LA SÉRIE PRINCIPALE UNITAIRE DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: VECTEURS LOCALEMENT ANALYTIQUES

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous déterminons les vecteurs localement analytiques des représentations de la série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Abstract. — We identify the locally analytic vectors of representations from the unitary principal series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Table des matières

Introduction

0.1. Notations

Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\deg(g) \in \mathbf{Z}$ l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, alors $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \ker \chi = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$; on note $a \mapsto \sigma_a$ son inverse.

On fixe une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers. Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est l'ensemble des points L-rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathscr{T}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans L, et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $w(\delta)$ son *poids*, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)).$$

Si δ est *unitaire* (i.e. si δ est à valeurs dans $\mathscr{O}_L^*$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de δ. Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1 et il sera noté χ dans l'article.

On note :

- G le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$,
- $B = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{smallmatrix}\right)$ le *borel* supérieur,
- $Z = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right),\ a \in \mathbf{Q}_p^*\right\}$ le centre de G,
- $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le *mirabolique*,
- $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ l'*unipotent* supérieur,
- $T = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{smallmatrix}\right)$ le *tore maximal déployé*, et $A = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ son sous-groupe,
- $P^+ \subset P$ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,
- $A^+ = A \cap P^+$ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ que l'on décompose sous la forme $A^+ = \Phi^+ \times A^0$, avec $\Phi^+ = \left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{N}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $A^0 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (si $n \geq 1$, on note A^n le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1+2p^n\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de A^0),
- w la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

0.2. La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

On dispose [**14**] à présent d'une correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associant à une L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, une représentation unitaire admissible de $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Cette correspondance satisfait aux espoirs de Breuil [**5**] dans le cas potentiellement semi-stable (en particulier, elle encode la correspondance locale classique).

- Si V est absolument irréductible, il en est de même de $\mathbf{\Pi}(V)$ (et même de la restriction de $\mathbf{\Pi}(V)$ à B) ;
- si $V^{\mathrm{ss}} = L(\delta_1) \oplus L(\delta_2)$, alors $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{ss}} = B(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{ss}} \oplus B(\delta_2,\delta_1)^{\mathrm{ss}}$, où la représentation $B(\delta_i,\delta_{3-i})$ est l'induite continue de B à G du caractère unitaire $\delta_{3-i}\otimes\delta_i\chi^{-1}$ de B [défini par $(\delta_{3-i}\otimes\delta_i\chi^{-1})\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \delta_{3-i}(a)\delta_i(d)(d|d|)^{-1}$].

La construction de la correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ s'appuie sur l'équivalence de catégories $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ de Fontaine [**20**] entre représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ,Γ)-modules étales, et ses raffinements [**9, 22**] $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}) \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger) \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, où $\mathscr{R}$ désigne l'anneau de Robba (i.e. l'ensemble des fonctions analytiques f sur une couronne $0 < v_p(T) \leq r(f)$, où $r(f) > 0$ dépend de f), $\mathscr{E}^\dagger$ désigne l'ensemble des éléments bornés de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{E}$ est le complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la valuation p-adique. Si

$V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on dispose donc de (φ, Γ)-modules $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, $D^\dagger \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$ et $D_{\mathrm{rig}} \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$ (le module $D^\dagger$ est le moins intéressant, mais c'est lui qui permet de passer de D à D_{rig} et vice-versa car $D = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$ et $D_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$).

Si V est de dimension 2, on construit des faisceaux G-équivariants sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ dont les sections globales $D \boxtimes \mathbf{P}^1$, $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ fournissent une description de la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ et de ses vecteurs localement analytiques $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{an}}$: on a des suites exactes de G-espaces vectoriels topologiques

$$0 \to \mathbf{\Pi}(V)^* \otimes \omega_D \to D \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathbf{\Pi}(V) \to 0,$$
$$0 \to (\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{an}})^* \otimes \omega_D \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{an}} \to 0,$$

où ω_D désigne le caractère $\chi^{-1} \det V$ de $\mathbf{Q}_p^*$ vu comme caractère de G en composant avec le déterminant (le module $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ permet de passer de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ à $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, mais n'a pas vraiment d'intérêt en lui-même). Le caractère central de $\mathbf{\Pi}(V)$ est ω_D ; c'est donc le déterminant de V à multiplication près par l'inverse χ^{-1} du caractère cyclotomique.

Dans cet article, on s'intéresse de plus près à la représentation $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{an}}$. En particulier, on calcule son module de Jacquet ou plutôt son dual $J^*(\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{an}}) = H^0(N, (\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{an}})^*)$ (Il s'agit donc du module de Jacquet naïf, qui contrôle les morphismes vers la série principale, et pas de celui d'Emerton **[18]** qui contrôle les morphismes depuis la série principale). Cela nous permet de répondre à des questions de Breuil et Emerton concernant les vecteurs localement analytiques des représentations de la *série principale unitaire* qui correspondent **[13, 2, 28]** aux représentations *trianguline*s [ce qui signifie **[10]** que le (φ, Γ)-module D_{rig} est *triangulable* c'est-à-dire est une extension de deux (φ, Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$ (non étales si V est irréductible)]. On peut aussi obtenir ces représentations de la série principale unitaire par complétion de certaines induites analytiques de caractères (non unitaires) du borel ; cette description joue d'ailleurs un grand rôle dans la théorie (au moins pour le moment) : c'est grâce à elle que l'on peut vérifier que le module $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ se décompose sous la forme ci-dessus dans le cas de la série principale unitaire, le cas général s'en déduisant par prolongement analytique.

Comme on s'intéresse aux vecteurs localement analytiques, il est commode de changer un peu de point de vue et de privilégier le module D_{rig}. On part donc de $\Delta \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, de rang 2 ; on note $\mathbf{V}(\Delta)$ (ou souvent, simplement V) la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond, et on note $\mathbf{\Pi}(\Delta)$ la représentation $\mathbf{\Pi}(\mathbf{V}(\Delta))^{\mathrm{an}}$ de telle sorte que la suite exacte ci-dessus devient :

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta \to \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathbf{\Pi}(\Delta) \to 0.$$

On note aussi $\Delta^{[0]}$ le sous-$\mathscr{E}^\dagger$-module des éléments de Δ d'ordre 0 et $\widehat{\Delta}^{[0]}$ le $\mathscr{E}$-module $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta^{[0]}$ (si $\Delta = D_{\mathrm{rig}}$, alors $\Delta^{[0]} = D^\dagger$ et $\widehat{\Delta}^{[0]} = D$). On a alors le résultat suivant.

Théorème 0.1. — *$J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))$ est non nul si et seulement si Δ est triangulable.*

Autrement dit, $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))$ est non nul si et seulement si $\mathbf{\Pi}(\widehat{\Delta}^{[0]})$ est de la série principale unitaire. Si Δ est triangulable, on peut décrire explicitement le module $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))$ et en déduire la structure de la représentation $\mathbf{\Pi}(\Delta)$, mais cela va demander d'introduire un certain nombre de no(ta)tions.

0.3. (φ,Γ)**-modules triangulables de rang 2.** — La classification des (φ,Γ)-modules triangulables de rang 2 se ramène à celle des (φ,Γ)-modules de rang 1 et de leurs extensions, ce qui fait l'objet d'une bonne partie de [**10**] et [**8**].

Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ,Γ) module obtenu en multipliant l'action de φ sur $\mathscr{R}$ par $\delta(p)$ et celle de $\sigma_a\in\Gamma$ par $\delta(a)$. On note souvent un élément de $\mathscr{R}(\delta)$ sous la forme $x\otimes\delta$, avec $x\in\mathscr{R}$; les actions de φ et σ_a sont alors données par $\varphi(x\otimes\delta)=(\delta(p)\varphi(x))\otimes\delta$ et $\sigma_a(x\otimes\delta)=(\delta(a)\sigma_a(x))\otimes\delta$. Le module $\mathscr{R}(\delta)$ admet une base canonique sur $\mathscr{R}$, à savoir $1\otimes\delta$, qui est propre sous les actions de φ et Γ pour le caractère δ.

On a alors le résultat suivant [**10**, th. 0.2].

Proposition 0.2. — (i) *Si D est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, il existe un unique $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $D\cong\mathscr{R}(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}$ est de la forme x^{-i}, avec i entier ≥ 0, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier ≥ 1 ; dans ces deux cas, $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ est de dimension 2 et l'espace projectif associé est naturellement isomorphe à $\mathbf{P}^1(L)$.*

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des $(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$, où (δ_1,δ_2) est un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)\times\widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $\mathscr{L}\in\mathrm{Proj}(\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1)))$, cet espace étant identifié à $\mathbf{P}^0(L)=\{\infty\}$ (resp. $\mathbf{P}^1(L)$) si $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ est de dimension 1 (resp. 2). Si $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$, on note $\Delta(s)$ le (φ,Γ)-module extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ déterminé, à isomorphisme près, par $\mathscr{L}$. On a donc une suite exacte de (φ,Γ)-modules

$$0\to\mathscr{R}(\delta_1)\to\Delta(s)\to\mathscr{R}(\delta_2)\to 0.$$

On note $\mathscr{S}_*$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p))+v_p(\delta_2(p))=0\quad\text{et}\quad v_p(\delta_1(p))>0.$$

Si $s\in\mathscr{S}_*(L)$, on associe à s les invariants $u(s)\in\mathbf{Q}_+$ et $w(s)\in L$ définis par

$$u(s)=v_p(\delta_1(p))=-v_p(\delta_2(p))\quad\text{et}\quad w(s)=w(\delta_1)-w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_*$ sous la forme $\mathscr{S}_*=\mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$, où

- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier ≥ 1 ;
- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1, $u(s)<w(s)$ et $\mathscr{L}=\infty$;
- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1, $u(s)<w(s)$ et $\mathscr{L}\neq\infty$;
- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1, $u(s)=w(s)$;
- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1, $u(s)>w(s)$.

Enfin, on pose $\mathscr{S}_{\rm irr}=\mathscr{S}_*^{\rm ng}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm cris}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm st}$, et on note $\mathscr{S}_*^{\rm HT}$ (resp. $\mathscr{S}_*^{\rm dR}$) l'ensemble des $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$ tels que $w(s)\in\mathbf{Z}-\{0\}$ (resp. $w(s)\in\mathbf{N}-\{0\}$). Alors $\mathscr{S}_*^{\rm dR}=\mathscr{S}_*^{\rm st}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ et $\mathscr{S}_*^{\rm HT}$ est la réunion disjointe de $\mathscr{S}_*^{\rm dR}$ et de $\mathscr{S}_*^{\rm HT}\cap\mathscr{S}_*^{\rm ng}$ qui est l'image de $\mathscr{S}_*^{\rm ncl}$ par l'application $(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\mapsto(x^{-w(s)}\delta_1,x^{w(s)}\delta_2,\mathscr{L})$ (on a d'ailleurs $\mathscr{L}=\infty$ dans cette situation).

Le résultat suivant [**10**, th. 0.5] rassemble les principales propriétés de $\Delta(s)$.

Proposition 0.3. — *Soit $s\in\mathscr{S}$.*

(i) $\Delta(s)\in\Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{R})$ *et est irréductible si et seulement si* $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$ (si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ncl}$, alors $\Delta(s)$ n'est pas étale et si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ord}$, alors $\Delta(s)$ est étale mais pas irréductible).

(ii) *Si $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$ et $s'=(\delta_1',\delta_2',\mathscr{L}')$ sont deux éléments distincts de $\mathscr{S}_{\rm irr}$, alors $\Delta(s)\cong\Delta(s')$ si et seulement si $s,s'\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ et $\delta_1'=x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2'=x^{-w(s)}\delta_1$.*

Remarque 0.4. — L'application $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\mapsto s'=(x^{w(s)}\delta_2,x^{-w(s)}\delta_1,\infty)$ est une involution de $\mathscr{S}_*^{\rm cris}$. Les points fixes de cette involution sont dits *exceptionnels*; ce sont les s tels que $w(s)\in\mathbf{N}-\{0\}$ et $\delta_1=x^{w(s)}\delta_2$.

Si $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est associée. Cette représentation est trianguline par construction ; réciproquement, si V est trianguline, de dimension 2, et irréductible, alors il existe $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$ tel que $V\cong V(s)$. Le résultat suivant [**10**, th. 0.8] donne une bonne idée du genre de propriétés de $V(s)$ que l'on peut lire sur s.

Proposition 0.5. — *Soit $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$.*

(i) *Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$.*

(ii) *Si* $w(\delta_1)\in\mathbf{Z}$ (i.e. si δ_1 est localement algébrique), *alors*

• *$V(s)$ est cristabéline* (i.e. devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$) *si et seulement si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$,*

• *$V(s)$ est la tordue d'une représentation semi-stable* (non cristalline) *par un caractère d'ordre fini si et seulement si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$,*

• *$V(s)$ est de Hodge-Tate si et seulement si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm HT}$ et elle est de Rham si et seulement si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm dR}$.*

0.4. La série principale localement analytique. — Remarquons que $J^*(\Pi)$ est stable par B ; c'est donc un B-module sur lequel N agit trivialement. Le th. 0.6 ci-dessous décrit ce module dans le cas de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$. Si $\eta_1,\eta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\eta_1\otimes\eta_2$ le caractère de B défini par

$$(\eta_1\otimes\eta_2)\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\big)=\eta_1(a)\eta_2(d).$$

Si $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$, on note $J^*(s)$ le B-module $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta(s)))$.

Théorème 0.6. — *Soit $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$.*

(i) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}-(\mathscr{S}_*^{\rm ng}\cap\mathscr{S}_*^{\rm HT})$ ou si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$, alors $J^*(s)\cong\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi$.*

(ii) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}\cap\mathscr{S}_*^{\rm HT}$, alors $J^*(s)=(\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi)\oplus(x^{w(s)}\delta_1^{-1}\otimes x^{-w(s)}\delta_2^{-1}\chi)$.*

(iii) *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$, alors $J^*(s) = (\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi)\oplus(x^{-w(s)}\delta_2^{-1}\otimes x^{w(s)}\delta_1^{-1}\chi)$ sauf si s est exceptionnel où ces deux caractères sont égaux et $J^*(s) = (\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi)\otimes\left(\begin{smallmatrix}1 & v_p(a/d)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.*

Si η est un caractère localement analytique de B, on note ${\rm Ind}^{\rm an}\eta$ l'induite localement analytique de B à G de η. Si Π est une représentation localement analytique de G, et si $\mu \in J^*(\Pi)$ est un vecteur propre pour l'action de B pour le caractère η (i.e. $g\cdot\mu = \eta(g)\,\mu$, si $g\in B$), alors $v\mapsto\tilde\phi_v$, où $\tilde\phi_v : G\to L$ est définie par $\tilde\phi_v(g) = \langle\mu, g\cdot v\rangle$, est un morphisme G-équivariant de Π dans ${\rm Ind}^{\rm an}\eta$. On peut utiliser cette propriété et le th. 0.6 pour décrire complètement la représentation $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$.

Si $\eta_1,\eta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $B^{\rm an}(\eta_1,\eta_2)$ la représentation localement analytique ${\rm Ind}^{\rm an}(\eta_2\otimes\eta_1\chi^{-1})$ de G. On remarque que, dans tous les cas, $\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi$ est un caractère de B apparaissant comme sous-module de $J(s)$; il existe donc un morphisme G-équivariant p_s, non identiquement nul, de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ dans $B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)$. On a alors le résultat suivant, où l'on a noté δ_s le caractère $\chi^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$ (on dit que s est *générique* si $\delta_s\notin\{x^k,\ k\in\mathbf{N}\}$ et *spécial* dans le cas contraire, ce qui inclut le cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$).

Théorème 0.7. — *Si $s = (\delta_1,\delta_2,\mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\rm irr}$, alors p_s est une surjection. De plus :*

(i) *Si s est générique, le noyau de p_s est isomorphe à $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$; on a donc une suite exacte $0\to B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)\to\mathbf{\Pi}(\Delta(s))\to B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)\to 0$.*

(ii) *Si s est spécial, alors $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ contient une sous-représentation $W(\delta_1,\delta_2)$ de dimension $k+1$. Si ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ est le quotient de $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ par $W(\delta_1,\delta_2)$, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1)) \cong \mathrm{Ext}^1(W(\delta_1,\delta_2),\mathrm{St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)),$$

et une suite exacte $0\to E_{\mathscr{L}}\to\mathbf{\Pi}(\Delta(s))\to B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)\to 0$, où $E_{\mathscr{L}}$ est l'extension de $W(\delta_1,\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ correspondant à l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ déterminée par $\mathscr{L}$.

Remarque 0.8. — (i) D'après [**24**], on a $\dim_L \mathrm{Ext}^1(B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1), B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)) = 1$, si $\delta_s\notin\{x^k,\ k\in\mathbf{N}\}$. Il en résulte que $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ est l'unique extension non triviale de $B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)$ par $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$.

(ii) Si $\delta_s = x^k$, avec $k\in\mathbf{N}$, alors $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$. L'extension de $W(\delta_1,\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ correspondant à un élément non nul ℓ de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ est celle considérée par Breuil [**5, 6**].

(iii) Dans tous les cas, la représentation unitaire $\mathbf{\Pi}(V(s))$ (dont $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ est l'ensemble des vecteurs localement analytiques) est la complétion universelle unitaire de $\mathrm{Ker}\,p_s$ (c'est la conjonction de résultats éparpillés dans la littérature, à savoir [**2**] pour le cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ non exceptionnel, [**28**] pour le cas exceptionnel, [**5, 6**] pour le cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$ et [**19**, th. 5.3.7] (qui s'appuie sur [**13**]) pour le reste).

