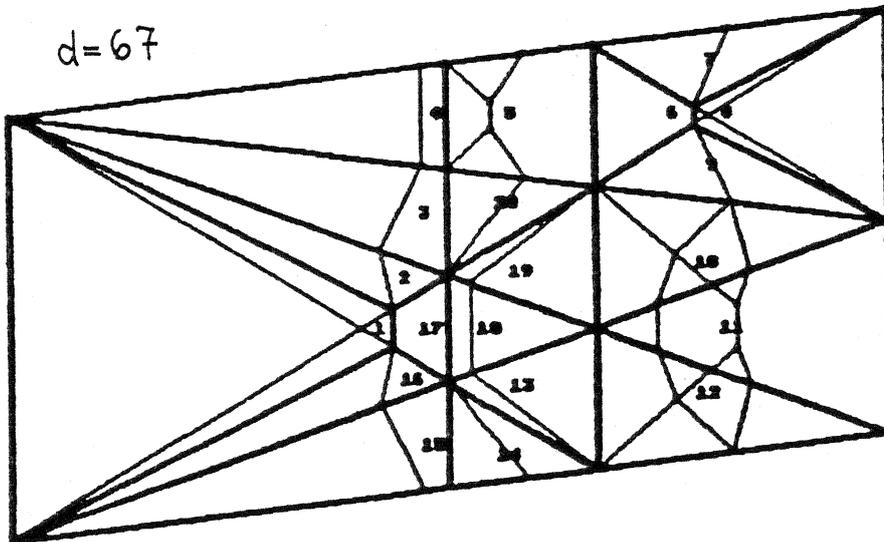
d=51



V: 4,1,1,4

S: 3,12,12,3

d=67



V: 4,12,6,2,4,0,1

0,0,0,1,0,0

1,5,1,5,2

0,0,0,0,0,0

S: 3,1,2,6,3,0

0,0,0,12,0,0

0,0,0,0,0,0

Anhang 3

Die algebraische Zerlegung für einen reinkubischen Körper

Dieselbe Prozedur wie in Kapitel II für imaginärquadratische Körper haben wir für einige Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta^3 = M \in \mathbb{Z}$ durchgeführt, um die Effektivität des Verfahrens auch für $[K : \mathbb{Q}] > 2$ deutlich vor Augen zu führen. Die folgenden Änderungen haben wir zu berücksichtigen (zu den Bezeichnungen vgl. Kapitel II, Kurzfassung):

- $\mathcal{F} = \{x = \frac{a+b\theta+c\theta^2}{d} \in K \mid N(x) \in \mathcal{M} \wedge N(1-x) \in \mathcal{M}, \quad |a|, |b|, |c|, |d| \text{ beschränkt}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$,
 $\mathcal{M} = \{\pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \mid p_i \text{ prim}, \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$,
- $K^\times \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \{ \wp \mid \wp \text{ Primideal in } \mathcal{O}_K \}$, da es eine Fundamenteleinheit ε in K^\times gibt,
- das Zerlegungsverhalten der Primzahlen,
- die Lichtenbaum-Vermutung.

zu a) $N(a + b\theta + c\theta^2) = a^3 + Mb^3 + M^2c^3 - 3Mabc$,

$$\mathcal{F}_{b,c} = \{a \in \mathbb{Z} \mid N(a + b\theta + c\theta^2) \in \mathcal{M}, \quad |a|, |b|, |c| \text{ wie oben beschränkt}\}.$$

Suche Paare $(a, a') \in \mathcal{F}_{b,c}$, so daß $a - a' \in \mathcal{M}$, dann gilt für $x = \frac{a + b\theta + c\theta^2}{a - a'}$:

$$N(x) = N\left(\frac{a + b\theta + c\theta^2}{a - a'}\right) \in \mathcal{M} \quad \text{und} \quad N(1-x) = N\left(\frac{-a' - b\theta - c\theta^2}{a - a'}\right) \in \mathcal{M}.$$

zu b) Wir entnehmen eine Fundamenteleinheit ε der Tabelle von Cassels [C]. Wir kommen nicht mehr mit einer Idealbasis (des Abschnitts $\mathbb{Z}^{(P)}$) aus, um zwei Elemente $x \in K$ auf Gleichheit modulo Einheitswurzeln zu untersuchen, wir benötigen eine \mathbb{Z} -Basis mit Elementen aus K für $\mathbb{Z}^{(P)}$, um die richtige Potenz von ε für zwei assoziierte Zahlen zu ermitteln.

zu c) Die Diskriminante D_K von K ist $-27M^2$,

für $p \mid M, p \neq 3$ gilt $p = \wp^3$,

für $p = 3$ gilt:

$$3 = \wp^3 \quad \text{für } M \not\equiv \pm 1 \pmod{9},$$

$$3 = \wp_1^2 \wp_2 \quad \text{für } M \equiv \pm 1 \pmod{9}$$

[vgl. [Bo-Š], §7, Aufg. 24].