(iv) Le théorème a aussi été démontré par Liu, Xie et Zhang [**27**]. Le point clé des deux démonstrations est le même, à savoir un dévissage du module $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$ sous la forme d'une suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathscr{R}(\delta_2) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to 0,$$

la projection de $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$ sur $\mathscr{R}(\delta_2) \boxtimes \mathbf{P}^1$ donnant naissance à l'application p_s ci-dessus. Les deux(1) stratégies pour aboutir à ce résultat sont par contre complètement orthogonales. Celle de Liu, Xie et Zhang utilise la description de $\mathbf{\Pi}(V(s))$ comme complétion universelle pour identifier un sous-module de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ et, par dualité, un quotient de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^*$. La notre utilise la détermination du module de Jacquet dual pour montrer que $B^{\rm an}(\delta_2, \delta_1)$ est un quotient de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$; elle est indépendante(2) de [**2, 5, 6, 13**] et permet en fait d'en retrouver certains résultats.

(v) Le théorème répond à des questions de Breuil et Emerton (cf. [**5**, conj. 4.4.1] et [**18**, conj. 6.7.3 et 6.7.7]). Dans les cas $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$ et $\mathscr{S}_*^{\rm ng} \cap \mathscr{S}_*^{\rm HT}$, on peut utiliser l'autre vecteur propre de $J^*(s)$ pour obtenir des renseignements supplémentaires sur $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$. Dans le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$, cela permet de démontrer (cf. prop. 4.14) une conjecture de Breuil [**2**, conj. 5.3.7 et 5.4.4] (cf. [**25**] pour une autre démonstration) .

Une analyse des composantes de Jordan-Hölder de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ couplée avec des résultats d'Emerton [**17**] permet de déterminer les vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$, et donc de retrouver le résultat [**14**, th. VI.6.50] selon lequel la correspondance locale p-adique encode la classique dans le cas de la série principale unitaire.

On note $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^{\rm alg}$ l'ensemble des vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ pour l'action de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ [si le caractère central $\delta_1\delta_2\chi^{-1}$ est localement algébrique, alors $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^{\rm alg}$ l'ensemble des vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$]. Si $k \in \mathbf{N}$, on note ${\rm Sym}^k$ la représentation algébrique de G, puissance symétrique k-ième de la représentation standard de $G \subset \mathbf{GL}_2(L)$ sur L^2 ; si η est un caractère localement constant de B, on note ${\rm Ind}^{\rm lisse}\eta$ l'induite lisse de B à G de η.

Théorème 0.9. — *Soit* $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\rm irr}$.

(i) $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^{\rm alg} \neq 0$ *si et seulement si* $s \in \mathscr{S}_*^{\rm dR}$.

(ii) *Si* $s \in \mathscr{S}_*^{\rm st}$, *alors* $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^{\rm alg} = {\rm St} \otimes {\rm Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$ *et est irréductible.*

(iii) *Si* $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$, *alors*

$$\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^{\rm alg} = \big({\rm Ind}^{\rm lisse}(|x|\delta_s x^{1-w(s)} \otimes |x|^{-1})\big) \otimes {\rm Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$$

et est irréductible, sauf si $\delta_s = x^{w(s)-1}$ *ou si* $\delta_s = |x|^{-2}x^{w(s)-1}$ *auquel cas* $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))^{\rm alg}$ *est une extension de* ${\rm Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$ *par* ${\rm St} \otimes {\rm Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$.

(1) Dospinescu [**16**] a trouvé une démonstration directe de la stabilité du sous-module $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes \mathbf{P}^1$ par G, ce qui fournit une troisième manière d'aboutir au résultat.

(2) Pas totalement car l'existence de la correspondance de Langlands locale p-adique se démontre par prolongement analytique à partir du cas de la série principale unitaire...

0.5. Céoukonfaikoi

Cet article contient quatre chapitres de natures assez distinctes et un appendice complétant la première partie.

• Le premier chapitre est consacré à une nouvelle démonstration de la prop. 0.2. Cette démonstration reprend les techniques d'analyse fonctionnelle p-adique déjà utilisées par Chenevier [**8**] pour une version en famille. Nous dévissons la situation complètement de manière à obtenir une description des extensions de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ la mieux adaptée possible à la description des vecteurs localement analytiques des représentations de la série principale. Nous avons aussi un peu modifié le point de vue en remplaçant le complexe $0 \to D \to D \oplus D \to D \to 0$ habituel par la cohomologie du semi-groupe A^+ et sa décomposition issue de la suite spectrale de Hochshild-Serre déduite de la suite exacte $1 \to \Pi^+ \to A^+ \to A^0 \to 1$. (L'appendice contient un certain nombre de sorites sur ce sujet ; en particulier des formules explicites (lemme A.2) concernant la dualité.) C'est relativement cosmétique comme modification, mais cela a l'avantage de mettre sur le même plan les cas $p = 2$ et $p \neq 2$; cela supprime aussi des problèmes de normalisation induits par le choix d'un générateur de $\mathbf{Z}_p^*$.

• Le second chapitre regroupe des résultats de [**30**] concernant la série principale analytique. Ils sont complétés par la détermination des extensions de $W(\delta_1, \delta_2)$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$.

• Le troisième chapitre est consacré à l'étude du module $\Delta \boxtimes \{0\} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\Delta)$, si Δ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{R}$. Ceci est crucial pour la détermination(3) du module de Jacquet dual $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))$ de $\mathbf{\Pi}(\Delta)$, si Δ est de dimension 2. Notons que l'étude de $D^{\mathrm{nr}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(D)$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, joue un grand rôle dans [**12**].

• Dans le dernier chapitre, on utilise les résultats du troisième pour déterminer le module de Jacquet dual de $\mathbf{\Pi}(\Delta)$, puis on utilise ce que l'on obtient pour dévisser le module $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$. Enfin, on utilise les résultats du second pour décrire le module $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$.

0.6. Remerciements

Cet article a pour origine une question que m'a posée Matthew Emerton pendant l'École d'été de 2008. Je le remercie de me l'avoir mentionnée. Je remercie le programme CEFIPRA d'avoir financé le séjour au Tata Institute en juillet-août 2010 au cours duquel une première version de cet article a été terminée. Je remercie aussi les universités UCLA et UC Berkeley (et l'Institut Miller qui a financé le séjour à Berkeley) pour leur hospitalité en janvier-février et à l'automne 2011 ; des parties conséquentes de cet article y ont été écrites.

(3) Dospinescu [**16**] a remarqué que l'on pouvait aussi utiliser l'action infinitésimale [**15**] de N au lieu de φ pour calculer $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))$.

1. Cohomologie de $\mathscr{R}(\delta)$

Ce chapitre est consacré à la démonstration d'une version renforcée (th. 1.38) du (ii) de la prop. 0.2 qui décrit l'espace $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ des extensions de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, si δ_1,δ_2 sont des caractères de $\mathbf{Q}_p^*$. Cette démonstration repose sur le dévissage $0\to\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\to\mathscr{R}\to\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\chi^{-1}\to 0$ de $\mathscr{R}$ fourni par le dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique (n° 1.2), et sur l'interprétation de $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ en terme de cohomologie du semi-groupe A^+ que l'on dévisse en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre (n° 1.3).

1.1. L'anneau de Robba $\mathscr{R}$. — Soit $(\zeta_{p^n})_{n\geq 0}$ un système compatible de racines p^n-ièmes de l'unité (i.e. $\zeta_{p^{n+1}}^p=\zeta_{p^n}$, $\zeta_1=1$ et $\zeta_p\neq 1$; si $p=2$, on part de $\zeta_1=-1$ au lieu de $\zeta_1=1$). Si $n\in\mathbf{N}$, on note F_n le corps $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ (et donc $F_0=\mathbf{Q}_p$), et on pose $L_n=L\otimes_{\mathbf{Q}_p}F_n$.

Si $n\geq 1$, on pose $r_n=v_p(\zeta_{p^n}-1)=\frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$ (si $p=2$, on pose $r_n=\frac{1}{2^n}$), et on note $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ l'anneau des fonctions L-analytiques sur la couronne $C_n=\{z\in\mathbf{C}_p,\ 0<v_p(z)\leq r_n\}$ que l'on voit comme un sous-ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$ à coefficients dans L. Alors $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ est un anneau de Fréchet-Stein (tout idéal fermé est principal), la topologie de Fréchet étant définie par la famille de valuations $v^{[r_b,r_n]}$, pour $b\geq n$, avec, si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$,

$$v^{[r_b,r_n]}=\inf_{r_b\leq v_p(z)\leq r_n}v_p(f(z))=\min\big(\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k)+r_bk),\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k)+r_nk)\big).$$

On définit l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ comme la réunion des $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ pour $n\geq 1$; on le munit de la topologie de la limite inductive. On note $\mathscr{R}^+$ l'intersection de $\mathscr{R}$ et $L[[T]]$ (c'est l'anneau des fonctions L-analytiques sur le disque unité $\{z,\ v_p(z)>0\}$).

On munit l'anneau $\mathscr{R}$ d'un frobenius φ : c'est un endomorphisme de L-algèbres, continu, envoyant T sur $(1+T)^p-1$. On munit aussi $\mathscr{R}$ d'une action continue de Γ, respectant les structures de L-algèbres, σ_a envoyant T sur $(1+T)^a-1$. Les actions de φ et Γ commutent entre elles.

On dispose d'un inverse à gauche ψ de φ, défini par $\psi(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(f_i))=f_0$. Cet inverse commute à Γ, et on a $\psi(f\varphi(g))=g\psi(f)$, pour tous f,g. En particulier,

$$\psi^k\big((1+T)^b\varphi^k(z)\big)=\psi^k((1+T)^b)z=\begin{cases}(1+T)^{b/p^k}z & \text{si } b\in p^k\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } b\notin p^k\mathbf{Z}_p.\end{cases}$$

On note ∂ l'opérateur $(1+T)\frac{d}{T}$. On a $\partial\circ\varphi=p\,\varphi\circ\partial$, $\partial\circ\psi=p^{-1}\,\psi\circ\partial$ et $\partial\circ\sigma_a=a\,\sigma_a\circ\partial$, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$.

Soit $t=\log(1+T)$. C'est un élément de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\partial t=1$, $\varphi(t)=pt$, $\psi(t)=p^{-1}t$ et $\sigma_a(t)=a\,t$ si $a\in\mathbf{Z}_p^*$. On note $L\{\{t\}\}$ le sous-anneau de $\mathscr{R}^+$ des $\sum_{n\in\mathbf{N}}a_nt^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de L telle que $\sum_{n\in\mathbf{N}}a_nz^n$ converge pour tout $z\in\mathbf{C}_p$; ce sous-anneau est stable par ∂, φ, ψ et Γ.

Si $n \geq 1$, on note ι_n l'injection de $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ dans $L_n[[t]]$ envoyant f sur $f(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$. Alors ι_n commute à Γ, et on a $\iota_{n+1} \circ \varphi = \iota_n$ et $\iota_n \circ \psi = \mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n} \circ \iota_{n+1}$.

Si $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in \mathscr{R}$, on pose $\mathrm{rés}_0(f\, dT) = a_{-1}$.

Proposition 1.1. — *Si $f \in \mathscr{R}$, on a :*
- $\mathrm{rés}_0\big(\sigma_a(f)\frac{dT}{1+T}\big) = a^{-1}\mathrm{rés}_0\big(f\frac{dT}{1+T}\big)$, *pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p^*$,
- $\mathrm{rés}_0\big(\varphi(f)\frac{dT}{1+T}\big) = \mathrm{rés}_0\big(\psi(f)\frac{dT}{1+T}\big) = \mathrm{rés}_0\big(f\frac{dT}{1+T}\big)$,
- $\mathrm{rés}_0\big(\partial f\frac{dT}{1+T}\big) = \mathrm{rés}_0\big(df\big) = 0$.

Démonstration. — Pour les deux premiers points, cf. [**12**, prop. I.2.2] ; le dernier est immédiat.

1.2. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique

1.2.1. Quelques faisceaux P^+-équivariants sur $\mathbf{Z}_p$. — On note $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans L, et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ le dual topologique de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$; c'est l'espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans L.

Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, on définit sa transformée d'Amice A_μ par la formule

$$A_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\,\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n}\,\mu\Big)T^n \in L[[T]].$$

Si $f \in \mathscr{R}$, on définit $\phi_f : \mathbf{Z}_p \to L$ par la formule

$$\phi_f(x) = \mathrm{rés}_0\big((1+T)^{-x} f(T)\,\tfrac{dT}{1+T}\big).$$

Proposition 1.2. — (i) *$\mu \mapsto A_\mu(T)$ induit un isomorphisme $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \cong \mathscr{R}^+$.*

(ii) *Le sous-anneau $L\{\{t\}\}$ de $\mathscr{R}^+$ est l'image de l'espace des distributions à support $\{0\}$ par $\mu \mapsto A_\mu$.*

(iii) *$f \mapsto \phi_f$ induit un isomorphisme $\mathscr{R}/\mathscr{R}^+ \cong \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$.*

(iv) *On a $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi_f \mu = \mathrm{rés}_0\big(\sigma_{-1}(f) A_\mu \frac{dT}{1+T}\big)$ si $f \in \mathscr{R}$ et $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$.*

Démonstration. — C'est une combinaison du th. I.1.4 de [**14**] et de la prop. II.4.6 de [**11**], à ceci près que l'on a changé le signe de x dans la définition de ϕ_f.

Soit P^+ le semi-groupe $\big(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$. On munit $\mathscr{R}$ d'une action de P^+ en posant

$$\big(\begin{smallmatrix}p^k a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot f = (1+T)^b \varphi^k \circ \sigma_a(f), \quad \text{si } k \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{Z}_p^* \text{ et } b \in \mathbf{Z}_p.$$

On munit $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ d'actions de P^+ en posant :

$$\big(\big(\begin{smallmatrix}p^k a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\phi\big)(x) = \begin{cases}\phi(\frac{x-b}{p^k a}), & \text{si } x \in b + p^k\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } x \notin b + p^k\mathbf{Z}_p,\end{cases} \qquad \int_{\mathbf{Z}_p} \phi\ \big(\begin{smallmatrix}p^k a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(p^k ax+b)\,\mu.$$

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on peut voir δ comme un caractère de P^+ en posant $\delta\big(\begin{smallmatrix}a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) = \delta(a)$. Si M est un P^+-module, on note $M \otimes \delta$ le P^+ module M avec action de P^+ tordue par δ. (Le P^+-module $\mathscr{R} \otimes \delta$ est en général noté $\mathscr{R}(\delta)$.)

Proposition 1.3. — *Les applications $\mu \mapsto A_\mu$ et $f \mapsto \phi_f$ induisent la suite exacte suivante de P^+-modules topologiques :*

$$0 \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \to \mathscr{R} \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \chi^{-1} \to 0.$$

Démonstration. — La P^+-équivariance est une conséquence des calculs suivants qui utilisent à plein la prop. 1.1 (remarquons que $\chi^{-1}(a) = a^{-1}$ si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $\chi^{-1}(p) = 1$) :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^{p^k a x + b}\, \mu = (1+T)^b \varphi^k \circ \sigma_a \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\, \mu \Big),$$

$$\begin{aligned} \phi_{\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z}(x) &= \mathrm{rés}_0 \Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z \, \tfrac{dT}{1+T} \Big) = \mathrm{rés}_0 \Big(\sigma_a ((1+T)^{(b-x)/a} \varphi^k(z)) \, \tfrac{dT}{1+T} \Big) \\ &= a^{-1} \mathrm{rés}_0 \Big(\psi^k ((1+T)^{(b-x)/a} \varphi^k(z)) \, \tfrac{dT}{1+T} \Big) \\ &= \begin{cases} a^{-1} \mathrm{rés}_0 \Big(((1+T)^{(b-x)/p^k a} z) \, \tfrac{dT}{1+T} \Big) = \chi^{-1}(p^k a) \phi_z \big(\tfrac{b-x}{p^k a} \big) & \text{si } x \in b + p^k \mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{si } x \in b + p^k \mathbf{Z}_p. \end{cases} \end{aligned}$$

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, on note $\mathbf{1}_U$ sa fonction caractéristique. On peut décomposer U comme une réunion disjointe finie $\coprod_{i \in I} i + p^n \mathbf{Z}_p$, et on définit Res_U sur $\mathscr{R}$ par la formule $\mathrm{Res}_U = \sum_{i \in I} \mathrm{Res}_{i + p^n \mathbf{Z}_p}$, où l'on a posé $\mathrm{Res}_{i + p^n \mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^n \circ \psi^n \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. (Ceci ne dépend pas du choix de la décomposition [**12**, § III.1].) On note $\mathscr{R} \boxtimes U$ l'image de Res_U.

La restriction Res_U, les opérateurs ψ, ∂, et la multiplication par t s'interprètent aussi simplement en termes du dictionnaire.

Proposition 1.4. — (i) *Si $f \in \mathscr{R}$, on a :*
- $\phi_{\psi(f)}(x) = (\psi(\phi_f))(x)$, *avec* $(\psi(\phi))(x) = \phi(px)$,
- $\phi_{\mathrm{Res}_U f} = \mathrm{Res}_U \phi_f$, *avec* $\mathrm{Res}_U \phi = \mathbf{1}_U \phi$,
- $\phi_{\partial f}(x) = x \phi_f(x)$,
- $\phi_{tf}(x) = -\phi'_f(x)$.

(ii) *Si $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, on a :*
- $\psi(A_\mu) = A_{\psi(\mu)}$, *où* $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi\big(\frac{x}{p}\big)\, \mu$ *et donc* $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \psi(\mu) = \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} \mu$,
- $\mathrm{Res}_U A_\mu = A_{\mathrm{Res}_U \mu}$, *avec* $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\ \mathrm{Res}_U \mu = \int_U \phi\, \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U \phi\, \mu$,
- $\partial A_\mu = A_{x\mu}$.
- *Si* $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, *alors* $t A_\mu = A_{\mathrm{d}\mu}$, *où* $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi'(x)\, \mu$.