Für das Zerlegungsverhalten von p mit $p \nmid D_K$ ist entscheidend, von wie vielen (0, 1 oder 3) Zahlen $(\text{mod } p)$ dieses M die dritte Potenz ist. (Es folgt jeweils $p = \wp$, $p = \wp_1 \wp_2$ oder $p = \wp_1 \wp_2 \wp_3$.)

zu d) Die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion lautet allgemein: Seien

$$G_1(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad G_2(s) = (2\pi)^{1-s} \Gamma(s).$$

Dann gilt für einen algebraischen Zahlkörper K mit Diskriminante D_K , $[K : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$:

$$G_1(s)^{r_1} G_2(s)^{r_2} \zeta_K(s) = |D_K|^{\frac{1}{2}-s} G_1(1-s)^{r_1} G_2(1-s)^{r_2} \zeta_K(1-s), \quad s \in \mathbb{C} - \{0, 1\},$$

speziell für $r_1 = r_2 = 1$:

$$\text{Res}_{s=-1}(\zeta_K(s) \Gamma(s)) = \frac{-\zeta_K(2) \cdot |D_K|^{3/2}}{\pi^5 \cdot 2^4}$$

oder

$$|\pi \zeta'_K(-1)| = \frac{\zeta_K(2) |D_K|^{3/2}}{16\pi^4}.$$

4,0
3,0
2,0
3,0
0,0
0,0

Die Lichtenbaum-Vermutung schreiben wir hier (wie in Kapitel II kommt wieder ein zusätzlicher Faktor 2 im Vergleich zu Graysons [G] Formulierung ins Spiel)

$$\zeta_K(2) \cdot \frac{|D_K|^{3/2}}{32\pi^4} = D_{\min}(\mathcal{B}(K)) \cdot \frac{\#K_2(\mathcal{O}_K)}{\#K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}}}.$$

Für $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{M})$ ist $\#K_3(\mathcal{O}_K)_{\text{tors}}$ wiederum 24. Wir setzen also

$$k(M) = \zeta_K(2) \frac{3|D_K|^{3/2}}{4\pi^4} / D_{\min}(\mathcal{B}(K))_{\text{exp}};$$

hierbei steht "exp" für die experimentell ermittelte Größe, so daß vermutlich gilt: $k(M) = \#K_2(\mathcal{O}_K)$. Das Ergebnis der Rechnung:

M	2	3	5	6	12	23
$k(M)$	2	4	4	2	2	4

Der Faktor 2 sollte schon deshalb in jedem der $k(M)$ auftreten, weil das Element $\{-1, -1\} \in K_2(K)$ der Ordnung 2 in jedem Falle in $K_2(\mathcal{O}_K)$ liegt, $K_2(\mathcal{O}_K)$ also einen zyklischen Anteil $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ enthält. Diese— wenn auch kurze—Tabelle deutet an, daß das Verfahren im Prinzip in jedem speziellen Fall die Ordnung von $K_2(\mathcal{O}_K)$ für einen beliebigen Zahlkörper K mit mindestens einer komplexen Stelle vorhersagen kann.

Bemerkung: Wir berechneten die Zetafunktion über die Produktdarstellung, was verhältnismäßig ungenau und zeitaufwendig war. Mit Hilfe einer Methode von H. Maennel [Mae] (ein Summationsverfahren für L -Reihen) erhalten wir eine wesentlich bessere Konvergenz (und daher bessere Vergleichsmöglichkeiten)—wir brauchen nur den Wert der L -Reihe, der zu einem der beiden nichttrivialen Charaktere von $\text{Gal}(H/\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$ gehört, H die galoissche Hülle von K , an der Stelle 2 zu bestimmen (vgl. hierzu auch [G], p.175ff).

Anhang 4

Vier Tabellen

Die erste Tabelle, aus drei Seiten bestehend, zeigt die experimentell gefundenen rationalen Verhältnisse

$$k(m) = \zeta_K(2) \frac{3d\sqrt{d}}{2\pi^2} / D_{\min}(\mathcal{B}(K))_{\text{exp}}$$

für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, m der quadratfreie Anteil von d . Es gilt vermutlich

$$k(m) = \#K_2(\mathcal{O}_K).$$

In der Tabelle ergibt sich m natürlich als Summe der am linken Rand und der an der Kopfleiste stehenden Zahlen; ein Strich bedeutet, daß m nicht quadratfrei ist.

Wir schreiben $k(m)$ als ein Produkt zweier Faktoren

$$k(m) = k_1(m) \cdot k_2(m),$$

wobei der zweite Faktor $k_2(m)$ derjenige Anteil sein soll, den man (mit der Theorie von $K_2(\mathcal{O}_K)$) noch nicht im Griff hat, wir lassen zusätzlich für $m \equiv 1 \pmod{8}$, $m > 1$ einen Faktor 2 weg (siehe Vermutung a) in Kap.II), also

$$k_1(m) = 2^\delta \cdot 3^\varepsilon,$$

$$\delta = \begin{cases} t & \text{falls } 2 \in NK \\ t-1 & \text{falls } 2 \notin NK \end{cases} + \begin{cases} 1 & \text{falls } m \equiv 1 \pmod{8}, m > 1 \\ 0 & \text{falls } m \not\equiv 1 \pmod{8} \end{cases},$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \equiv 3 \pmod{9}, m > 3 \\ 0 & \text{falls } m \not\equiv 3 \pmod{9} \end{cases}.$$

t sei dabei die Anzahl der ungeraden Primteiler von m .

Für die quadratfreien $m < 2000$ finden wir sehr oft: $k_2(m) = 1$. Daher listen wir in der zweiten Tabelle für die in $k(m)$ auftretenden Primzahlen p nur diejenigen m , für die gilt: $p|k_2(m)$. Falls p sogar mit einer höheren Potenz $\nu > 1$ in $k_2(m)$ aufgeht, so fügen wir dies in Klammern mit der Angabe (p^ν) hinzu.

Die dritte Tabelle gibt (für kleine m) ein vermutliches Erzeugendes der Bloch-Gruppe $\mathcal{B}(K)$ an, genauer ein Element in $\widetilde{\mathcal{B}(K)}$, das (wie in Lemma 1, Kap.IV beschrieben), in kanonischer Weise zu einem Element von $\mathcal{B}(K)$ gemacht werden kann und dort dann ein (vermutliches) Erzeugendes ist.

Die vierte Tabelle schließlich zeigt Elemente $\xi_{\text{geom}} \in \mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}$, die wir aus der geometrischen Zerlegung gewonnen haben. Wir deuten es mit einem (*) an, falls ξ_{geom} (wieder bis auf 2-Torsion) bereits in $\mathcal{B}(K)$ ist, ansonsten gilt dies erst für $\xi_{\text{geom}} + (1 - \bar{\xi}_{\text{geom}})$, dabei setze $1 - \overline{(\sum [z_i])} = \sum 1 - [\bar{z}_i]$. In Klammern führen wir noch das Vielfache seines Dilogarithmuswertes im Vergleich zu dem eines vermutlichen Erzeugenden an. Unsere Bezeichnungsweise ist die folgende:

$$[a \ b \ c] = \left[\frac{a + b\sqrt{-d}}{c} \right] \in \mathbb{Z}^{(K-\{0,1\})}, \text{ die Zahl vor } [a \ b \ c] \text{ stellt den Koeffizienten dar.}$$

Tabelle 1 (I)

$k(m)$

	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15	
0	1	1	1	1	1	2	-	1	1	1	2	2	9
16	8	-	1	6	1	2	-	1	-	1	6	2	9
32	4	4	2	1	1	6	4	2	1	-	2	2	9
48	-	-	2	1	-	2	12	1	1	1	2	-	9
64	4	6	1	2	2	2	4	1	-	2	2	2	9
80	-	2	1	2	1	2	4	-	2	6	2	2	10
96	8	-	-	1	6	2	8	1	3	1	2	6	10
112	8	2	2	-	5	4	-	1	2	-	-	2	10
128	12	2	1	2	1	-	4	6	1	2	2	2	10
144	4	2	-	1	-	2	-	2	2	1	2	2	10
160	32	-	1	12	1	2	-	2	-	1	42	-	10
176	4	2	1	1	2	6	4	2	2	-	2	2	11
192	8	4	4	1	-	2	36	1	2	4	2	-	11
208	4	12	1	2	1	2	8	1	12	4	2	2	11
224	-	4	1	1	2	4	20	-	2	6	4	2	11
240	8	-	-	-	6	2	4	-	1	2	26	12	11
256	8	2	2	-	3	2	4	2	2	1	-	2	11
272	24	62	-	1	5	-	4	6	1	4	2	4	12
288	-	2	12	1	-	2	-	3	2	2	6	22	12
304	4	-	1	18	34	2	4	5	-	1	18	2	12
320	4	8	4	-	1	6	8	52	3	-	2	2	12
336	16	-	2	2	-	-	24	1	1	1	-	-	12
352	16	6	2	4	1	2	-	3	-	2	2	6	12
368	-	2	2	1	2	-	4	-	1	6	2	2	12
384	8	4	-	1	12	4	20	1	2	3	2	24	13
400	8	2	2	-	2	2	76	4	2	2	-	2	13
416	36	2	3	1	1	-	-	6	2	4	2	2	13
432	8	28	12	2	4	2	-	4	1	4	2	2	13
448	56	-	2	6	1	4	4	49	-	1	12	2	13
464	8	2	1	2	2	6	4	2	-	-	2	14	13
480	4	4	4	2	-	2	12	-	13	2	2	-	14
496	16	6	1	2	1	6	4	14	-	3	4	4	14
512	-	4	2	2	2	2	4	-	1	-	2	4	14
528	-	2	-	6	6	2	4	1	-	1	2	6	14
544	4	4	1	-	-	2	8	1	28	1	-	2	14
560	48	2	1	2	1	-	4	12	5	2	4	-	14
576	16	-	12	2	4	34	-	3	1	2	2	2	15
592	16	-	4	6	14	2	4	6	-	-	6	2	15
608	8	2	2	1	1	12	12	2	1	-	6	4	15
624	-	2	4	2	-	2	12	1	2	-	2	-	15
640	8	6	3	4	8	2	4	-	12	1	2	2	15
656	-	4	1	1	1	4	8	-	2	6	2	2	15
672	8	8	-	1	6	20	4	2	1	6	-	6	16
688	4	4	1	-	11	2	8	5	2	1	-	74	16
704	24	24	2	1	2	-	24	36	4	2	2	2	16
720	16	-	12	-	-	2	-	2	4	1	2	-	16
736	4	-	1	12	2	2	4	1	-	2	-	2	16
752	4	2	82	1	1	36	4	90	2	-	6	2	16
768	8	4	6	1	-	-	312	1	2	2	4	-	16
784	4	6	1	2	2	4	4	17	12	1	4	8	17
800	-	4	2	4	14	2	4	-	1	6	2	2	17
816	4	2	-	1	6	2	-	2	1	1	10	6	17
832	-	2	6	-	1	2	-	1	2	-	-	-	17
848	12	-	2	1	22	-	4	12	1	4	2	6	17
864	4	4	-	2	8	2	-	2	-	1	2	10	17
880	16	-	1	108	1	10	8	4	-	2	6	2	18
896	8	4	2	12	2	12	4	250	1	-	8	2	18
912	4	2	4	2	-	2	12	1	2	-	2	-	18