Démonstration. — Pour le (ii), voir [**11**, § II.4]. En ce qui concerne le (i), on a :
- $\phi_{\psi(f)}(x) = \mathrm{rés}_0 \big((1+T)^{-x} \psi(f) \, \frac{dT}{1+T} \big) = \mathrm{rés}_0 \big(\psi((1+T)^{-px} f) \, \frac{dT}{1+T} \big) = \mathrm{rés}_0 \big((1+T)^{-px} f \, \frac{dT}{1+T} \big) = \phi_f(px)$.
- $\phi_{\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} f}(x) = \phi_{\varphi^n \psi^n(f)}(x) = \begin{cases} \phi_{\psi^n(f)}(x/p^n) & \text{si } x \in p^n \mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{si } x \notin p^n \mathbf{Z}_p, \end{cases} = (\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \phi)(x)$.

Ceci démontre le résultat si $U = p^n \mathbf{Z}_p$. Le cas $U = i + p^n \mathbf{Z}_p$ s'en déduit, grâce à la prop. 1.3 en conjuguant par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et le cas général par linéarité.

- $\phi_{\partial f}(x) = \mathrm{rés}_0\big((\partial((1+T)^{-x}f) + x(1+T)^{-x}f)\,\frac{dT}{1+T}\big) = x\phi_f(x)$.
- $\phi_{tf}(x) = \mathrm{rés}_0\big((1+T)^{-x}tf\,\frac{dT}{1+T}\big) = -\frac{d}{dx}\mathrm{rés}_0\big((1+T)^{-x}f\,\frac{dT}{1+T}\big) = -\phi'_f(x)$.

Remarque 1.5. — Il ressort de la prop. 1.4 que $U \mapsto \mathscr{R}\boxtimes U$ est un faisceau sur $\mathbf{Z}_p$, équivariant pour l'action de P^+ (agissant sur $\mathbf{Z}_p$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x = ax+b$), et que la suite exacte de la prop. 1.3 est une suite exacte de faisceaux P^+-équivariants sur $\mathbf{Z}_p$.

Exercice 1.6. — (i) Montrer que, si $f = -\frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$, alors $\phi_f(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}x^{-1}$ (calculer ∂f).

(ii) On rajoute à $\mathscr{R}$ un élément $\log T$ vérifiant $\varphi(\log T) = p\log T + \log\frac{\varphi(T)}{T^p}$, $\psi(\log T) = \frac{1}{p}\log T$ et $\partial \log T = 1+\frac{1}{T}$. Vérifier que la formule $\phi_{\log T} = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}x^{-1}$ est compatible avec le (i) et les formules de la prop. 1.4.

1.2.2. Dualité. — On définit un accouplement $\{\ ,\ \}$ sur $\mathscr{R}(\delta)\times\mathscr{R}(\chi\delta^{-1})$ par la formule
$$\{f\otimes\delta, g\otimes\chi\delta^{-1}\} = \mathrm{rés}_0\big(\sigma_{-1}(f)g\,\tfrac{dT}{1+T}\big).$$

Proposition 1.7. — *L'accouplement $\{\ ,\ \}$ identifie $\mathscr{R}(\delta)$ au dual topologique de $\mathscr{R}(\chi\delta^{-1})$. De plus, si $z\in\mathscr{R}(\delta)$ et $z'\in\mathscr{R}(\chi\delta^{-1})$, alors :*
- $\{g\cdot z, g\cdot z'\} = \{z,z'\}$ *pour tout* $g\in P^+$,
- $\{\psi(z),z'\} = \{z,\varphi(z')\}$ *et* $\{z,\psi(z')\} = \{\varphi(z),z'\}$,
- $\{\mathrm{Res}_U z, z'\} = \{\mathrm{Res}_U z, \mathrm{Res}_U z'\} = \{z, \mathrm{Res}_U z'\}$ *pour tout ouvert compact U de* $\mathbf{Z}_p$,
- $\{\partial z, z'\} = \{z, \partial z'\}$, *où l'on a posé* $\partial(f\otimes\eta) = (\partial f)\otimes\eta$ *si* $\eta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$.
- $\{tz,z'\} = -\{z,tz'\}$.

Démonstration. — Pour l'identification avec le dual et les deux premiers points, cf. [**12**, prop. III.2.3] et [**14**, § I.1]. La propriété d'adjonction de Res_U pour U quelconque suit du cas particulier $U = i+p^n\mathbf{Z}_p$, où l'on a $\mathrm{Res}_U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^n\circ\psi^n\circ\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, pour lequel on peut appliquer le premier point puis deux fois le second puis de nouveau le premier ; la formule $\{\mathrm{Res}_U z, z'\} = \{\mathrm{Res}_U z, \mathrm{Res}_U z'\}$ suit de la propriété d'adjonction et de ce que Res_U est un projecteur [$\mathrm{Res}_U(\mathrm{Res}_U(z)) = \mathrm{Res}_U(z)$].

Le quatrième point suit de ce que $\partial\circ\sigma_{-1} = -\sigma_{-1}\circ\partial$ et $(\partial f)\,g + f\,(\partial g) = \partial(fg)$, ce qui fait que l'on a, si $z = f\otimes\delta$ et $z' = g\otimes\chi\delta^{-1}$,
$$-\{\partial z, z'\} + \{z,\partial z'\} = \mathrm{rés}_0\big(\partial(\sigma_{-1}(f)g)\,\tfrac{dT}{1+T}\big) = 0.$$

Enfin, le cinquième est immédiat sur la formule définissant $\{\ ,\ \}$ si on remarque que $\sigma_{-1}(t) = -t$.

Remarque 1.8. — L'accouplement $\{\ ,\ \}$ est nul sur $\mathscr{R}^+(\delta)\times\mathscr{R}^+(\chi\delta^{-1})$. Il induit donc un accouplement sur $\mathscr{R}^+(\delta)\times(\mathscr{R}/\mathscr{R}^+)(\chi\delta^{-1}) \cong (\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)\times(\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})$. Le (iv) de la prop. 1.2 montre que l'accouplement ainsi obtenu est l'accouplement naturel donné par l'intégration. Nous laissons au lecteur le plaisir d'expliciter ce que deviennent les formules de la prop. 1.7 quand on les traduit en termes d'intégration sur $\mathbf{Z}_p$.

Terminons ce § par une démonstration du théorème d'Amice (cor. 1.11) par dualité. Si $h \in \mathbf{N}$, soit $\widehat{\mathrm{PD}}_h$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $L[[T]]$ des $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n T^n/[\frac{n}{p^h}]!$, où les a_n appartiennent à $\mathscr{O}_L$.

Lemme 1.9. — *$\widehat{\mathrm{PD}}_h$ est le sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de $\widehat{\mathrm{PD}}_0$ engendré par $\varphi^h(\widehat{\mathrm{PD}}_0)$.*

Démonstration. — Comme $\varphi^h(T) - T^{p^h} \in p\mathscr{O}_L[[T]]$, la matrice exprimant les $\frac{\varphi^h(T)^n}{n!}$ en termes des $\frac{T^{np^h}}{n!}$ est triangulaire supérieure, à coefficients dans $\mathscr{O}_L[[T]]$, avec des 1 sur la diagonale. Le résultat s'en déduit.

Si $h \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ l'ensemble des $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$, analytiques sur $a + p^h\mathbf{Z}_p$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p$, et on note LA_h^0 la boule unité de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$: on a $\phi \in \mathrm{LA}_h^0$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p$ (il suffit de le vérifier pour a décrivant un système de représentants modulo p^h), la fonction $x \mapsto \phi(a+p^h x)$ est de la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i x^i$, avec $\alpha_i \in \mathscr{O}_L$ pour tout i et $\alpha_i \to 0$ quand $i \to +\infty$.

Proposition 1.10. — *Si $f = \sum_{n\geq 1} a_n T^{-1}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$v_p(a_n) \geq v_p\big([\frac{n}{p^h}]!\big)$ et $v_p(a_n) - v_p\big([\frac{n}{p^h}]!\big) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.*

(ii) *$z \mapsto \{z, f\}$ s'étend en une forme linéaire continue de $\widehat{\mathrm{PD}}_h$ dans $\mathscr{O}_L$.*

(iii) *$\phi_f \in \mathrm{LA}_h^0$.*

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) est immédiate. Dans le cas $h = 0$, l'équivalence entre (ii) et (iii) vient de ce que la matrice des $n!\binom{x}{n}$ en fonction des x^n est triangulaire supérieure, à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$, avec des 1 sur la diagonale. Dans le cas général, le lemme 1.9 implique que (ii) équivaut à $z \mapsto \{(1+T)^i\varphi^h(z), f\} \in \mathscr{O}_L$ et donc à ce que $z \mapsto \{z, \psi^h((1+T)^{-i}f)\} \in \mathscr{O}_L$, pour tout $z \in \widehat{\mathrm{PD}}_0$ et tout $i \in \mathbf{Z}_p$. Or le cas $h = 0$ montre que ceci équivaut à ce que $\phi_{\psi^h((1+T)^{-i}f)} \in \mathrm{LA}_0$, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p$, et comme $\phi_{\psi^h((1+T)^{-i}f)}(x) = \phi_f(p^h x + i)$, cela équivaut à $\phi_f \in \mathrm{LA}_h^0$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 1.11. — *Les $[\frac{n}{p^h}]!\binom{x}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$.*

Démonstration. — C'est une traduction de l'équivalence entre les (i) et (iii) de la prop. 1.10.

1.3. Extensions de (φ,Γ)-modules et cohomologie de A^+

On s'intéresse aux (φ,Γ)-modules extensions de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$. Le calcul du groupe $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1)) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},\mathscr{R}(\delta))$, avec $\delta = \delta_2^{-1}\delta_1$, a été effectué dans [**10**] ; ces résultats ont été complétés par Liu [**26**] et repris par Chenevier [**8**] en utilisant le dictionnaire d'analyse p-adique pour dévisser le module $\mathscr{R}(\delta)$. Dans ce qui suit, nous poussons la méthode de Chenevier un peu plus loin, ce qui nous permet de donner une description plus précise du groupe $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$, description qui nous sera utile pour déterminer les vecteurs localement analytiques dans le cas spécial.

Pour ce faire, remarquons qu'un (φ,Γ)-module est un A^+-module, où A^+ est le sous-semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ de P^+, et qu'on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},\mathscr{R}(\delta))\cong H^1(A^+,\mathscr{R}(\delta))$: si D est une extension de $\mathscr{R}$ par $\mathscr{R}(\delta)$, et si $e\in D$ est un relèvement de $1\in\mathscr{R}$, alors $g\mapsto(g-1)\cdot e$ est un 1-cocycle sur A^+ qui est un cobord si et seulement si l'extension est scindée. Le calcul de $H^i(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ se fait en utilisant la suite exacte $0\to\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta\to\mathscr{R}(\delta)\to\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\chi^{-1}\delta\to 0$ de A^+-modules et les résultats suivants pour lesquels nous renvoyons à l'appendice A.

On a $A^+=\Phi^+\times A^0$, où Φ^+ est le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}p^{\mathbf{N}} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et A^0 le groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On note $\varphi=\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ le générateur de Φ et σ_a, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, l'élément $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Tout élément g de A^+ s'écrit alors, de manière unique, sous la forme $\varphi^{k(g)}\sigma_{a(g)}=\sigma_{a(g)}\varphi^{k(g)}$, avec $k(g)\in\mathbf{N}$ et $a(g)\in\mathbf{Z}_p^*$. Enfin, on peut décomposer A^0 sous la forme $\Delta\times A^1$, où Δ est un groupe fini et A^1 est un groupe topologiquement isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ et dont on note σ_u un générateur (alors u est un générateur de $1+2p\mathbf{Z}_p$).

Si M est un L-espace vectoriel topologique muni d'une action continue de A^+, la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit des isomorphismes

$$H^0(A^+,M)\cong H^0(A^0,H^0(\Phi^+,M))\ \text{ et }\ H^2(A^+,M)\cong H^1(A^0,H^1(\Phi^+,M)),$$

et une suite exacte

$$0\to H^1(A^0,H^0(\Phi^+,M))\to H^1(A^+,M)\to H^0(A^0,H^1(\Phi^+,M))\to 0.$$

De plus, $H^i(A^0,M_0)=H^0(\Delta,H^i(A^1,M_0))$, si $M_0=H^j(\Phi^+,M)$ et $j=0,1$. Comme $H^0(\Phi^+,M)$ et $H^1(\Phi^+,M)$ s'identifient respectivement au noyau et conoyau de $\varphi-1$ agissant sur M, et $H^0(A^1,M_0)$ et $H^1(A^1,M_0)$ à ceux de σ_u-1 agissant sur M_0, cela donne une description parfaitement concrète des groupes $H^i(A^+,M)$.

Par ailleurs, si M et M^* sont en dualité, M^* est muni d'actions des semi-groupes opposés $\Phi^-=\psi^{\mathbf{N}}$ et A^- de Φ^+ et A^+, et on a le même dévissage de $H^j(A^-,M^*)$ que ci-dessus en remplaçant A^+,Φ^+,M par A^-,Φ^-,M^*.

Proposition 1.12. — *On suppose que :*

- $(\varphi-1)\cdot M$ *et* $(\psi-1)\cdot M^*$ *sont fermés dans* M *et* M^**,*
- $(\sigma_u-1)\cdot M_0$ *est fermé dans* M_0*, si* M_0 *est un des modules* $H^j(\Phi^+,M)$*, pour* $j=0,1$*, et* $H^j(\Phi^-,M^*)$*, pour* $j=0,1$.

Alors on a des identifications naturelles :

$$H^j(A^-,M^*)\cong H^{2-j}(A^+,M)^*\ \text{ et }\ H^j(A^+,M)\cong H^{2-j}(A^-,M^*)^*,\quad \textit{pour } j=0,1,2.$$

1.4. Cohomologie de Φ^+ et Φ^-. — Soit $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$. On a déjà expliqué comment voir δ comme un caractère de $A^+\subset P^+$; on peut aussi le voir comme un caractère de A^- en posant $\delta(\psi^n\sigma_a)=\delta(p)^{-n}\delta(a)$. Le dual du A^+-module $M\otimes\delta$ est alors le A^--module $M^*\otimes\delta^{-1}$.

La proposition suivante détermine la structure de $H^i(X,M)$, comme A^0 module, si $X=\Phi,\Phi^-$ et $M=\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta$ ou $M=\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta$ (si η est un caractère de $\mathbf{Z}_p^*$, on note $L(\eta)$ le L-espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\sigma_a\in A^0$ agit par multiplication par $\eta(a)$). On a bien évidemment $H^i(X,M)=0$, si $i\neq 0,1$.

Proposition 1.13. — *Les images de $\varphi-1$ et $\psi-1$ sont fermées dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1}$. De plus :*

(i) $H^0(\Phi^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)=0$ *et* $H^1(\Phi^-,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})=0$.

(ii) *Si* $\delta(p)\notin\{p^i,\ i\in\mathbf{N}\}$, *alors*
- $H^0(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})=H^1(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})=0$,
- $H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)\cong\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)\otimes\delta$ *et* $H^0(\Phi^-,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})\cong\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)\otimes\delta^{-1}$,
- $H^0(\Phi^-,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)=H^1(\Phi^-,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)=0$.

(iii) *Si* $\delta(p)=p^i$, *avec* $i\in\mathbf{N}$, *alors*
- $H^0(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})\cong H^1(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})\cong L(x^i\delta^{-1})$,
- $H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)$ *et* $H^0(\Phi^-,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})$ *vivent dans des suites exactes*

$$0\to L(x^{-i}\delta)\longrightarrow\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)\otimes\delta\longrightarrow H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)\longrightarrow L(x^{-i}\delta)\longrightarrow 0$$
$$0\to L(x^{i}\delta^{-1})\longrightarrow H^0(\Phi^-,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})\longrightarrow\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)\otimes\delta^{-1}\longrightarrow L(x^{i}\delta^{-1})\to 0$$

- $H^0(\Phi^-,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)\cong H^1(\Phi^-,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)\cong L(x^{-i}\delta)$.

Démonstration. — $H^0(\Phi^+,M\otimes\delta)$ et $H^0(\Phi^-,M\otimes\delta)$ sont les noyaux de $\delta(p)\varphi-1$ et $\delta(p)^{-1}\psi-1$ agissant sur M, et $H^1(\Phi^+,M\otimes\delta)$ et $H^1(\Phi^-,M\otimes\delta)$ sont les conoyaux de $\delta(p)\varphi-1$ et $\delta(p)^{-1}\psi-1$ agissant sur M. La proposition est donc la combinaison des lemmes 1.16, 1.18, 1.19 et 1.20 ci-dessous.

Remarque 1.14. — (i) Dans le cas $\delta(p)=p^i$, avec $i\in\mathbf{N}$, le sous-espace $L(x^{-i}\delta)$ de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)\otimes\delta$ est la droite engendrée par $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}x^i$, l'application de $H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)$ dans $L(x^{-i}\delta)$ est celle qui envoie le cocyle $g\mapsto\phi_g$ sur $\phi_g^{(i)}(0)$. Le sous-espace $L(x^i\delta^{-1})$ de $H^0(\Phi^-,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})$ est la droite engendrée par $\mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$, l'application de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)\otimes\delta^{-1}$ dans $L(x^i\delta^{-1})$ est $\mu\mapsto\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\mu$.

(ii) Les modules $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1}$ sont duaux l'un de l'autre. Comme les images de $\varphi-1$ et $\psi-1$ sont fermées, on sait a priori que $H^j(\Phi^\pm,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta)$ et $H^{1-j}(\Phi^\mp,\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta^{-1})$ sont duaux l'un de l'autre. Cela peut se vérifier sur la description qu'en donne la proposition.