Tabelle 1 (II)

 $k(m)$

	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
928	8	12	-	2	1	4	4	2	12	1	2	4
944	-	2	1	2	-	2	4	-	2	12	2	8
960	-	2	-	2	12	2	8	2	5	2	6	-
976	8	6	4	-	1	2	4	2	4	10	-	2
992	12	8	2	1	1	-	8	6	4	4	2	6
1008	8	2	12	1	-	4	-	3	1	1	4	32
1024	-	-	2	-	2	2	4	2	-	58	6	2
1040	4	2	2	16	3	6	4	-	1	-	4	2
1056	16	-	2	5	-	58	24	2	4	1	2	-
1072	4	6	-	6	-	2	8	1	-	4	2	6
1088	-	2	1	1	1	4	4	-	2	6	2	10
1104	8	20	-	1	12	2	8	1	2	1	2	6
1120	4	8	1	-	1	-	4	2	4	2	-	14
1136	12	2	4	2	1	-	4	6	2	2	-	2
1152	8	8	24	2	28	2	-	2	1	2	2	2
1168	16	-	1	12	1	-	4	2	-	1	6	-
1184	8	8	7	2	4	54	12	2	2	-	36	2
1200	8	6	2	4	-	4	24	-	2	1	2	-
1216	64	12	2	32	70	2	-	1	24	1	4	2
1232	-	10	44	17	1	16	8	-	28	12	4	2
1248	32	-	-	2	36	2	4	2	1	2	2	6
1264	56	2	2	-	2	4	4	-	-	1	-	2
1280	24	36	5	2	1	-	4	24	3	2	2	4
1296	40	2	24	1	4	2	-	11	1	4	2	4
1312	4	-	2	6	1	6	4	1	-	-	12	6
1328	12	4	-	2	2	12	24	2	2	-	2	4
1344	4	4	2	2	-	8	48	1	6	2	20	-
1360	8	18	2	8	3	2	-	2	60	1	2	-
1376	-	2	2	1	1	2	4	-	44	6	2	2
1392	16	4	-	22	42	2	4	7	2	36	14	12
1408	168	4	4	-	2	2	4	1	36	-	-	2
1424	-	4	3	1	4	-	4	6	4	2	2	2
1440	4	8	24	-	8	2	-	-	1	1	6	4
1456	16	-	1	30	4	4	4	1	-	4	-	14
1472	4	2	-	2	3	12	4	68	1	-	2	10
1488	8	2	4	1	-	68	12	2	1	2	2	-
1504	8	6	4	2	2	2	16	1	36	4	12	-
1520	-	2	7	-	2	2	4	-	1	132	2	2
1536	4	4	-	6	6	2	8	1	12	1	-	12
1552	8	4	2	-	2	2	8	2	2	2	-	2
1568	12	22	7	-	1	-	4	6	1	4	4	54
1584	12	2	-	2	104	2	-	1	4	1	8	4
1600	104	-	2	12	10	2	4	4	-	1	30	4
1616	-	2	3	1	1	6	-	2	1	-	2	4
1632	16	2	4	1	-	2	12	25	2	4	2	-
1648	32	-	2	28	1	2	4	1	12	2	2	2
1664	-	-	83	1	2	2	8	-	-	552	2	8
1680	-	-	-	14	6	4	4	-	6	5	-	12
1696	8	2	1	-	2	2	8	1	2	1	-	2
1712	12	2	-	4	1	-	68	12	7	-	6	2
1728	8	2	12	1	-	10	-	2	2	1	2	8
1744	28	-	1	12	-	4	4	1	-	2	78	2
1760	4	8	4	2	1	12	4	4	4	-	2	-
1776	24	4	2	2	-	2	48	2	1	1	2	-
1792	4	12	2	2	2	4	4	4	156	-	4	2
1808	-	2	1	-	1	-	8	-	2	18	2	2
1824	-	2	-	2	36	2	8	2	2	6	2	30
1840	16	2	6	-	2	46	-	-	2	2	-	4

Tabelle 1 (III)