Dans tous les énoncés qui suivent, « isomorphisme » signifie « isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques ». Grâce au théorème de l'image ouverte pour les banach et les fréchets, il suffit en général de vérifier la bijectivité (la continuité est le plus souvent claire) pour prouver qu'un morphisme L-linéaire est un isomorphisme.

Lemme 1.15. — (i) *Soit E un L-espace vectoriel topologique. Si X est un sous-espace fermé, de codimension finie, de E, alors tout sous-espace de E qui contient X est fermé dans E.*

(ii) *Si E est un L-banach (ou, plus généralement, un L-fréchet), et si $u : E \to E$ est continue, alors* $\mathrm{Im}(u)$ *est fermée dans E si elle est de codimension finie.*

Démonstration. — Le (i) suit juste de ce que E/X est séparé (puisque X est fermé) et de dimension finie, et donc tout sous-espace de E/X est fermé.

Pour démontrer le (ii), on choisit un supplémentaire F de $\mathrm{Im}(u)$ dans E. L'hypothèse implique que F est de dimension finie et donc est un banach (ou un fréchet si l'on préfère). L'application $\mathrm{id} \oplus u : F \oplus E \to E$ est surjective, et si on note G le noyau de u, elle induit un isomorphisme de $F \oplus E/G \cong F \oplus \mathrm{Im}(u)$ sur E, ce qui permet de conclure puisque $\mathrm{Im}(u)$ est fermée dans $F \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Lemme 1.16. — *Soit $\alpha \in L^*$.*

(i) *Si $\alpha \notin \{p^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $1 - \alpha\psi : \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\alpha = p^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, le noyau de $1 - \alpha\psi : \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est $L \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i$ et $1 - \alpha\psi$ induit un isomorphisme de $\{\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p),\ \phi^{(i)}(0) = 0\}$ sur lui-même.*

Démonstration. — Si ϕ est dans le noyau de $1 - \alpha\psi$, c'est que $\phi(x) = \alpha\phi(px)$, pour tout x. Alors $\phi(x) = \alpha^n \phi(p^n x)$, pour tout x, ce qui montre que ϕ est analytique sur $\mathbf{Z}_p$ tout entier, et que si $\phi(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ sur $\mathbf{Z}_p$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i (1 - \alpha p^i) x^i$ est identiquement nul sur $\mathbf{Z}_p$. Ceci implique que $a_i(1 - \alpha p^i) = 0$, pour tout i ; on en déduit que le noyau est nul si $\alpha \notin \{p^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$, et que c'est $L \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i$, si $\alpha = p^{-i}$ avec $i \in \mathbf{N}$.

Maintenant, soit $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, et soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $k + v_p(\alpha) > 0$. On peut écrire ϕ sous la forme $\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \phi_k$, où ϕ_k a un zéro d'ordre $\geq k$ en zéro. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \phi_k(p^n x)$ converge dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ et la somme g vérifie $(1 - \alpha\psi) \cdot g = \phi_k$. Par ailleurs, si $p^i \alpha \neq 1$, on a $(1 - \alpha\psi)(\frac{a_i}{1 - p^i \alpha} \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i) = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i$. Il s'ensuit que $1 - \alpha\psi$ est surjectif si $\alpha \notin \{p^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$ et que ϕ est dans l'image de $1 - \alpha\psi$ si et seulement si $a_i = 0$ si $\alpha = p^{-i}$. On en déduit le résultat.

Lemme 1.17. — *Soit $\alpha \in L^*$.*

(i) *Si $\alpha \notin \{p^i,\ i \in \mathbf{N}\}$, il existe $u : \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, linéaire continu, tel que $u \circ (1 - \alpha\varphi)$ soit l'identité sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$.*

(ii) *Si $\alpha = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, il existe $u : \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, linéaire continu, tel que l'image de $u \circ (1 - \alpha\varphi) - 1$ soit contenue dans $L \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i$.*

Démonstration. — Soit k tel que $k - v_p(\alpha) > 0$. Si $\phi \in \mathrm{LA}$ (resp. $\phi \in \mathrm{LA}$ vérifie $\phi^{(i)}(0)$, si $\alpha = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$), on peut écrire ϕ, de manière unique, sous la forme $\sum_{j=0}^{k-1} a_j (1 - \alpha\varphi) \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i + \phi_k$, où ϕ_k a un zéro d'ordre k en 0 (avec $a_i = 0$ si $\alpha = p^i$). La série $-\sum_{n \geq 1} \alpha^{-n} \psi^n(\phi_k)$ converge dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, ce qui permet de définir u par la formule $u(\phi) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i - \sum_{n \geq 1} \alpha^{-n} \psi^n(\phi_k)$. Pour vérifier que $u \circ (1 - \alpha\varphi)$ vérifie les propriétés désirées, il suffit alors de prouver que $u\circ(1-\alpha\varphi)\cdot f=f$ si f a un zéro d'ordre au moins k car le résultat est évident pour un polynôme de degré $\leq k-1$. Or, dans ce cas, $\phi=(1-\alpha\varphi)f$ a un zéro d'ordre au moins k en 0, et donc $\phi=\phi_k$. Comme $(1-\alpha\varphi)f(x)=f(x)-\alpha\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}f\big(\frac{x}{p}\big)$, et donc $\psi^n((1-\alpha\varphi)f)(x)=f(p^nx)-\alpha f(p^{n-1}x)$ si $n\geq 1$, on obtient :

$$u(\phi)(x)=-\Big(\sum_{n\geq 1}\alpha^{-n}(f(p^nx)-\alpha f(p^{n-1}x))\Big)=\sum_{n\geq 0}\alpha^{-n}f(p^nx)-\sum_{n\geq 1}\alpha^{-n}f(p^nx)=f(x).$$

On en déduit le résultat.

Lemme 1.18. — *Soit $\alpha\in L^*$. Alors $1-\alpha\varphi:\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\to\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est injectif et son image est fermée.*

De plus :

- *si $\alpha\notin\{p^i,\ i\in\mathbf{N}\}$, alors $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)$ est un supplémentaire de $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$.*
- *Si $\alpha=p^i$, avec $i\in\mathbf{N}$, alors $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)\cap(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est la droite $L\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}x^i$ et $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)+(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est l'orthogonal de $\mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$.*

Démonstration. — Si ϕ est dans le noyau de $1-\alpha\varphi$, on a $\phi=\alpha^n\varphi^n(\phi)$, pour tout n. Par suite ϕ est à support dans $p^n\mathbf{Z}_p$ pour tout n, et donc est identiquement nulle par continuité en 0. D'où l'injectivité de $1-\alpha\varphi$.

Que l'image de $1-\alpha\varphi$ soit fermée résulte du lemme précédent (si $(1-\alpha\varphi)\phi_n$ tend vers une limite, il en est de même de $u((1-\alpha\varphi)\phi_n)=\phi_n$; si $\alpha=p^i$, cet argument montre que l'image de $\{\phi,\ \phi^{(i)}(0)=0\}$ est fermée, et comme elle est de codimension 1 dans $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, cela prouve que $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est aussi fermé).

Si $(1-\alpha\varphi)\phi$ est à support dans $\mathbf{Z}_p^*$, on a $\psi((1-\alpha\varphi)\phi)=0$, et donc $(\psi-\alpha)\cdot\phi=0$. D'après le lemme 1.16, cela implique que $\phi=0$ sauf si $\alpha=p^i$ ou cela implique que $\phi\in L\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}x^i$.

Par ailleurs, si $\phi\in\mathrm{An}(p^n\mathbf{Z}_p)$ (et vérifie $\phi^{(i)}(0)=0$ dans le cas $\alpha=p^i$), on peut écrire ϕ sous la forme $\sum_{j=0}^{+\infty}a_j\mathbf{1}_{p^n\mathbf{Z}_p}x^j$ (avec $a_i=0$ si $\alpha=p^i$) et alors la fonction $\phi-(1-\alpha\varphi)\big(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_j}{1-\alpha p^{-j}}\mathbf{1}_{p^n\mathbf{Z}_p}x^j\big)$ est identiquement nulle sur $p^{n+1}\mathbf{Z}_p$. Il s'ensuit que l'on peut écrire tout élément ϕ de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ (vérifiant $\phi^{(i)}(0)=0$ dans le cas $\alpha=p^i$), sous la forme $\phi_1+(1-\alpha\varphi)\phi_2$, avec ϕ_1 nulle dans un voisinage de 0 et donc de la forme $\sum_{n=0}^{N}\phi_{1,n}$, avec $\phi_{1,n}$ à support dans $p^n\mathbf{Z}_p^*$. On peut alors écrire $\phi_{1,n}$ sous la forme $\varphi^n\psi^n(\phi_{1,n})=((1-\alpha\varphi)-1)^n\psi^n(\alpha^{-1}\phi_{1,n})$, et un développement de $((1-\alpha\varphi)-1)^n$ exprime $\phi_{1,n}$ comme la somme d'un élément de $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ et de $\psi^n(\alpha^{-1}\phi_{1,n})$ qui est à support dans $\mathbf{Z}_p^*$.

On en déduit le résultat.

Lemme 1.19. — *Soit $\alpha\in L^*$.*

(i) *Si $\alpha\notin\{p^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$, alors $1-\alpha\varphi:\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\to\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\alpha = p^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, le noyau de $1-\alpha\varphi : \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ est $L \cdot \mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$ et $1-\alpha\varphi$ induit un isomorphisme de $\{\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p),\ \int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu = 0\}$ sur lui-même.*

Démonstration. — Comme $\langle(1-\alpha\varphi)\mu, \phi\rangle = \langle\mu, (1-\alpha\psi)\phi\rangle$, l'énoncé est une traduction, par dualité, du lemme 1.16.

Lemme 1.20. — *Soit $\alpha \in L^*$.*

(i) *$1-\alpha\psi : \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ est surjectif.*

(ii) *Si $\alpha \notin \{p^i,\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ induit un isomorphisme du noyau de $1-\alpha\psi$ sur $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$.*

(iii) *Si $\alpha = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, le noyau de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ sur $\mathrm{Ker}(1-\alpha\psi)$ est $L \cdot \mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$ et l'image est l'espace $\{\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*),\ \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\mu = 0\}$, qui est de codimension 1 dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$.*

Démonstration. — Le (i) se déduit du lemme 1.17 par dualité, si $\alpha \notin \{p^i,\ i \in \mathbf{N}\}$ (on a $\mu = (1-\alpha\varphi) \cdot {}^t u(\mu)$). Dans le cas $\alpha = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, le lemme 1.17 permet de montrer que l'image de $1-\alpha\psi$ contient le sous-espace de codimension 1 des μ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu = 0$. Comme $(1-p^i\psi)(\mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_1) = \mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_1$ n'appartient pas à ce sous-espace, il s'ensuit que l'image de $1-\alpha\psi$ est $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ tout entier, ce qui prouve le (i) dans ce cas aussi.

Les (ii) et (iii) sont des traductions du lemme 1.18.

1.5. Cohomologie de A^0

1.5.1. Sur $\mathscr{R}(\delta)$. — On rappelle que A^n est le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1+2p^n\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de A^0, si $n \geq 1$. On note X_n le groupe des caractères de A^0/A^n (que l'on identifie aussi au groupe des caractères de $\mathbf{Z}_p^*$, constants modulo $1+2p^n\mathbf{Z}_p$).

Lemme 1.21. — *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$. Alors $L_n(\delta) \cong \oplus_{\eta \in X_n} L(\eta\delta)$,*

Démonstration. — Un élément de A^0/A^n est d'ordre $(p-1)p^{n-1}$ (2^n si $p=2$), et comme F_n contient les racines de l'unité d'ordre $(p-1)p^{n-1}$ (resp. 2^n), l'action d'un élément de A^0/A^n sur L_n se diagonalise. On a donc $L_n(\delta) \cong \oplus_{\eta \in X_n} L(\eta\delta)^{m_\eta}$, avec $m_\eta \in \mathbf{N}$. Or la théorie de Galois implique que $m_\eta \leq 1$ (le quotient de deux éléments de copies de $L(\eta\delta)$ est fixe par $A^0/A^n \cong \mathrm{Gal}(L_n/L)$, et donc appartient à L) et une comparaison des dimensions implique donc que $m_\eta = 1$ pour tout η, ce qui permet de conclure.

Lemme 1.22. — (i) *Si $\eta \neq 1$, alors $H^i(A^0, L(\eta)) = 0$, si $i = 0, 1$.*

(ii) *$H^0(A^0, L) = L$ et $H^1(A^0, L)$ est le L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\sigma_a \mapsto \log a$.*

Démonstration. — Le résultat concernant H^0 est immédiat. En ce qui concerne H^1, on a $H^1(A^0, L(\eta)) = H^1(A^1, H^0(\Delta, L(\eta))) \cong H^0(\Delta, L(\eta))/(\sigma_u - 1)$. Il en résulte que $H^1(A^0, L(\eta)) = 0$ sauf si Δ et σ_u agissent trivialement sur $L(\eta)$ (et donc si $\eta = 1$) où $H^1(A^0, L(\eta))$ est de dimension 1. On en déduit le résultat.

Lemme 1.23. — *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$.*

(i) *Si $-w(\delta) \notin \mathbf{N}$, ou si $x^{-w(\delta)}\delta$ n'est pas constant modulo $1 + 2p^n\mathbf{Z}_p$, alors $H^i(A^0, L_n[[t]] \otimes \delta) = 0$, pour $i = 0, 1$.*

(ii) *Si $-w(\delta) \in \mathbf{N}$, et si $x^{-w(\delta)}\delta$ est constant modulo $1 + 2p^n\mathbf{Z}_p$, alors $\dim_L H^i(A^0, L_n[[t]] \otimes \delta) = 1$, pour $i = 0, 1$.*

Démonstration. — Par dévissage, on se ramène à calculer $H^i(A^0, t^j L_n \otimes \delta)$, et comme $t^j L_n \otimes \delta \cong L_n(x^j\delta)$, on conclut en utilisant les lemmes 1.21 et 1.22.

Proposition 1.24. — $H^0(A^0, \mathscr{R}(\delta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_{|\mathbf{Z}_p^*} \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}, \\ L \cdot t^i, & \text{si } \delta_{|\mathbf{Z}_p^*} = x^{-i}, \text{ avec } i \in \mathbf{N}. \end{cases}$

Démonstration. — Soit $x \in \mathscr{R}(\delta)$, fixe par A^0, et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in \mathscr{E}^{]0,r_{n-1}]}(\delta)$. Alors $\iota_n(x)$ et $\iota_n(\varphi(x))$ appartiennent au L-espace vectoriel $H^0(A^0, L_n[[t]] \otimes \delta)$ qui est de dimension ≤ 1, d'après le lemme 1.23. Comme ι_n est une injection, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbf{N}$ tel que $(\alpha\varphi - 1)x = 0$. D'après le lemme 1.18, cela implique que x est dans l'image de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta$, et donc appartient à $L \cdot t^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, d'après le lemme 1.19 (la transformée d'Amice de $\mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$ est t^i). On conclut(4) en utilisant le fait que $\sigma_a(t^i) = a^i t^i$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

1.5.2. Sur $\mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. — Soit $\eta : \mathbf{Z}_p^* \to L^*$ un caractère continu. On voit η comme un caractère de A^0.

Proposition 1.25. — *L'image de $\sigma_u - 1$ est fermée dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta$. De plus :*

(i) *$H^0(A^0, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\eta$, et $H^1(A^0, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta) = 0$.*

(ii) *$H^0(A^0, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta) = 0$; si $a \mapsto \mu_a$ est un 1-cocycle, il existe $\lambda \in L$ tel que $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^{-1}\mu_a = \lambda \log a$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et l'application $(a \mapsto \mu_a) \mapsto \lambda$ induit un isomorphisme de $H^1(A^0, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta)$ sur L.*

Démonstration. — On a $H^i(A^0, M) = H^0(A^0/A^1, H^i(A^1, M))$. Le résultat est donc une traduction du cor. 1.30 à part la description explicite de $H^1(A^0, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta)$. Celle-ci résulte de ce que $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^{-1}\,\mu$ est A^0-équivariante de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta$ dans L, et induit une application surjective, et donc bijective pour des raisons de dimension, de $H^1(A^0, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \eta)$ sur $H^1(A^0, L)$ (engendré par $\sigma_a \mapsto \log a$ d'après le lemme 1.22).

Corollaire 1.26. — *On a $H^0(A^0, \mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) = H^1(A^0, \mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) = 0$.*

---

(4) Cette démonstration est assez détournée ; des techniques différentielles **[16]** mènent directement au résultat.

Démonstration. — Pour H^0, c'est une conséquence directe de la prop. 1.24 (en effet, $t^i \notin \mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$). Pour H^1, on utilise la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta \to \mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \chi^{-1}\delta \to 0;$$

La nullité de $H^0(A^0, \mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$ et le fait que $H^0(A^0, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \chi^{-1}\delta)$ et $H^1(A^0, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta)$ sont tous deux de dimension 1 impliquent que $H^1(A^0, \mathscr{R}(\delta) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$ s'injecte dans $H^1(A^0, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \chi^{-1}\delta)$, qui est nul d'après le (i) de la prop. 1.25.

Remarque 1.27. — On a, plus généralement, $H^i(A^0, D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) = 0$ pour tout (φ, Γ)-module D de rang fini sur $\mathscr{R}$ (cela résulte de [**14**, prop. V.1.19]).

1.5.3. Cohomologie de A^1. — Soit $\delta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère continu. On choisit un générateur topologique u de $1 + 2p\mathbf{Z}_p$.

Lemme 1.28. — *$\delta(u)\sigma_u - 1$ est surjectif sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)$ et admet une section continue ; son noyau est le L-espace vectoriel de base les $\mathbf{1}_{i+2p\mathbf{Z}_p}\delta$, pour $i \in \Delta$.*

Démonstration. — Remarquons que σ_u laisse stable $\mathrm{LA}(i + 2p\mathbf{Z}_p)$ pour tout $i \in \Delta$, et que le changement de variable $x = iu^{-y}$ permet de ramener l'étude de $\delta(u)\sigma_u - 1$ sur $\mathrm{LA}(i+2p\mathbf{Z}_p)$ à celle de $\alpha\tau - 1$ sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, où $\alpha = \delta(u)$ vérifie $v_p(\alpha - 1) > 0$ car $1+2p\mathbf{Z}_p$ est un pro-p-groupe, et $\tau : \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est défini par $(\tau(\phi))(y) = \phi(y+1)$.

L'étude de $\alpha\tau - 1$ peut se faire en utilisant le développement de Mahler de ϕ : si $\phi = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{y}{n}$ et $(\alpha\tau - 1) \cdot \phi = \sum_{n \geq 0} b_n \binom{y}{n}$, on a $b_n = (\alpha - 1)a_n + \alpha a_{n+1}$ puisque $\tau\big(\binom{y}{n}\big) = \binom{y}{n} + \binom{y}{n-1}$. Si les b_n sont donnés ce système d'équation a une unique solution une fois a_0 fixé, à savoir celle définie par récurrence par $a_{n+1} = \alpha^{-1}(b_n - (\alpha - 1)a_n)$; par ailleurs, il existe $s > 0$ tel que $v_p(b_n) \geq ns + C$, avec $C \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et une récurrence immédiate montre que $v_p(a_n) \geq (n-1)s' + C'$, avec $s' = \inf(s, v_p(\alpha - 1))$ et $C' = \inf(C, v_p(a_0))$, ce qui implique que $\sum_{n\geq 0} a_n \binom{y}{n} \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$. En résumé, $\alpha\tau - 1$ est surjectif, admet une section continue (celle pour laquelle $a_0 = 0$), et son noyau est de dimension 1 (et donc est engendré par $y \mapsto \alpha^{-y}$). On en déduit le résultat car $\alpha^{-y} = \delta(i)^{-1}\delta(x)$.

Lemme 1.29. — *$\delta(u)\sigma_u - 1$ est injectif sur $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$ et l'image de $\delta(u)\sigma_u - 1$ est constituée des μ vérifiant $\int_{i+2p\mathbf{Z}_p} \delta^{-1}\mu = 0$, pour tout $i \in \Delta$; en particulier, elle est fermée dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$.*

Démonstration. — C'est une traduction, par dualité, du lemme 1.28.

Corollaire 1.30. — (i) *$H^0(A^1, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta)$ et $H^1(A^1, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta^{-1})$ sont de dimension $[A^0 : A^1]$ et duaux l'un de l'autre (isomorphes à $L[\Delta]$ comme A^0-modules).*

(ii) *$H^1(A^1, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta)$ et $H^0(A^1, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta^{-1})$ sont nuls.*

Démonstration. — C'est une simple traduction des lemmes 1.28 et 1.29.

Remarque 1.31. — Il ne faudrait pas croire que l'image de $\sigma_u - 1$ est toujours fermée. Par exemple, on vérifie facilement, en utilisant le lemme 1.28, qu'un élément ϕ de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est dans l'image de $\delta(a)\sigma_a - 1$ si et seulement si on a $\phi(x) = \sum_{j\geq 0} a_j x^j$ au voisinage de 0 et la série $\sum_{j\geq 0} \frac{a_j}{\delta(a)a^{-j}-1} x^j$ a un rayon de convergence non nul (ce qui inclut la condition $a_i = 0$ si $\delta(x) = x^{-i}$).

On voit donc que l'image de $\sigma_u - 1$ sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta$ est fermée si et seulement si $w(\delta)$ n'est pas un nombre de Liouville p-adique (i.e. si $\limsup \frac{1}{n} v_p(w(\delta) - n) < +\infty$). Si $w(\delta)$ est de Liouville, cette image est dense mais $\sigma_u - 1$ n'est pas surjectif.

1.6. Cohomologie de A^+

1.6.1. A valeurs dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta$ *et* $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}$

Proposition 1.32. — *L'image de $\sigma_u - 1$ est fermée dans $H^j(\Phi^\pm, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta)$ et $H^j(\Phi^\pm, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1})$, si $j = 0, 1$. De plus :*

(i) *Si $\delta \notin \{x^i,\ i \in \mathbf{N}\}$, alors*
- $H^j(A^+, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}) = 0$, *pour* $j = 0, 1, 2$.
- $\dim_L H^j(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) = 0, 1, 0$, *si* $j = 0, 1, 2$.
- $H^j(A^-, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) = 0$, *pour* $j = 0, 1, 2$.
- $\dim_L H^1(A^-, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}) = 0, 1, 0$, *si* $j = 0, 1, 2$.

(ii) *Si $\delta = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors*
- $\dim_L H^j(A^+, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}) = 1, 2, 1$ *si* $j = 0, 1, 2$.
- $\dim_L H^j(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) = 0, 2, 1$, *si* $j = 0, 1, 2$.
- $\dim_L H^j(A^-, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) = 1, 2, 1$, *si* $j = 0, 1, 2$.
- $\dim_L H^j(A^-, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}) = 1, 2, 0$, *si* $j = 0, 1, 2$.

Démonstration. — On a :
- $\dim_L H^0(A^\pm, M) = \dim_L H^0(A^0, H^0(\Phi^\pm, M))$,
- $\dim_L H^1(A^\pm, M) = \dim_L H^0(A^0, H^1(\Phi^\pm, M)) + \dim_L H^1(A^0, H^0(\Phi^\pm, M))$
- $\dim_L H^2(A^\pm, M) = \dim_L H^1(A^0, H^1(\Phi^\pm, M))$.

La proposition est donc une conséquence immédiate des prop. 1.13 et 1.25 sauf si $\delta(p) = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, où il faut travailler un peu plus pour calculer $H^j(A^0, H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta))$ et $H^j(A^0, H^0(\Phi^-, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}))$ et pour montrer que l'image de $\sigma_u - 1$ est fermée. Supposons donc que $\delta(p) = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$ et notons simplement LA et $\mathscr{D}$ les modules $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}$.

- Soit $X = \big(\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)/L \cdot (\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*} x^i)\big) \otimes \delta$. La prop. 1.13 fournit une suite exacte $0 \to X \to H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}) \to L(x^{-i}\delta) \to 0$. Comme $\sigma_u - 1$ est surjectif sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta$, il l'est sur X, et donc l'image de $\sigma_u - 1$ est fermée dans $H^1(\Phi^+, \mathrm{LA})$ puisqu'elle contient X qui est fermé et de codimension finie. Comme $H^1(A^0, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta) = 0$ (prop. 1.25), la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte $0 \to L(x^{-i}\delta) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta \to X \to 0$ et le lemme 1.22 montrent que $H^0(A^0, X)$ a même dimension que $H^0(A^0, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta)$, c'est-à-dire 1, et que $H^1(A^0, X) = 0$. On déduit alors de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte

$0 \to X \to H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}) \to L(x^{-i}\delta) \to 0$, et de la nullité de $H^1(A^0, X)$, que :

$$\dim H^0(A^0, H^1(\Phi^+, \mathrm{LA})) = 1 + \dim H^0(A^0, L(x^{-i}\delta)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta \neq x^i, \\ 2 & \text{si } \delta = x^i, \end{cases}$$

$$\dim H^1(A^0, H^1(\Phi^+, \mathrm{LA})) = \dim H^1(A^0, L(x^{-i}\delta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta \neq x^i, \\ 1 & \text{si } \delta = x^i. \end{cases}$$

- Soit $Y = \{\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*),\ \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \mu = 0\} \otimes \delta^{-1}$, de telle sorte que la suite $0 \to L(x^i\delta^{-1}) \to H^0(\Phi^-, \mathscr{D}) \to Y \to 0$ soit exacte (c'est la suite exacte duale de la suite $0 \to X \to H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}) \to L(x^{-i}\delta) \to 0$ du point précédent). On a $H^0(A^0, Y) = 0$ puisque $H^0(A^0, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta^{-1}) = 0$ et $\dim_L H^1(A^0, Y) = 1$ (cela suit de la prop. 1.25, de la suite exacte $0 \to Y \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes \delta^{-1} \to L(x^i\delta^{-1})$, et du lemme 1.22). On en déduit les formules

$$\dim H^0(A^0, H^0(\Phi^-, \mathscr{D})) = \dim H^0(A^0, L(x^{-i}\delta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta \neq x^i, \\ 1 & \text{si } \delta = x^i, \end{cases}$$

$$\dim H^1(A^0, H^0(\Phi^-, \mathscr{D})) = 1 + \dim H^1(A^0, L(x^{-i}\delta)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta \neq x^i, \\ 2 & \text{si } \delta = x^i. \end{cases}$$

Pour montrer que l'image de $\sigma_u - 1$ agissant sur $H^0(\Phi^-, \mathscr{D})$ est fermée, il suffit alors d'utiliser le (ii) du lemme 1.15.

Remarque 1.33. — Les modules $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1}$ et $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta$ sont duaux l'un de l'autre. Il en résulte, d'après la prop. 1.12 dont les hypothèses sont vérifiées (prop. 1.13 et 1.32), que $H^j(A^-, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta^{-1})$ est le dual de $H^{2-j}(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta)$; en particulier ces deux modules ont la même dimension sur L, ce qui est compatible avec les résultats de la prop. 1.32.

Proposition 1.34. — (i) *Si $\delta \notin \{x^i,\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta)$ est de dimension 1, engendré par la classe du cocycle $g \mapsto (g-1) \cdot ((\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\delta) \otimes \delta)$.*

(ii) *Si $\delta = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors l'application envoyant ℓ sur la classe du cocycle $g \mapsto (g-1) \cdot ((\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i \ell) \otimes \delta)$ induit un isomorphisme de l'espace $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$, de dimension 2, sur $H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta)$.*

Démonstration. — Il est clair sur la construction que l'on a bien défini des cocycles. Comme les espaces au départ et à l'arrivée ont la même dimension, il suffit donc, pour conclure, de vérifier que les cocycles ainsi construits ne sont pas des cobords, autrement dit que l'on ne peut pas avoir $(g-1) \cdot ((\phi - f) \otimes \delta) = 0$, pour tout $g \in A^+$, avec $\phi \in \mathrm{LA}$ et $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\delta$ ou $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i \ell$, ce qui est clair car la condition $(\varphi - 1) \cdot ((\phi - f) \otimes \delta) = 0$ implique que ϕ et f coïncident sur $\mathbf{Z}_p - \{0\}$.

1.6.2. A valeurs dans $\mathscr{R}(\delta)$

Lemme 1.35. — (i) $H^0(A^+, \mathscr{R}(\delta)) = 0$ *si* $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$ *et* $H^0(A^0, \mathscr{R}(\delta)) = L \cdot t^i$, *si* $\delta = x^{-i}$, *avec* $i \in \mathbf{N}$.

(ii) $H^0(A^-, \mathscr{R}(\delta)) = 0$ *si* $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$ *et* $H^0(A^-, \mathscr{R}(\delta)) = L \cdot t^i$, *si* $\delta = x^{-i}$, *avec* $i \in \mathbf{N}$.

Démonstration. — Cela suit de la prop. 1.24 et des identités $\varphi(t^i \otimes \delta) = p^i \delta(p)\ t^i \otimes \delta$ et $\psi(t^i \otimes \delta) = p^{-i} \delta(p)^{-1}\ t^i \otimes \delta$.

Lemme 1.36. — *Les images de $\varphi - 1$ et $\psi - 1$ sont fermées dans $\mathscr{R}(\delta)$.*

Démonstration. — On note $\mathscr{D}$ et LA les modules $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta$ et $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \chi^{-1}\delta$. On a donc une suite exacte $0 \to \mathscr{D} \to \mathscr{R}(\delta) \to \mathrm{LA} \to 0$ de Φ^+ et Φ^--modules. Si $u = \varphi, \psi$, notons X_u l'image inverse de $(u-1) \cdot \mathrm{LA}$ dans $\mathscr{R}(\delta)$. Comme $(u-1) \cdot \mathrm{LA}$ est fermé dans LA, on voit que X_u est fermé dans $\mathscr{R}(\delta)$.

- Si $u = \psi$ ou si $u = \varphi$ et $\delta(p) \notin \{p^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $u - 1$ est surjectif sur $\mathscr{D}$ et donc $(u-1) \cdot \mathscr{R}(\delta) = X_u$, ce qui permet de conclure dans ce cas.
- Si $u = \varphi$ et $\delta(p) = p^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $(u-1) \cdot \mathscr{R}(\delta)$ est de codimension ≤ 1 dans X_u car $(u-1) \cdot \mathscr{D}$ est de codimension 1 dans $\mathscr{D}$. Par ailleurs, $(u-1) \cdot \mathscr{R}(\delta)$ est orthogonal au noyau de $\psi - 1$ sur $\mathscr{R}(\delta^{-1})$, et donc, en particulier, à $z = (\partial^i \frac{1}{T}) \otimes \delta^{-1}$ (on a $\psi(z) = \delta(p) p^i \partial^i(\psi(\frac{1}{T})) \otimes \delta^{-1} = z$, puisque $\delta(p) p^i = 1$ et $\psi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}$). Comme l'orthogonal de z ne contient pas $\mathscr{R}^+(\delta) = \mathscr{D}$, on a $(u-1) \cdot \mathscr{R}(\delta) = X_u \cap z^\perp$, ce qui prouve que $(u-1) \cdot \mathscr{R}(\delta)$ est fermé dans $\mathscr{R}(\delta)$ comme intersection de deux fermés.

Ceci termine la démonstration du lemme.

Lemme 1.37. — *$\sigma_u - 1$ est d'image fermée dans $H^j(\Phi^\pm, \mathscr{R}(\delta))$, si $j = 0, 1$.*

Démonstration. — On déduit de la suite exacte $0 \to \mathscr{D} \to \mathscr{R}(\delta) \to \mathrm{LA} \to 0$ et de la nullité de $H^0(\Phi^+, \mathrm{LA})$ et $H^1(\Phi^-, \mathscr{D})$ (prop. 1.13), des isomorphismes

$$H^0(\Phi^+, \mathscr{R}(\delta)) \cong H^0(\Phi^+, \mathscr{D}) \ \text{ et } \ H^1(\Phi^-, \mathscr{R}(\delta)) \cong H^1(\Phi^-, \mathrm{LA}),$$

et des suites exactes

$$0 \to H^1(\Phi^+, \mathscr{D}) \to H^1(\Phi^+, \mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}) \to 0,$$
$$0 \to H^0(\Phi^-, \mathscr{D}) \to H^0(\Phi^-, \mathscr{R}(\delta)) \to H^0(\Phi^-, \mathrm{LA}) \to 0.$$

Le résultat pour $H^0(\Phi^+, \mathscr{R}(\delta))$ et $H^1(\Phi^-, \mathscr{R}(\delta))$ se déduit donc directement de la prop. 1.32.

Le résultat pour $H^0(\Phi^-, \mathscr{R}(\delta))$ se déduit de la prop. 1.32 et du (i) du lemme 1.15 car $H^0(\Phi^-, \mathrm{LA})$ est de dimension finie.

Le résultat pour $H^1(\Phi^+, \mathscr{R}(\delta))$ se déduit de la prop. 1.32 et du (ii) du lemme 1.15 car $H^1(\Phi^+, \mathscr{D})$ est de dimension finie (on ne peut pas appliquer directement le (ii) du lemme 1.15 car $H^1(\Phi^+, \mathrm{LA})$ n'est pas un fréchet, mais on peut reprendre la preuve du lemme 1.28 en remarquant qu'elle permet d'écrire $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)$ comme une limite inductive compacte de banach sur lesquels $\delta(u)\sigma_u - 1$ est surjective ; cela permet d'écrire $H^1(\Phi^+, \mathrm{LA})$ comme une limite inductive compacte de banach auxquels on peut appliquer le résultat du lemme 1.15).

Théorème 1.38. — *$H^j(A^-, \mathscr{R}(\chi\delta^{-1}))$ et $H^{2-j}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ sont duaux l'un de l'autre, si $j = 0, 1, 2$. De plus,*

- *Si $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\} \cup \{x^i\chi,\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $\dim H^j(A^+, \mathscr{R}(\delta)) = 0, 1, 0$, si $j = 0, 1, 2$.*
- *Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $\dim H^j(A^+, \mathscr{R}(\delta)) = 1, 2, 0$, si $j = 0, 1, 2$.*
- *Si $\delta = x^i\chi$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $\dim H^j(A^+, \mathscr{R}(\delta)) = 0, 2, 1$, si $j = 0, 1, 2$.*
- *$\dim H^j(A^+, \mathscr{R}(\delta)) = \dim H^j(A^-, \mathscr{R}(\delta))$, pour tous δ et $j \in \{0, 1, 2\}$.*

Démonstration. — La dualité entre $H^j(A^-, \mathscr{R}(\chi\delta^{-1}))$ et $H^{2-j}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ est une conséquence de la prop. 1.12 dont les hypothèses sont vérifiées grâce aux lemmes 1.36 et 1.37.

La dimension des H^0 se calcule en utilisant la prop. 1.24 ; celle des H^2 s'en déduit.

Enfin, la dimension de $H^1(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ se calcule en utilisant la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte $0 \to \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta \to \mathscr{R}(\delta) \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \chi^{-1}\delta \to 0$.