 $k(m)$

	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
1856	12	4	-	1	-	-	12	6	1	4	4	6
1872	72	2	-	1	4	6	-	1	2	8	8	4
1888	16	-	2	6	5	6	8	2	-	1	6	2
1904	8	2	1	2	2	-	4	8	2	-	44	2
1920	16	-	2	-	-	4	12	2	1	3	2	-
1936	4	12	2	2	12	2	4	2	24	7	-	30
1952	-	4	4	2	4	2	4	4	2	12	6	12
1968	4	2	12	1	12	-	228	2	1	2	2	6
1984	4	2	1	-	2	2	4	1	8	3	-	2

Tabelle II

p -Anteile von $k_2(m)$, $m < 2000$

- $p = 2$: 17, 34, 97, 113, 161 (2^2), 193, 194, 205, 219, 221, 226, 241, 257, 291, 322, 323, 337 (2^2), 353 (2^2), 386, 399, 401, 410, 433, 438, 442, 445, 449, 482, 497, 514, 561, 577 (2^2), 579, 582, 593 (2^2), 641, 646 (2^2), 673, 674 (2^2), 706 (2^2), 721, 723, 731, 769, 799, 802, 866, 870, 881 (2^2), 890, 898, 901, 910, 929, 939, 959, 977, 979, 994, 1003, 1009, 1011, 1023 (2^3), 1045 (2^2), 1057, 1067, 1122, 1139, 1153, 1154 (2^2), 1158, 1169, 1186 (2^2), 1198, 1201, 1205, 1217 (2^4), 1221 (2^3), 1227 (2^2), 1239 (2^2), 1243, 1249 (2^3), 1282, 1290, 1297, 1299 (2^2), 1346, 1351, 1353, 1361, 1371, 1387, 1393, 1405, 1409, 1411, 1442, 1443, 1446 (2^2), 1457, 1462, 1469, 1489, 1507, 1513, 1517, 1538, 1553, 1590, 1598, 1601, 1633, 1649 (2^2), 1677, 1679, 1697, 1717, 1731, 1743, 1762 (2^2), 1763, 1777, 1802, 1803, 1841, 1858, 1873, 1878, 1885, 1886, 1889 (2^2), 1914, 1921, 1942 (2^2), 1947, 1954, 1958
- $p = 3$: 107, 201, 262, 298, 302, 309, 318, 331, 362, 367, 397, 417, 419, 503, 509, 533, 586, 602, 617, 622, 643, 685, 706, 713, 714, 759, 762 (3^2), 766, 771, 835, 863, 885 (3^2), 901, 974, 978, 1007, 1018, 1046, 1077, 1087, 1191 (3^2), 1193, 1198 (3^2), 1202, 1254, 1282 (3^2), 1291, 1319, 1327, 1329, 1337, 1355, 1362, 1366, 1405 (3^2), 1409, 1419 (3^2), 1427, 1454, 1478, 1515, 1518, 1541, 1547, 1583 (3^3), 1585, 1619, 1691, 1726, 1777, 1821, 1830, 1837, 1843, 1865, 1871, 1873 (3^2), 1879, 1895, 1933, 1942, 1951, 1966, 1967, 1977, 1997
- $p = 5$: 118, 233, 278, 314, 393, 571, 679, 698, 762, 830, 879, 887, 906 (5^3), 971, 989, 1061, 1103, 1106, 1222, 1234, 1283, 1297, 1358, 1371, 1461, 1487, 1606, 1614, 1642 (5^2), 1693, 1735, 1839, 1894, 1951
- $p = 7$: 174, 434, 449, 458 (7^2), 479, 506, 555, 598, 806, 1135, 1158, 1187, 1222, 1243, 1265, 1398, 1402, 1406, 1409, 1471, 1523, 1571, 1653, 1685, 1723, 1745, 1949
- $p = 11$: 303, 694, 854, 1235, 1306, 1387, 1397, 1533, 1570, 1918
- $p = 13$: 254, 330, 491, 777, 1590, 1601, 1758, 1803
- $p = 17$: 310, 583, 794, 1237, 1482, 1495, 1721
- $p = 19$: 409, 1977
- $p = 23$: 1677, 1847
- $p = 29$: 1037, 1063
- $p = 31$: 274
- $p = 37$: 703
- $p = 41$: 755
- $p = 83$: 1667

Tabelle 3

Vermutliche Erzeugende der Bloch-Gruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
(bis auf 2-Torsion)