- Si $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$, on a $H^j(A^+, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) = 0$, pour tout j, ce qui nous fournit un isomorphisme

$$H^1(A^+, \mathscr{R}(\delta)) \cong H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \chi^{-1}\delta),$$

ce qui prouve que $H^1(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ est de dimension 1 sauf si $\delta \in \{x^i\chi,\ i \in \mathbf{N}\}$ où il est de dimension 2.

- Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, on utilise la nullité de $H^2(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ établie ci-dessus. On en déduit que l'application $H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \chi^{-1}\delta) \to H^2(A^+, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta)$ est un isomorphisme pour des raisons de dimension ; il en est donc de même de l'application $H^1(A^+, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) \to H^1(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ puisque $H^0(A^+, \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \otimes \delta) = 0$. Il s'ensuit que $H^1(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ est de dimension 2.

La dimension de $H^1(A^-, \mathscr{R}(\delta))$ s'en déduisant par dualité, cela permet de conclure.

Remarque 1.39. — (i) Il résulte de la démonstration que l'application naturelle de $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}, \mathscr{R}(\delta)) = H^1(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ dans $H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes \chi^{-1}\delta)$ est un isomorphisme sauf si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, où cette application est identiquement nulle. Il semble donc que ce cas soit assez pathologique ce qui est corroboré par la remarque de Chenevier [**8**, 3.10].

(ii) Si G^+ est un semi-groupe, et si M est muni d'actions de G^+ et de son semi-groupe opposé G^- telles que $g^{-1} \cdot g = \mathrm{id}$ si $g \in G^+$ (auquel cas $g \cdot g^{-1}$ est un projecteur), on dispose d'un foncteur cohomologique ι envoyant $c \in C^n(G^+, M)$ sur $\iota(c) \in C^n(G^-, M)$ défini par

$$\iota(c)(g_1, \dots, g_n) = (-1)^{n(n+1)/2}(g_1 \cdots g_n) \cdot c(g_n^{-1}, \dots, g_1^{-1})$$

(un petit calcul montre que $d_{n+1}\circ\iota = \iota\circ d_{n+1}$). Cela nous fournit des applications naturelles $H^n(G^+, M) \to H^n(G^-, M)$, pour $n \in \mathbf{N}$. Si G est un groupe, on a $G^+ = G^-$ et ces applications sont l'identité des groupes considérés. Le cas de A^+ et $M = \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes\delta$ montre que $H^n(G^+, M) \to H^n(G^-, M)$ n'est, en général, pas un isomorphisme. Par contre, si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on a $H^n(A^+, D) \cong H^n(A^-, D)$ pour tout n (c'est dû au fait que $H^n(A^0, \mathrm{Ker}\,\psi) = 0$, pour tout n), ce qui explique que $\dim H^j(A^+, \mathscr{R}(\delta)) = \dim H^j(A^-, \mathscr{R}(\delta))$, pour tous δ et j.

2. La série principale localement analytique

Ce chapitre est consacré à des rappels au sujet de la représentation localement analytique $B^{\mathrm{an}}(\delta_2, \delta_1)$, en particulier en ce qui concerne sa suite de Jordan-Hölder (prop. 2.6). Il contient aussi une construction d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}^1(W(\delta_1, \delta_2), \mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1)), \quad \text{si } \delta_1 = x^k\delta_2\chi \text{ avec } k \in \mathbf{N},$$

qui joue un rôle important dans la description de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$ si s est spécial.

2.1. Construction de représentations localement analytiques. — Soit $\mathscr{S}$ l'espace défini au § 0.3. Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}$, on note :

- δ_s et ω_s les caractères $\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}$ et $\delta_1\delta_2\chi^{-1}$,
- $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ l'espace des $\phi : \mathbf{Q}_p \to L$ localement analytiques, telles que $x \mapsto \delta_s(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction analytique dans un voisinage de 0.

On munit $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ d'une action à gauche de G définie par $g \cdot \phi = \phi \star g$, où

$$\big(\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big)(x) = \delta_1^{-1}\chi(ad - bc)\delta_s(cx + d)\phi\big(\frac{ax + b}{cx + d}\big).$$

Remarque 2.1. — (i) On a aussi

$$\big(\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big)(x) = \delta_2\big(\frac{1}{cx + d}\big)\chi^{-1}\delta_1\big(\frac{cx + d}{ad - bc}\big)\phi\big(\frac{ax + b}{cx + d}\big)$$

(ii) Le caractère central de $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ est ω_s.

(iii) Si $\eta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $B^{\mathrm{an}}(\eta\delta_1, \eta\delta_2) = B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2) \otimes \eta$.

La représentation $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ s'interprète, plus conceptuellement, comme une induite analytique. Si W est une représentation localement analytique de B, on note $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}W$ *l'induite analytique de B à G* de W, c'est-à-dire l'espace des fonctions $\tilde\phi : G \to W$, localement analytiques, telles que $\tilde\phi(bg) = b \cdot \tilde\phi(g)$, pour tous $g \in G$ et $b \in B$, muni de l'action à gauche de G définie par $(h \cdot \tilde\phi)(g) = \tilde\phi(gh)$.

Remarque 2.2. — (i) Si $\tilde\phi \in \mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}W$, on définit $\phi : \mathbf{Q}_p \to W$ par $\phi(x) = \tilde\phi\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)\big)$. On obtient de la sorte un isomorphisme de $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}W$ sur l'ensemble des $\phi : \mathbf{Q}_p \to W$, localement analytiques, telles que $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & -x \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi(x^{-1})$ se prolonge en une fonction analytique sur un voisinage de 0. Les formules $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ et

$\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} -c & a \\ -cx-d & ax+b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1/(cx+d) & c/(ad-bc) \\ 0 & (cx+d)/(ad-bc) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (ax+b)/(cx+d) \end{smallmatrix}\right)$

montrent que l'action de G sur $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}} W$ est alors donnée par $g \cdot \phi = \phi \star g^{-1}$, avec

$$\left(\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1/(cx+d) & c/(ad-bc) \\ 0 & (cx+d)/(ad-bc) \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

(ii) On en déduit, grâce au (i) de la rem. 2.1 que $\tilde{\phi} \mapsto \phi$, où $\phi(x) = \tilde{\phi}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)\right)$, est un isomorphisme G-équivariant

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1) \cong B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2).$$

On note N le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de G. Si Π est une représentation localement analytique de G, on note $J^*(\Pi) = (\Pi^*)^N$ le *module de Jacquet dual* de Π. Ce module est stable par B, puisque B normalise N, et donc est muni d'une action de B (déterminée par celle de $T = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right),\ a, d \in \mathbf{Q}_p^*\right\}$ puisque N agit trivialement). Si $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\chi_1 \otimes \chi_2$ le caractère de B défini par $(\chi_1 \otimes \chi_2)\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi_1(a)\chi_2(d)$.

Remarque 2.3. — (i) Si $\mu \in J^*(\Pi) - \{0\}$ est propre sous l'action de B pour le caractère δ, alors $v \mapsto \tilde{\phi}_v$, où $\tilde{\phi}_v : G \to L$ est définie par $\tilde{\phi}_v(g) = \langle \mu, g \cdot v \rangle$, est un morphisme G-équivariant de Π dans $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}} \delta^{-1}$. En effet, si $h \in B$, on a $\tilde{\phi}_v(hg) = \langle \mu, hg \cdot v \rangle = \langle h^{-1} \cdot \mu, g \cdot v \rangle = \delta^{-1}(h)\tilde{\phi}_v(g)$.

(ii) L'orthogonal $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ de $J^*(\Pi)$ est l'adhérence de l'espace engendré par les $(u-1) \cdot v$, pour $v \in \Pi$ et $u \in N$, et $J^*(\Pi)$ est le dual du *module de Jacquet* $J(\Pi) = \Pi/(\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ de Π. Comme d'habitude, l'application $v \mapsto \phi_v(g) = \overline{g \cdot v}$ (image de $g \cdot v$ dans $J(\Pi)$), induit un morphisme G-équivariant de Π dans $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}} J(\Pi)$.

2.2. Composantes de Jordan-Hölder. — La représentation $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ n'est, de manière visible, pas toujours irréductible. Ses composantes de Jordan-Hölder ont été déterminées par Schneider et Teitelbaum [**30**]. L'énoncé du résultat (prop. 2.6 ci-dessous) va demander un peu de préparation.

• Si $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, on note $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ l'espace des $\phi : G \to L$, localement constantes, telles que $\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)g\right) = \delta_1(a)\delta_2(d)\phi(g)$, pour tous $g \in G$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in B$. On munit $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ d'une action de G grâce à la formule $(h \cdot \phi)(g) = \phi(gh)$. Les résultats suivants sont parfaitement classiques [**21**, th. 3.3].

Proposition 2.4. — (i) $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ *est une représentation irréductible de* G *sauf si* $\chi_1 = \chi_2$ *ou si* $\chi_1 = |x|^2\chi_2$ *: dans le premier cas,* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ *est une extension de* $\mathrm{St} \otimes \chi_1$ *par* χ_1*, où* St *est la steinberg, dans le second, c'est une extension de* χ_1 *par* $\mathrm{St} \otimes \chi_1$*.*

(ii) *Si* $\delta_1 \neq |x|^{\pm 1}\delta_2$*, alors* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\delta_1 \otimes |x|^{-1}\delta_2) \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\delta_2 \otimes |x|^{-1}\delta_1)$ *(et les deux représentations sont irréductibles).*

• Si $w(s)-1\in\mathbf{N}$, on note $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ l'ensemble des fonctions $\phi:\mathbf{Q}_p\to L$, localement polynomiales de degré $\leq w(s)-1$, telles que $\delta_s(x)\phi(1/x)$ soit polynomiale, de degré $\leq w(s)-1$, dans un voisinage de 0. Alors, muni de l'action de G ci-dessus, $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ est une sous-représentation de $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$.

• Si $\delta_1=\delta_2\chi x^{w(s)-1}$ (cela équivaut à $\delta_s=x^{w(s)-1}$), on pose

$$W(\delta_1,\delta_2)={\rm Sym}^{w(s)-1}\otimes\chi^{-1}\delta_1x^{1-w(s)}\ \text{ et }\ {\rm St}^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)={\rm St}\otimes W(\delta_1,\delta_2).$$

Alors $W(\delta_1,\delta_2)$ est une représentation de dimension finie dont la duale est $W(\delta_1,\delta_2)\otimes\chi\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}$ (cela suit de ce que la duale de ${\rm Sym}^k$ est ${\rm Sym}^k\otimes x^{-k}$).

Remarque 2.5. — (i) On a $B^{\rm alg}(\delta_1\eta,\delta_2\eta)=B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)\otimes\eta$.

(ii) Si δ_2 est localement constant, il en est de même de $\delta_1\chi^{-1}x^{1-w(s)}$, et on a $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)\cong\big({\rm Ind}^{\rm lisse}\delta_2\otimes\delta_1\chi^{-1}x^{1-w(s)}\big)\otimes{\rm Sym}^{w(s)-1}$.

(iii) Si $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ et si on note s' l'élément de $\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ défini par $s'=(\delta_1',\delta_2',\infty)$ et $\delta_1'=x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2'=x^{-w(s)}\delta_1$, alors $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ et $B^{\rm alg}(\delta_1',\delta_2')$ ont les mêmes composantes de Jordan-Hölder ; en particulier, si $\delta_s\neq x^{w(s)-1},|x|^{-2}x^{w(s)-1}$, ces deux représentations sont isomorphes. En effet, on peut, quitte à tordre par un caractère, supposer que δ_2 est localement constant (il en est alors de même de δ_2'), et le résultat suit du (ii) et de la prop. 2.4.

Proposition 2.6. — (i) *Si $w(s)-1\notin\mathbf{N}$, alors $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ est irréductible.*

(ii) *Si $w(s)-1\in\mathbf{N}$, alors $(\frac{d}{dx})^{w(s)}$ induit un morphisme équivariant surjectif de $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ sur $B^{\rm an}(x^{-w(s)}\delta_1,x^{w(s)}\delta_2)$ dont le noyau est $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$.*

(iii) *La représentation $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ est irréductible sauf si $\delta_s=x^{w(s)-1}$ où $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ est une extension de ${\rm St}^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ par $W(\delta_1,\delta_2)$ qui sont toutes deux irréductibles, ou si $\delta_s=|x|^{-2}x^{w(s)-1}$, où $B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ est une extension de $W(|x|\delta_1,|x|^{-1}\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm alg}(|x|\delta_1,|x|^{-1}\delta_2)$.*

2.3. Extensions de $W(\delta_1,\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$

Si $\delta_s=x^k$, avec $k\in\mathbf{N}$, on note ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ le quotient de $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ par $W(\delta_1,\delta_2)$. On a donc une suite exacte

$$0\to{\rm St}^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)\to{\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)\to B^{\rm an}(x^{-1-k}\delta_1,x^{k+1}\delta_2)\to 0.$$

On cherche à décrire les extensions de $W(\delta_1,\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ (admettant un caractère central). Si $k\in\mathbf{N}$, notons W_k la sous-G-représentation de $B^{\rm an}(\chi,x^{-k})$ définie par les polynômes de degré $\leq k$ (c'est la duale de ${\rm Sym}^k$) et X_k le quotient de $B^{\rm an}(\chi,x^{-k})$ par W_k. En tant que B représentation, X_k s'identifie au sous-espace des $\phi\in B^{\rm an}(\chi,x^{-k})$ qui tendent vers 0 en ∞.

Si $\delta_s=x^k$, on a ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)=X_k\otimes\delta_1\chi^{-1}$ et $W(\delta_1,\delta_2)=W_k\otimes\delta_1\chi^{-1}$. On en déduit un isomorphisme naturel

$${\rm Ext}^1(W(\delta_1,\delta_2),{\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2))\cong{\rm Ext}^1(W_k,X_k).$$

Si $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$, on note ℓ^+ la fonction valant 0 sur $\mathbf{Z}_p$ et coïncidant avec ℓ en dehors de $\mathbf{Z}_p$ (notons que les ℓ^+ forment un L-espace vectoriel de dimension 2 de base v_p^+ et $\log^+$, où log est le logarithme normalisé par $\log p = 0$). On note Y_k l'espace $X_k \oplus W_k v_p^+ \oplus W_k \log^+$, que l'on munit d'une action de G, étendant celle sur X_k, en posant

$$(P\ell^+) \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (cx+d)^k P\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)\Big(\ell^+\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big) + \ell(cx+d)\Big).$$

(Le membre de droite est dans Y_k car $\ell^+\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big) + \ell(cx+d) - \ell^+(x)$ est localement analytique sur $\mathbf{P}^1$.) Ceci fait de Y_k une extension de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L) \otimes W_k = W_k \oplus W_k$ par X_k.

Théorème 2.7. — *Si $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ est non nul, le sous espace $E_\ell = X_k \oplus W_k \ell^+$ de Y_k est une extension de W_k par X_k, et l'application $\ell \mapsto E_\ell$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(W_k, X_k) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L).$$

Démonstration. — Il est immédiat que E_ℓ est une extension de W_k par X_k (ces extensions ont d'ailleurs été considérées par Breuil [**5, 6**]) ; le problème est donc de prouver que toute extension non triviale est de cette forme.

On utilise l'isomorphisme standard

$$\mathrm{Ext}^1(W_k, X_k) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, X_k \otimes W_k^*) \cong H^1(G, X_k \otimes W_k^*).$$

On note $e_1^i e_2^{k-i}$, pour $0 \le i \le k$, la base standard de $\mathrm{Sym}^k = W_k^*$ (on a $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_1^i e_2^{k-i} = (ae_1 + ce_2)^i (be_1 + de_2)^{k-i}$). Comme W_k est irréductible, le lemme de Schur montre que $H^0(G, W_k \otimes W_k^*)$ est de dimension 1, et un petit calcul montre que $(xe_1 + e_2)^k$ en est une base $\big[$il suffit de vérifier que $(xe_1 + e_2)^k$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p^*$, par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour $b \in \mathbf{Q}_p$, et par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\big]$. L'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(W_k, X_k) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, X_k \otimes W_k^*)$ s'obtient de la manière suivante.

• Si $0 \to X_k \to E \to W_k \to 0$ est une extension de W_k par X_k, l'image inverse de $L \cdot (xe_1 + e_2)^k \subset W_k \otimes W_k^*$ dans $E \otimes W_k^*$ est une extension de $L \cdot (xe_1 + e_2)^k \cong \mathbf{1}$ par $X_k \otimes W_k^*$.

• Si $0 \to X_k \otimes W_k^* \to E \to \mathbf{1} \to 0$ est une extension de $\mathbf{1}$ par $X_k \otimes W_k^*$, le quotient de $E \otimes W_k$ par $X_k \otimes (W_k^* \otimes W_k)_0$ est une extension de W_k par X_k, où l'on a noté $(W_k^* \otimes W_k)_0$ le noyau de l'application naturelle $W_k^* \otimes W_k \to L$, envoyant $\mu \otimes v$ sur $\langle \mu, v \rangle$.

Ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre et fournissent l'isomorphisme souhaité.

Pour décrire $H^1(G, X_k \otimes W_k^*)$, nous aurons besoin d'un peu de préparation.

Lemme 2.8. — (i) *Si $g \mapsto c_g$ est un 1-cocycle continu sur B, à valeurs dans $Y_k \otimes W_k^*$, qui est nul sur A, alors $c_g = 0$ pour tout $g \in B$.*

(ii) *Si $g \mapsto c_g$ est un 1-cocycle continu sur G, à valeurs dans $Y_k \otimes W_k^*$, qui est nul sur A, alors $c_g = 0$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. — Si $c_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in A$, on a $c_{\alpha\beta\alpha^{-1}} = \alpha \cdot c_\beta$, pour tous $\alpha \in A$ et $\beta \in B$. Si $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et si $b \in \mathbf{Q}_p$, posons $\alpha(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\beta(b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On peut appliquer ce qui précède à $\beta = \beta(b)$ et $\alpha = \alpha(p^n)$, avec $n \in \mathbf{N}$, de telle sorte que $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta(p^n b) = \beta(b)^{p^n}$. On obtient alors les relations

$$c_{\beta(p^n b)} = \alpha(p^n) \cdot c_{\beta(b)} \ \text{ et } \ c_{\beta(p^n b)} = \sum_{j=0}^{p^n-1} \beta(jb) \cdot c_{\beta(b)}.$$

Écrivons $c_{\beta(b)}$ sous la forme $\sum_{i=0}^k \phi_i e_1^i e_2^{k-i}$, où $\phi_i = \phi_i' + P_i v_p^+ + Q_i \log^+$, avec $\phi_i' \in B^{\mathrm{an}}(\chi, x^{-k})$ tendant vers 0 en ∞ et P_i, Q_i des polynômes de degré $\leq k$; écrivons de même $c_{\beta(p^n b)}$ sous la forme $\sum_{i=0}^k \phi_{n,i} e_1^i e_2^{k-i}$. La seconde relation ci-dessus nous donne

$$\sum_{i=0}^k \phi_{n,i}(x) e_1^i e_2^{k-i} = \sum_{j=0}^{p^n-1} \sum_{i=0}^k \phi_i(x - jb) e_1^i (jbe_1 + e_2)^{k-i}.$$

Comme il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que les ϕ_i soient analytiques sur $a + p^r\mathbf{Z}_p$, pour tout $a \in \mathbf{Q}_p$, l'identité ci-dessus montre que $\phi_{n,i}$ est analytique sur $p^r\mathbf{Z}_p$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Maintenant, la première relation ci-dessus nous donne $\phi_{n,i}(x) = p^{ni}\phi_i(\frac{x}{p^n})$. Il en résulte que ϕ_i est analytique sur $p^{r-n}\mathbf{Z}_p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; c'est donc la restriction à $\mathbf{Q}_p$ d'une fonction analytique sur $\mathbf{C}_p$. Par ailleurs, $\phi_i - P_i v_p - Q_i \log$ est la restriction d'une fonction analytique dans un voisinage de ∞, nulle en ∞ ; On en déduit que $R_i = P_i v_p + Q_i \log$ est analytique sur la couronne $v_p(x) \leq -N$, si $N \in \mathbf{N}$ est assez grand, ce qui implique que $P_i = Q_i = 0$ (dériver permet de se ramenener au cas où P_i et Q_i sont des constantes, et on montre que $P_i = Q_i = 0$ en considérant le développement de Laurent de $R_i(ax) - R_i(x)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p^*$). Il en résulte que ϕ_i est la restriction d'une fonction analytique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ (et donc une constante), nulle à l'infini et donc partout puisque constante. En résumé, on a $c_{\beta(b)} = 0$ pour tout $b \in \mathbf{Q}_p$. On en déduit le (i) puisque B est engendré par A et les $\beta(b)$, pour $b \in \mathbf{Q}_p$.

Si maintenant $g \mapsto c_g$ est 1-cocycle continu sur G, à valeurs dans $X_k \otimes W_k^*$, qui est nul sur A, le (i) prouve que $c_g = 0$ pour tout $g \in B$, et que $w \cdot c_{wgw} = 0$ pour tout $g \in B$. On en déduit que c_g est nul pour tout g dans les borels inférieur et supérieur, ce qui permet de conclure puisque G est engendré par ces borels.

Lemme 2.9. — *$H^1(A, X_k \otimes W_k^*)$ est un L-espace vectoriel de dimension $2(k+1)$, isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L) \otimes W_k^*$ par l'application qui envoie $\ell \otimes x^i$ sur le cocycle $g \mapsto (g-1) \cdot \ell^+ f_i$, avec $f_i = \mathbf{1}_{\mathbf{P}^1 - \mathbf{Z}_p} x^i e_1^i e_2^{k-i}$.*

Démonstration. — On a $X_k \otimes W_k^* = \oplus_{i=0}^k X_k e_1^i e_2^{k-i}$, et $X_k e_1^i e_2^{k-i} \cong X_k \otimes x^i$ comme A-module ; on est donc ramené à prouver que l'application envoyant ℓ sur le cocycle $g \mapsto (g-1) \cdot (\ell \mathbf{1}_{\mathbf{P}^1 - \mathbf{Z}_p} x^i) \otimes x^i$ induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L) \cong H^1(A, X_k \otimes x^i)$.

Notons Φ le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{Z}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de A. Pour les raisons habituelles, on a une suite exacte :

$$0 \to H^1(A^0, H^0(\Phi, X_k \otimes x^i)) \to H^1(A, X_k \otimes x^i) \to H^0(A^0, H^1(\Phi, X_k \otimes x^i)) \to 0.$$

On dispose d'un isomorphisme $\phi \mapsto (\phi_1, \phi_2)$ de X_k sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \oplus \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, où ϕ_1 est la restriction de ϕ à $\mathbf{Z}_p$ et $\phi_2(x) = \frac{1}{px}\phi(\frac{1}{px})$. Un petit calcul montre que l'action de $1 - \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur X_k devient, via cet isomorphisme, l'application

$$(\phi_1, \phi_2) \mapsto \big((1 - p^i\varphi) \cdot \phi_1 - p^{i+1}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\frac{1}{x}\phi_2(\frac{1}{x}), (1 - p^{i+1}\psi) \cdot \phi_2\big).$$

Or $1 - p^{i+1}\psi$ induit un isomorphisme de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ d'après le lemme 1.16. On en déduit que l'injection de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ dans X_k induit des isomorphismes

$$H^j(\Phi^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes x^i) \cong H^j(\Phi, X_k \otimes x^i), \quad \text{pour } j = 0, 1,$$

et $H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes x^i) \cong H^1(A, X_k \otimes x^i)$. On conclut en utilisant la prop. 1.34 et le fait que les cocycles $g \mapsto (g-1) \cdot ((\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1 - \mathbf{Z}_p} x^i \ell) \otimes x^i)$ et $g \mapsto (g-1) \cdot ((\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} x^i \ell) \otimes x^i)$ sont opposés dans $X_k \otimes x^i$ (en effet, si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on a $(g-1) \cdot ((\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1} x^i \ell) \otimes x^i) = \ell(a)((\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1} x^i) \otimes x^i)$ qui est nul dans $X_k \otimes x^i$ puisque $\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1} x^i = 0$ dans X_k).

Lemme 2.10. — *L'application qui envoie ℓ sur le cocycle*

$$g \mapsto (g-1) \cdot ((xe_1 + e_2)^k \ell^+) = ((g-1) \cdot \ell^+)(xe_1 + e_2)^k$$

induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ *sur* $H^1(G, X_k \otimes W_k^*)$ *qui est donc de dimension* 2.

Démonstration. — Soit $g \mapsto c_g$ un 1-cocycle continu, trivial sur Z (on s'intéresse aux extensions admettant un caractère central). Quitte à modifier ce cocycle par un cobord on peut, d'après le lemme 2.9, supposer que la restriction de $g \mapsto c_g$ à A est de la forme $g \mapsto (g-1) \cdot \sum_{i=0}^k \ell_i^+ f_i$, où les ℓ_i sont des éléments de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$. Mais alors le cocycle $c'_g = c_g - (g-1) \cdot \sum_{i=0}^k \ell_i^+ f_i$, à valeurs dans $Y_k \otimes W_k^*$, est identiquement nul sur A. Il est donc identiquement nul sur G, d'après le (i) du lemme 2.8. En résumé, on a $c_g = (g-1) \cdot \sum_{i=0}^k \ell_i^+ f_i$, pour tout $g \in G$.

Maintenant, c_g est à valeurs dans X_k ; son image dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L) \otimes W_k \otimes W_k^*$ est donc nulle. Il s'ensuit que $\sum_{i=0}^k \ell_i \otimes f_i$ est fixe par G et donc appartient à $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L) \otimes (xe_1 + e_2)^k$, ce qui permet de conclure.

Remarque 2.11. — (i) Soit $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$, et soit E_ℓ l'extension de $\mathbf{1}$ par $X_k \otimes W_k^*$ qui lui est attachée par le lemme 2.10. On peut identifier E_ℓ au sous-espace $(X_k \otimes W_k^*) \oplus L \cdot ((xe_1 + e_2)^k \ell^+)$ de $Y_k \otimes W_k^*$. L'extension de W_k par X_k qui lui correspond est alors l'image de $E_\ell \otimes W_k \subset Y_k \otimes W_k^* \otimes W_k$ par $\phi \otimes \mu \otimes v \mapsto \langle \mu, v \rangle \phi$; c'est donc le sous-espace $X_k \oplus W_k \ell^+$ de Y_k. Ceci termine la démonstration du th. 2.7.

(ii) Si on regarde de plus près la démonstration, on obtient un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}^1_G(W_k, X_k) \cong H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes x^k).$$

(Ce dernier espace est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ d'après la prop. 1.34, d'où l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_G(W_k, X_k) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ du théorème). De manière précise, la restriction de G à A fournit une application naturelle de $\mathrm{Ext}^1_G(W_k, X_k)$ dans

$\mathrm{Ext}^1_A(W_k, X_k)$. Or $W_k = \oplus_{i=0}^k L\otimes x^{-i}$ en tant que A-module, et donc $\mathrm{Ext}^1_A(W_k, X_k) = \oplus_{i=0}^k \mathrm{Ext}^1_A(L\otimes x^{-i}, X_k) = \oplus_{i=0}^k H^1(A, X_k\otimes x^i)$; la projection sur le terme correspondant à $i = k$ fournit donc une application de $\mathrm{Ext}^1_G(W_k, X_k)$ dans $H^1(A, X_k \otimes x^k)$, et le lemme 2.9 montre que cette application est un isomorphisme. Par ailleurs, on a démontré au cours de la preuve du lemme 2.9 que l'injection de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ dans X_k induit un isomorphisme $H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes x^k) \cong H^1(A, X_k\otimes x^k)$, d'où l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_G(W_k, X_k) \cong H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes x^k)$.

(iii) On déduit du (ii) et de la prop. 1.34 des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Ext}^1_G(W(\delta_1, \delta_2), \mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)) \cong H^1(A^+, \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \otimes x^k) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1)),$$

si $\delta_1 = x^k\delta_2\chi$.

3. Le module $\Delta \boxtimes \{0\}$

Ce chapitre est consacré à l'étude du module $\Delta \boxtimes \{0\} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\Delta)$, si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$. Il est clair que $\Delta \boxtimes \{0\}$ est muni d'une structure de (φ, Γ)-module sur $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R})$, et on prouve que ce dernier anneau est égal à $L\{\{t\}\}$ et que $\Delta \boxtimes \{0\}$ est libre sur $L\{\{t\}\}$, de rang inférieur ou égal à celui de Δ sur $\mathscr{R}$ (et même que l'application naturelle $\mathscr{R} \otimes_{L\{\{t\}\}} (\Delta \boxtimes \{0\}) \to \Delta$ est injective). La démonstration repose sur un théorème de structure pour les φ-modules de type fini sur $L\{\{t\}\}$ (th. 3.6) et le fait que $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R})) = \mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})$ (th. 3.18).

3.1. (φ, Γ)-module sur $L\{\{t\}\}$

3.1.1. L'anneau $L\{\{t\}\}$. — On rappelle que $L\{\{t\}\}$ est le sous-anneau de $\mathscr{R}^+$ des séries $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_nt^n$ à coefficients dans L, qui convergent pour toute valeur de t. C'est la limite projective des anneaux de fonctions L-analytiques sur les disques $v_p(t) \geq -n$, pour $n \in \mathbf{N}$, et comme chacun de ces anneaux est un anneau principal de Banach, $L\{\{t\}\}$ est un anneau de Fréchet-Stein (tout sous-module fermé d'un module libre de rang d est libre et de rang $\leq d$; un sous-module de type fini d'un module libre de type fini est fermé (et donc libre)). La théorie des polygones de Newton montre que $f \in L\{\{t\}\}$ ne s'annule pas si et seulement si $f \in L^*$; en particulier, on a $(L\{\{t\}\})^* = L^*$.

On peut aussi considérer $L\{\{t\}\}$ comme un sous-anneau de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$, et la topologie sur $L\{\{t\}\}$ induite par celle de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ coïncide avec celle décrite ci-dessus : l'injection de $L\{\{t\}\}$ dans $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ est continue et son image est fermée (elle est fermée dans $\mathscr{R}^+$ car c'est l'intersection des noyaux des $1 - \varphi^n\psi^n$ (cf. prop. 3.9), et $\mathscr{R}^+$ est fermé dans $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$) ; le théorème de l'image ouverte pour les fréchets montre donc que cette injection est un isomorphisme de fréchets.

Un *diviseur* sur $\mathbf{C}_p$ est une expression de la forme $D = \sum_{\alpha\in\mathbf{C}_p} n_\alpha[\alpha]$, où les n_α sont des éléments de $\mathbf{Z}$. Un tel diviseur est *effectif* si $n_\alpha \geq 0$ pour tout α, *localement fini* si $\sum_{v_p(\alpha)\geq -M} |n_\alpha| < +\infty$ pour tout $M \in \mathbf{N}$; il est *défini sur* L si $n_{g(\alpha)} = n_\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}_p$ et $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/L)$. En particulier, si D est localement fini et défini sur L, on a $n_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \notin \overline{\mathbf{Q}}_p$.

Si $f \in L\{\{t\}\}$ est non nul, alors $\mathrm{Div}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbf{C}_p} v_\alpha(f)[\alpha]$ est un diviseur effectif sur $\mathbf{C}_p$, localement fini et défini sur L. Si I est un idéal non nul de type fini (et donc principal) de $L\{\{t\}\}$, on note $\mathrm{Div}(I)$ le diviseur $\mathrm{Div}(f)$, pour n'importe quel générateur f de I. L'application $I \mapsto \mathrm{Div}(I)$, ainsi définie, induit une bijection de l'ensemble des idéaux non nuls et de type fini de $L\{\{t\}\}$ sur celui des diviseurs effectifs, localement finis et définis sur L ; de plus, $g \in I - \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{Div}(g) - \mathrm{Div}(I)$ est un diviseur effectif.

Les actions de φ et Γ sur $\mathscr{R}^+$ induisent des automorphismes de $L\{\{t\}\}$: on a $\varphi\big(\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n t^n\big) = \sum_{n \in \mathbf{N}} p^n a_n t^n$ et $\sigma_b(\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n t^n) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n b^n t^n$.

Lemme 3.1. — *Un idéal de $L\{\{t\}\}$, de type fini et stable par Γ ou par φ, est de la forme (t^k), avec $k \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Soit I un idéal de $L\{\{t\}\}$, de type fini et stable par Γ, et soit $D = \sum_{\alpha \in \mathbf{C}_p} n_\alpha[\alpha]$ le diviseur associé.

• Si I est stable par $\sigma_a \in \Gamma$, alors D est fixe par σ_a et donc $n_{a\alpha} = n_\alpha$, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $\alpha \in \mathbf{C}_p$. Comme D est localement fini, cela implique $n_\alpha = 0$ si $\alpha \neq 0$.

• Si I est stable par φ, alors D est fixe par φ et donc $n_{p\alpha} = n_\alpha$, quel que soit $\alpha \in \mathbf{C}_p$. Comme D est localement fini, cela implique $n_\alpha = 0$ si $\alpha \neq 0$.

Dans les deux cas, cela implique que $I = (t^{n_0})$, ce que l'on cherchait à prouver.

Lemme 3.2. — *Si $\alpha \in L$, alors $\varphi - \alpha$ induit un isomorphisme sur $L\{\{t\}\}$ sauf si $\alpha = p^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, auquel cas le noyau de $\varphi - \alpha$ est $L\,t^i$ et $\varphi - \alpha$ induit un isomorphisme du supplémentaire $\{\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k t^k,\ a_i = 0\}$ du noyau.*

Démonstration. — Cela suit de ce que $(\varphi - \alpha)\big(\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k t^k\big) = \sum_{k \in \mathbf{N}} (p^k - \alpha) a_k t^k$.

Lemme 3.3. — *Si $A, B \in \mathbf{GL}_d(L\{\{t\}\})$, et si $U \in \mathbf{M}_d(L\{\{t\}\})$ a un coefficient constant inversible et vérifie $A\varphi(U) = UB$, alors $U \in \mathbf{GL}_d(L\{\{t\}\})$.*

Démonstration. — Soit $\Delta = \det U$. Comme A et B sont inversibles leurs déterminants appartiennent à L^* et la relation satisfaite par U se traduit par $\Delta(pt) = \alpha\Delta(t)$, avec $\alpha \in L^*$. Il s'ensuit que si a est un zéro de Δ, alors $p^k a$ aussi, et comme Δ n'a qu'un nombre fini de zéro dans toute boule, cela implique que Δ ne s'annule pas en dehors de 0. Comme Δ ne s'annule pas non plus en 0 par hypothèse, il s'ensuit que $\Delta \in L^*$, ce qui permet de conclure.

3.1.2. φ-modules. — Un φ-module M sur $L\{\{t\}\}$ est un $L\{\{t\}\}$-module libre de type fini, muni d'une action semi-linéaire bijective de φ (on remarquera qu'il suffit que l'action soit surjective pour qu'elle soit bijective).