= 1	$2[1\ 1\ 1]$	
= 2	$1[4\ 1\ 4] + 6[1\ 1\ 1]$	
= 3	$1[1\ 1\ 2]$	
= 5	$23[1\ 1\ 2] - 4[2\ 1\ 1] + 11[-1\ 1\ 1] - 3[7\ 1\ 8]$	
= 6	$15[2\ 1\ 2] + 17[0\ 1\ 2] - 4[12\ 1\ 12] - 2[0\ 1\ 12] - 1[3\ 1\ 1]$ $+ 9[-2\ 1\ 1] + 4[12\ 1\ 9]$	
= 7	$2[1\ 1\ 2] + 1[3\ 1\ 2]$	
= 10	$31[-2\ 1\ 2] + 10[8\ 3\ 7] + 1[1\ 1\ 2] + 16[12\ 1\ 13] - 10[2\ 1\ 11]$ $+ 1[23\ 1\ 11] + 7[-12\ 1\ 11] + 3[17\ 5\ 11] - 10[-6\ 5\ 11] + 13[31\ 2\ 22]$ $+ 2[23\ 1\ 14] + 22[-9\ 1\ 14] + 13[29\ 4\ 26] + 6[-3\ 4\ 26] - 7[23\ 1\ 22]$ $- 8[1\ 3\ 2] - 10[46\ 5\ 14] + 7[38\ 5\ 44] + 7[46\ 5\ 52] - 3[-12\ 1\ 44]$ $+ 12[4\ 1\ 2]$	
= 11	$2[4\ 1\ 3] - 1[-1\ 1\ 3] + 1[5\ 1\ 1] + 8[1\ 1\ 2]$	
= 13	$-4[1\ 1\ 2] + 18[3\ 1\ 4] + 50[1\ 1\ 4] + 16[41\ 1\ 44] + 28[8\ 1\ 14]$ $+ 4[6\ 1\ 14] - 12[8\ 1\ 16] - 6[41\ 1\ 49] - 6[8\ 1\ 49] - 8[61\ 2\ 56]$ $+ 11[2\ 3\ 4]$	
= 14	$24[1\ 1\ 3] + 20[-1\ 1\ 3] + 14[2\ 1\ 1] + 27[4\ 1\ 2] - 12[-2\ 1\ 2]$ $+ 5[6\ 1\ 2] - 14[11\ 1\ 5] + 12[-6\ 1\ 5] - 8[11\ 1\ 10] + 14[-1\ 1\ 10]$ $- 4[19\ 1\ 3]$	
= 15	$3[1\ 1\ 2] + 4[3\ 1\ 4] + 2[3\ 1\ 2] + 2[-1\ 1\ 2]$	
= 17	$2[1\ 1\ 2] + 12[2\ 1\ 3] + 6[-1\ 1\ 4] + 3[9\ 1\ 8] - 1[8\ 1\ 16]$	
= 19	$-28[3\ 1\ 4] + 18[1\ 1\ 4] - 46[9\ 1\ 8] + 55[-1\ 1\ 8] + 5[31\ 1\ 32]$ $+ 2[559\ 1\ 560] - 3[1\ 1\ 560] - 6[4\ 1\ 1] + 18[11\ 1\ 8] - 12[-3\ 1\ 8]$ $+ 19[1\ 1\ 2]$	
= 21	$14[3\ 1\ 3] - 7[2\ 1\ 4] + 2[7\ 1\ 9] + 2[2\ 1\ 9] + 10[7\ 1\ 4]$ $+ 10[-3\ 1\ 4] + 14[0\ 1\ 3]$	
= 22	$115[2\ 1\ 2] - 51[0\ 1\ 2] + 86[4\ 1\ 4] + 66[0\ 1\ 4] - 18[11\ 1\ 9]$ $+ 1[80\ 1\ 78] - 7[-2\ 1\ 78] + 44[15\ 1\ 11] - 44[-4\ 1\ 11] - 22[9\ 2\ 9]$ $+ 34[11\ 2\ 3] + 22[-8\ 2\ 3] + 24[9\ 2\ 18] + 4[30\ 2\ 39] + 68[9\ 2\ 39]$ $- 67[22\ 2\ 33] - 51[11\ 2\ 33] + 3[160\ 2\ 171] - 9[11\ 2\ 171] - 12[88\ 3\ 88]$ $+ 4[88\ 3\ 81] + 24[16\ 4\ 13]$	
= 23	$-14[1\ 1\ 2] + 19[2\ 1\ 3] - 2[1\ 1\ 3] - 7[2\ 1\ 1] + 5[-1\ 1\ 1]$ $+ 7[3\ 1\ 4] + 13[-2\ 1\ 3]$	
= 26	$-55[1\ 1\ 2] + 271[2\ 1\ 3] + 51[1\ 1\ 8] + 201[7\ 1\ 6] + 117[-1\ 1\ 6]$ $- 34[-1\ 1\ 81] - 285[2\ 1\ 4] - 7[7\ 1\ 9] + 131[2\ 1\ 9] - 37[7\ 1\ 5]$	
= 29	$51[1\ 1\ 2] + 247[4\ 1\ 5] - 41[1\ 1\ 5] + 137[4\ 1\ 3] - 61[-1\ 1\ 3]$ $- 15[5\ 1\ 4] + 57[-1\ 1\ 4] - 35[11\ 1\ 12] + 67[1\ 1\ 12] - 21[49\ 1\ 50]$ $+ 39[49\ 1\ 48]$	
= 30	$-132[3\ 1\ 3] - 133[5\ 1\ 5] - 83[0\ 1\ 5] - 30[60\ 1\ 60] - 8[0\ 1\ 81]$ $+ 24[3\ 1\ 6] + 7[5\ 1\ 8] - 36[3\ 1\ 8] - 24[5\ 1\ 2] + 36[-3\ 1\ 2]$ $+ 89[6\ 1\ 9] + 108[3\ 1\ 9] - 36[6\ 1\ 3] + 12[-3\ 1\ 3] + 12[81\ 1\ 78]$ $+ 36[5\ 1\ 10] - 6[6\ 1\ 1] + 42[-5\ 1\ 1] + 53[10\ 1\ 15] + 132[5\ 1\ 15]$ $- 5[10\ 1\ 16] + 12[16\ 1\ 16]$	

Tabelle 4

Geometrische Elemente der Bloch-Gruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
 (bis auf 2-Torsion und "Symmetrisierung" $[z] \mapsto [z] + [1 - \bar{z}]$;
 * bedeutet: keine Symmetrisierung nötig)

- $n=1$ (1) * $2[1\ 1\ 2]$
- $n=2$ (2) * $5[2\ 1\ 3] + 1[4\ 1\ 6] + 5[2\ 1\ 2] + 1[4\ 1\ 3] + 2[2\ 2\ 3]$
- $n=3$ (1) * $1[1\ 1\ 2]$
- $n=5$ (2) $14[2\ 1\ 3] + 4[7\ 1\ 9] + 3[5\ 1\ 5] + 3[5\ 1\ 6] + 3[5\ 1\ 4]$
 $+ 3[5\ 2\ 3]$
- $n=6$ (2) $5[3\ 1\ 5] + 1[12\ 1\ 15] + 1[8\ 1\ 7] + 3[6\ 1\ 6] + 1[9\ 2\ 7]$
 $+ 1[5\ 2\ 7] + 1[9\ 2\ 5] + 4[3\ 1\ 3] + 1[6\ 1\ 7] + 1[8\ 1\ 5]$
 $+ 1[9\ 2\ 10] + 3[3\ 1\ 6] + 2[4\ 2\ 5] + 1[18\ 4\ 21] + 2[2\ 1\ 3]$
 $+ 1[8\ 2\ 11] + 1[10\ 3\ 7] + 1[24\ 5\ 22] + 1[9\ 5\ 21] + 1[4\ 1\ 3]$
 $+ 2[6\ 3\ 10] + 1[4\ 1\ 4] + 1[5\ 4\ 11]$
- $n=7$ (1) * $2[3\ 1\ 4] + 1[5\ 1\ 8]$
- $n=10$ (1) $4[2\ 1\ 4] + 2[52\ 2\ 49] + 2[4\ 2\ 1] + 3[69\ 3\ 77] + 3[10\ 1\ 15]$
 $+ 3[8\ 3\ 28] + 3[87\ 12\ 91] + 3[5\ 2\ 15] + 3[1\ 3\ 21] + 3[9\ 1\ 7]$
 $+ 3[0\ 1\ 5] + 3[-6\ 3\ 14] + 3[14\ 3\ 11] + 3[8\ 3\ 14]$
- $n=11$ (1) * $3[5\ 1\ 6] + 1[13\ 1\ 15] + 1[17\ 1\ 20] + 1[13\ 1\ 18] + 1[3\ 1\ 4]$
 $+ 1[8\ 1\ 5] + 1[7\ 1\ 6] + 1[4\ 1\ 9] + 1[2\ 1\ 3]$
- $n=13$ (1) $2[6\ 2\ 11] + 1[41\ 1\ 44] + 2[31\ 3\ 28] + 1[29\ 6\ 51] + 1[15\ 1\ 14]$
 $+ 1[1\ 1\ 7] + 1[72\ 12\ 49] + 1[120\ 8\ 119] + 1[2\ 1\ 8] + 1[87\ 18\ 77]$
 $+ 1[5\ 2\ 3] + 1[122\ 10\ 119] + 1[7\ 5\ 44] + 1[2\ 1\ 4] + 1[78\ 6\ 91]$
 $+ 2[13\ 1\ 12] + 1[13\ 1\ 14] + 1[3\ 1\ 11] + 1[26\ 6\ 13] + 1[26\ 6\ 11]$
 $+ 1[3\ 1\ 4] + 1[3\ 1\ 2] + 1[13\ 1\ 13] + 1[39\ 24\ 91] + 1[13\ 8\ 33]$
 $+ 12[72\ 9\ 77] + 6[3\ 1\ 9] + 2[39\ 2\ 39] + 2[13\ 3\ 22] + 2[39\ 2\ 33]$
 $+ 3[2\ 3\ 11] + 2[13\ 3\ 11]$
- $n=14$ (2) $10[4\ 1\ 6] + 5[11\ 1\ 15] + 2[16\ 1\ 15] + 2[16\ 1\ 12] + 5[16\ 4\ 15]$
 $+ 10[4\ 2\ 9] + 2[32\ 2\ 27] + 2[26\ 4\ 25] + 7[2\ 1\ 6] + 2[2\ 1\ 1]$
 $+ 5[11\ 1\ 9] + 6[13\ 2\ 15] + 3[28\ 2\ 21] + 3[14\ 4\ 15] + 3[14\ 2\ 9]$
 $+ 3[14\ 1\ 12] + 3[24\ 4\ 25] + 3[6\ 1\ 5]$
- $n=15$ (1) $4[3\ 1\ 6] + 2[9\ 1\ 8] + 2[3\ 1\ 2] + 3[7\ 1\ 8]$

Literatur:

- [B1] J. Browkin: *The functor K_2 for the ring of integers of a number field*, Banach Center Publications, Vol. 9, Warschau 1982.
- [B2] J. Browkin: *On the divisibility by 3 of $\#K_2\mathcal{O}_F$ for real quadratic fields F* Demonstratio Math. 18 (1985), no. 1, 153-159.
- [Bi] L. Bianchi: *Sui gruppi di sostituzioni lineari*, Math. Ann. 42 (1893), 30-57.
- [Bl1] S.J. Bloch: *Applications of the dilogarithm function in algebraic K -theory and algebraic geometry*, Int. Symp. on Alg. Geom. Kyoto 1977, 103-114.
- [Bl2] S.J. Bloch: *Higher Regulators, algebraic K -theory and zeta functions of elliptic curves*, Lecture Notes.
- [Bo1] A. Borel: *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 4 (1977), no.4, 613-636; errata 7 (1980), no.2, 373.
- [Bo2] A. Borel: *Cohomology of arithmetic groups*, Proc. Int. Cong., Vancouver 1974.
- [Bo-Š] S.I. Borewics, I.R. Šafarevič: *Zahlentheorie*, Birkhäuser Verlag 1966.
- [B-S] J. Browkin, A. Schinzel: *On Sylow 2-subgroups of $K_2\mathcal{O}_F$ for quadratic number fields F* , JRAM 331 (1982), 104-113.
- [C] J.W.S. Cassels: *The rational solutions of the diophantine equation $Y^2 = X^3 - D$* , Acta Math. 82 (1950), 243-273.
- [Cr] J.E. Cremona: *Hyperbolic tessellations, modular symbols, and elliptic curves over complex quadratic fields*, Compositio Math. 51 (1984), 275-323.
- [E-P] D.B.A. Epstein, R.C. Penner: *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Diff. Geom. 27 (1988), 67-80.
- [G] D. Grayson: *Dilogarithm Computations for K_3* , in: "Algebraic K -Theory Evanston 1980", *Lecture Notes in Math.* 854 (1981), Springer, 168-178.
- [G-G-M] F. Grunewald, J. Mennicke, A.-C. Gushoff: *Komplex-quadratische Zahlkörper kleiner Diskriminante und Pflasterungen des hyperbolischen Raumes*, Geometriae Dedicata 12 (1982), 227-237.
- [Ha] A. Hatcher: *Hyperbolic structures of arithmetic type on some link complements*, J. London Math. Soc. (2), 27 (1983), 345-355.
- [Hu] A. Hurwitz: *Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper*, Werke Bd. II, 244-268.
- [Le1] L. Lewin: *Polylogarithms and associated functions*, New York-Oxford: North Holland 1981.
- [Le2] L. Lewin: *The inner structure of the dilogarithm in algebraic fields*, Journal of Number Theory 19 (1984), 345-373.
- [Lev] M. Levine: *The indecomposable K_3 of fields*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 17 (1987), no. 2, 321-325.
- [Li] S. Lichtenbaum: *Values of zeta-functions, étale cohomology and algebraic K -Theory*, in: "Algebraic K -Theory II", *Lecture Notes in Math.* 342 (1973), Springer, 489-501 (siehe Borel [Bo1]).
- [Lo] J.H. Loxton: *Special values of the dilogarithm function*, Acta Arithmetica XLIII, (1984), 155-166.
- [M] W. Miller: *Symmetry groups and their applications*, Academic Press, New York 1972.
- [Maa] H. Maaß: *Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe*, Math. Z. 51 (1948), 255-261.
- [Mae] H. Maennel: *On the summation of complex and p -adic L -series of number fields*, Diplomarbeit 1988, Bonn.
- [Mi] J. Milnor: *Introduction to algebraic K -Theory*, Princeton University Press 1971.

- [M-W] B. Mazur, A. Wiles: *Class fields of abelian extensions of \mathbb{Q}* ,
Inv. Math. 76 (1984), 179-330.
- [N-Z] W. Neumann, D. Zagier: *Volumes of hyperbolic three-manifolds*,
Topology 24 (1985), 307-332.
- [P] M. Pohst: *A modification of the LLL reduction algorithm*,
J. Symbolic Computation 4 (1987), 123-127.
- [Q] D. Quillen: Higher algebraic K -theory I, in: "Algebraic K -theory I",
Lecture Notes in Math. 341 (1973), Springer, 85-147.
- [S] A.A. Suslin: *K_3 of a field and Bloch's group* (to appear).
- [Sw] R.G. Swan: *Generators and Relations for certain Special Linear Groups*,
Adv. in Math. 6 (1971), 1-77.
- [T] J. Tate: Appendix, *Lecture Notes in Math.* 342 (1973), Springer, 429-446.
- [Th] W.P. Thurston: *The Geometry and Topology of 3-manifolds*,
Mimeographed Lecture Notes, Princeton 1979
(Chapter 7, "Computation of Volume", von J. Milnor).
- [Z1] D. Zagier: *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions*,
Inv. Math. 83 (1986), 285-301.
- [Z2] D. Zagier: *The remarkable dilogarithm*,
Proceedings of the Srinivasa Ramanujan Birth Centenary Colloquium,
Publications of the TIFR, Bombay, und
J. Ind. Math. Soc. (1988) (to appear).