Lemme 3.4. — *Soit M un φ-module de rang d sur $L\{\{t\}\}$, et soit $v \in M$ tel qu'il existe $\alpha \in L^*$ avec $\varphi(v) = \alpha v$. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $t^{-k}v \in M$ et $M/L\{\{t\}\}t^{-k}v$ soit libre (de rang $d-1$) sur $L\{\{t\}\}$.*

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de M sur $L\{\{t\}\}$ et soient $v = v_1e_1 + \cdots + v_de_d$ la décomposition de v dans cette base et I l'idéal $(v_1, \dots, v_d)$. Alors I est stable par φ et donc de la forme (t^k), avec $k \in \mathbf{N}$, d'après le lemme 3.1. On en déduit le résultat.

Soit M un φ-module sur $L\{\{t\}\}$, et soit $\overline{M} = M/tM$; c'est un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'un isomorphisme φ. Si $P \in L[X]$ est irréductible et unitaire, on note M_P (resp. $\overline{M}_P$) l'ensemble des $v \in M$ (resp. $v \in \overline{M}$) tels que $P(\varphi)^n \cdot v = 0$, pour $n \gg 0$, et si $k \in \mathbf{N}$, on note $P[k]$ le polynôme $p^{kd}P(X/p^k)$ (ses racines sont celles de P multipliées par p^k).

Lemme 3.5. — *L'application naturelle $M_P \to \overline{M}_P$ est surjective.*

Démonstration. — Quitte à étendre les scalaires, on peut supposer que toutes les valeurs propres de φ sur $\overline{M}$ appartiennent à L. Soit α une valeur propre de φ sur $\overline{M}$ de valuation minimale, et soient v un vecteur propre pour cette valeur propre et $\tilde{v}$ un relèvement de v dans M. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n = \alpha^{-n}\varphi^n(\tilde{v})$; on a $u_{n+1} - u_n = \alpha^{-n}\varphi^n(x)$, où $x = \alpha^{-1}\varphi(\tilde{v}) - \tilde{v} \in tM$. L'hypothèse selon laquelle α est de valuation minimale implique que l'on peut trouver une base de $\overline{M}$ dans laquelle la matrice de $\alpha^{-1}\varphi$ soit à coefficients dans $\mathscr{O}_L$. On peut relever cette base en une base de M sur $L\{\{t\}\}$ (en appliquant un élément de $\mathbf{GL}_d(L)$ bien choisi à une base quelconque de M), et dans la base $e_1, \dots, e_d$ obtenue, la matrice B de $\alpha^{-1}\varphi$ est à coefficients dans $\mathscr{O}_L + tL\{\{t\}\}$. Comme la matrice de $\alpha^{-1}\varphi$ dans la base $te_1, \dots, te_d$ de tM est pB, et comme celle de $\alpha^{-n}\varphi^n = (\alpha^{-1}\varphi)^n$ est $p^nB(t)B(pt)\cdots B(p^{n-1}t)$, on en déduit que $\alpha^{-n}\varphi^n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et donc que u_n a une limite u quand $n \to +\infty$. Comme u_n a pour image v dans $\overline{M}$, pour tout n, il en est de même de u. Par ailleurs, on a $\varphi(u) = \alpha u$ par construction. On en déduit, grâce au lemme 3.4, que $M' = M/(L\{\{t\}\}u)$ est un φ-module libre de rang $d-1$ sur $L\{\{t\}\}$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et relever tout élément x de $\overline{M}'_\beta = (\overline{M}/Lv)_\beta$, si β est une valeur propre de φ sur M'/tM', en un élément $\tilde{x}$ de M tel que $(\varphi - \beta)^n\tilde{x} \in tL\{\{t\}\}u$, pour n assez grand. Il existe alors $a \in tL\{\{t\}\}$ tel que $(\varphi - \beta)^n\tilde{x} = au$, et il résulte du lemme 3.2 que l'on peut trouver $b \in tL\{\{t\}\}$ tel que $(\alpha\varphi - \beta)b = a$ (resp. $(\alpha\varphi - \beta)b - a \in Lt^i$), si $\beta \notin p^{\mathbf{N}-\{0\}}\alpha$ (resp. si $\beta = p^i\alpha$, avec $i \geq 1$). Alors $\tilde{x} - bu$ est un relèvement de x dans M_β. On en déduit le résultat.

Théorème 3.6. — *Si M est un φ-module de rang d sur $L\{\{t\}\}$, il existe une base $e_1, \dots, e_d$ de M dans laquelle la matrice de φ est $A + N$, où $A \in \mathrm{GL}_d(L)$ est semi-simple, inversible, et N est nilpotente, commute à A, et se décompose sous la forme*

$N = N_0 + tN_1 + t^2N_2 + \cdots$, *où* $N_i \in \mathrm{M}_d(L)$ *envoie le noyau* M_P *de* $P(A)$ *dans celui* $M_{P[-i]}$ *de* $P(p^iA)$, *pour tout* P (en particulier, la somme est finie).

Démonstration. — On choisit une section $\iota_P : \overline{M}_P \to M_P$ de l'application naturelle (c'est possible d'après le lemme 3.5), et on note $\iota : \overline{M} \to M$ la somme directe des ι_P (on a $\overline{M}_P = 0$ sauf pour un nombre fini de P et $\overline{M} = \oplus_P \overline{M}_P$). Il est alors plus ou moins immediat que $M_P = \iota(\overline{M}_P) \oplus t\iota(\overline{M}_{P[-1]}) \oplus \cdots$ (la somme est finie). Il en résulte que si l'on choisit une base de $\overline{M}_P$, pour tout P, et l'on considère la famille des $\iota(e_i)$, où les e_i parcourent la réunion des bases des $\overline{M}_P$, les polynômes étant rangés dans l'ordre croissant pour la valuation de leurs racines, alors la matrice de φ est triangulaire supérieure par blocs, chacun des blocs diagonaux étant la matrice de φ sur un des $\overline{M}_P$, les blocs au-dessus de la diagonale étant tous nuls sauf celui correspondant à P en horizontal et $P[k]$ en vertical, qui est à coefficients dans $L\,t^k$. En particulier, cette matrice est inversible (ce qui prouve, d'après le lemme 3.3, que les $\iota(e_i)$ forment une base de M sur $L\{\{t\}\}$), et elle a la forme voulue.

3.1.3. (φ,Γ)*-modules.* — Un (φ,Γ)*-module sur* $L\{\{t\}\}$ est un φ-module muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

On dit que v est *propre sous l'action de* φ *et* Γ s'il existe $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que l'on ait $\varphi(v) = \delta(p)v$ et $\sigma_a(v) = \delta(a)v$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$ (on dit alors que v est *propre pour le caractère* δ).

Exemple 3.7. — (i) Un $L\{\{t\}\}$-module de rang 1 possède, à multiplication près par un élément de $(L\{\{t\}\})^* = L^*$, une unique base e. Il en résulte que si M est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $L\{\{t\}\}$, et si e en est une base, alors il existe $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que e soit propre pour δ.

(ii) Si M est un (φ,Γ)-module de rang 2 sur $L\{\{t\}\}$, il résulte du th. 3.6 que, quitte à faire une extension quadratique de L, il existe e_1 propre pour l'action de φ et Γ (pour un caractère δ_1) tel que $L\{\{t\}\}e_1$ soit saturé dans M. On a alors $M/L\{\{t\}\}e_1 = L\{\{t\}\}e_2$, où e_2 est propre pour un caractère δ_2, et on est dans un des deux cas exclusifs suivants :

- e_2 se relève dans M en e_2' propre pour δ_2,
- il existe $k \in \mathbf{N}$ et $(\alpha,\beta) \in L^2 - \{(0,0)\}$, tels que $\delta_2 = x^k\delta_1$ et e_2 se relève dans M en e_2' vérifiant

$$\varphi(e_2') = p^k\delta_1(p)e_2' + \alpha t^k e_1 \quad\text{et}\quad \sigma_a(e_2') = a^k\delta_1(a)e_2' + \beta t^k e_1, \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^*.$$

Dans les deux cas, e_1, e_2' forment une base de M sur $L\{\{t\}\}$. De plus, dans le premier cas ou si $k = 0$ dans le second, le L-espace vectoriel $M_0 = Le_1 + Le_2'$ est stable par φ et Γ et c'est le seul sous-L-espace vectoriel de M, stable par φ et Γ, tel que l'application naturelle $L\{\{t\}\} \otimes_L M_0 \to M$ soit un isomorphisme. (Dans le second cas, si $k \geq 1$, les sous-L-espaces vectoriels de dimension 2, stables par φ et Γ, et non inclus dans $L\{\{t\}\}e_1$, sont de la forme $Lt^{k+i}e_1 + Lt^ie_2'$, avec $i \in \mathbf{N}$; ils n'engendrent donc pas M.)

3.2. L'action de φ sur $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$

3.2.1. L'action de φ sur $\mathscr{R}$

Lemme 3.8. — (i) $\varphi^n(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}^+ = \varphi^n(\mathscr{R}^+)$.

(ii) $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}) = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}^+)$.

Démonstration. — $\phi_{\varphi^n(f)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin p^n\mathbf{Z}_p, \\ \phi_f(\frac{x}{p^n}), & \text{si } x \in p^n\mathbf{Z}_p. \end{cases}$

On en déduit que :

• $\phi_f(x) = 0$ si $\phi_{\varphi^n(f)} = 0$, ce qui démontre le (i) car $\phi_f = 0$ équivaut à $f \in \mathscr{R}^+$,

• l'appartenance de f à $\varphi^n(\mathscr{R})$ entraîne la nullité de ϕ_f en dehors de $p^n\mathbf{Z}_p$. Comme ϕ_f est continue (en particulier en 0), on en déduit que $f \in \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R})$ implique $\phi_f = 0$, et donc $f \in \mathscr{R}^+$. Le (ii) est donc une conséquence du (i).

Proposition 3.9. — $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}) = L\{\{t\}\}$.

Démonstration. — D'après le lemme 3.8, on a $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}) = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}^+)$. Maintenant, l'application qui à une distribution μ associe sa transformée d'Amice A_μ induit un isomorphisme de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ sur $\mathscr{R}^+$. L'image inverse de $\varphi^n(\mathscr{R}^+)$ par cet isomorphisme est l'ensemble des distributions à support dans $p^n\mathbf{Z}_p$ et donc celle de $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}^+)$ est l'ensemble des distributions de support $\{0\}$. L'isomorphisme $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R}) = L\{\{t\}\}$ est donc une traduction du (ii) de la prop. 1.2.

3.2.2. Le corps $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$. — Si a est un entier ≥ 1, on pose $r_a = \frac{1}{(p-1)p^{a-1}}$, et on note D_a le disque $v_p(T) > r_a$ et C_a la couronne $0 < v_p(T) \leq r_a$ complémentaire de D_a dans le disque unité. La théorie des polygones de Newton permet de montrer que $f \in \mathscr{E}^{]0,r_a]}$ est inversible si et seulement si f ne s'annule pas sur C_a.

Un *diviseur* sur C_a est une expression de la forme $D = \sum_{\alpha\in C_a} n_\alpha[\alpha]$, où les n_α sont des éléments de $\mathbf{Z}$. Un tel diviseur est *localement fini*, si $\sum_{v_p(\alpha)\geq r_n} |n_\alpha| < +\infty$, pour tout $n \geq a$; il est *défini sur* L si $n_{g(\alpha)} = n_\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}_p$ et $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/L)$.

Si $f \in \mathscr{E}^{]0,r_a]}$ est non nul, alors $\mathrm{Div}(f) = \sum_{\alpha\in C_a} v_\alpha(f)[\alpha]$ est un diviseur sur C_a localement fini et défini sur L. Si I est un idéal non nul de type fini (et donc principal) de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$, on note $\mathrm{Div}(I)$ le diviseur $\mathrm{Div}(f)$, pour n'importe quel générateur f de I. L'application $I \mapsto \mathrm{Div}(I)$, ainsi définie, induit une bijection de l'ensemble des idéaux non nuls et de type fini de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ sur celui des diviseurs effectifs, localement finis et définis sur L ; de plus, $g \in I - \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{Div}(g) - \mathrm{Div}(I)$ est un diviseur effectif.

Soit $D = \sum_{\alpha\in C_a} n_\alpha[\alpha]$ un diviseur localement fini. On dit que D est C_a-stable par $\boldsymbol{\mu}_{p^n}$ ($n = \infty$ inclus) si $n_{\zeta(1+\alpha)-1} = n_\alpha$ pour tous $\alpha \in C_a$ et $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}$ tels que $\zeta(1+\alpha) - 1 \in C_a$.

Lemme 3.10. — *Si $D = \sum_{\alpha\in C_a} n_\alpha[\alpha]$ est effectif, localement fini, défini sur L et C_a-stable par $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, il existe $g \in L\{\{t\}\} \subset \mathscr{E}^{]0,r_a]}$ tel que $D = \mathrm{Div}(g)$* (en tant que diviseur sur C_a).

Démonstration. — Soit $D' = \sum_{\alpha\in \mathbf{C}_p} n_\beta[\beta]$ le diviseur sur $\mathbf{C}_p$ défini par $n_\beta = n_\alpha$, si $\log(1+\alpha) = 1+\beta$. Comme deux solutions de l'équation $\log(1+\alpha) = 1+\beta$ s'obtiennent à partir de l'une d'entre elles en faisant agir $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, la condition selon laquelle D est C_a-stable par $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ implique que D' est bien défini. Il est alors facile de voir que D' est localement fini et défini sur L, et donc est le diviseur d'un élément g de $L\{\{t\}\}$ (vu comme une fonction analytique de t sur $\mathbf{C}_p$). Par construction, le diviseur de g vu comme une fonction analytique sur C_a via le changement de variable $t = \log(1+T)$ est alors D. On en déduit le résultat.

Soient $U = \{f \in \mathscr{R}^+,\ f(0) = 1\}$ et $U_a \subset U$ l'ensemble des f ne s'annulant pas sur D_a.

Lemme 3.11. — *Tout élément non nul f de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ peut s'écrire sous la forme $f = f^+f^{\{0\}}$, avec $f^+ \in U_a$, et $f^{\{0\}} \in (\mathscr{E}^{]0,r_a]})^*$.*

Démonstration. — Soit $D = \sum_{0<v_p(z)\le r_a} v_z(f)\, z$ le diviseur de f. Si $b \ge a$, l'ensemble $\{z,\ r_b < v_p(z) \le r_a$ et $v_z(f) \ne 0\}$ est fini et on a $v_{\sigma(z)}(f) = v_z(f)$, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/L)$. Ces conditions impliquent l'existence de $f^+ \in U_a$ dont le diviseur est D, et alors $g = (f^+)^{-1}f$ ne s'annule pas sur C_a et donc appartient à $(\mathscr{E}^{]0,r_a]})^* = (\mathscr{E}^{(0,r_a]})^*$. Ceci prouve l'existence d'une décomposition sous la forme souhaitée.

Corollaire 3.12. — *Tout élément non nul f de $\mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]})$ peut s'écrire sous la forme $f = f^{\{0\}}\frac{f^+}{f^-}$, avec $f^+, f^- \in U_a$ sans zéros communs, et $f^{\{0\}} \in (\mathscr{E}^{]0,r_a]})^*$.*

Si $f = f^{\{0\}}\frac{f^+}{f^-} \in \mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]})$, son diviseur $\mathrm{Div}(f) = \sum_{\alpha\in C_a} v_\alpha(f)[\alpha]$ est aussi égal à $\mathrm{Div}(f^+) - \mathrm{Div}(f^-)$.

Lemme 3.13. — *Si $f \in \mathscr{E}^{]0,r_a]}$ est non nul, il existe $g \in L\{\{t\}\}$ tel que $f^{-1}\mathscr{E}^{]0,r_a]} \cap \mathrm{Fr}(L\{\{t\}\}) = g^{-1}L\{\{t\}\}$.*

Démonstration. — Soit D le diviseur $\sum_{v_p(T)>0} n_\alpha[\alpha]$, où

$$n_\alpha = \inf\big(\{v_{(1+\alpha)\zeta-1}(f),\ \zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty},\ v_p((1+\alpha)\zeta - 1) \le r_a\}\big).$$

Par construction, D est invariant par $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ (où $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ agit par $\alpha \mapsto (1+\alpha)\zeta - 1$), et est localement fini car on a $n_\alpha \le v_\alpha(f)$, si $v_p(\alpha) \le r_a$. Il existe donc $g \in L\{\{t\}\}$ dont D est le diviseur, et il est facile de voir que tout élément de $L\{\{t\}\}$ divise g s'il divise f. On en déduit le résultat.

3.2.3. L'action de φ sur $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$

Lemme 3.14. — (i) *$\mathscr{R}^+$ est un $\varphi(\mathscr{R}^+)$-module libre de rang p de base les $(1+T)^i$, pour $0 \le i \le p-1$.*

(ii) *Si $f \in \mathscr{R}^+$, alors $\mathrm{N}_{\mathscr{R}^+/\varphi(\mathscr{R}^+)}f = \prod_{\eta^p=1} f((1+T)\eta - 1)$.*

(iii) *Si $f \in \mathscr{R}^+$, alors f divise $\mathrm{N}_{\mathscr{R}^+/\varphi(\mathscr{R}^+)}f$ dans $\mathscr{R}^+$.*

Démonstration. — Les (i) et (ii) suivent de ce que $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$; le (iii) est une conséquence du (ii).

Lemme 3.15. — (i) *Tout élément f de $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$ peut s'écrire sous la forme $f = \frac{a}{\varphi(b)}$, avec $a, b \in \mathscr{R}$.*

(ii) *$\psi(f) = \frac{\psi(a)}{b}$ ne dépend pas de l'écriture choisie.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{Fr}(\mathscr{R}) = \cup_{a\ge 1}\mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]})$, on peut écrire f sous la forme $f = f^{\{0\}}\frac{f^+}{f^-}$, et le (iii) du lemme 3.14 fournit une écriture sous la forme voulue avec $a = f^{\{0\}}f^+\mathrm{N}_{\mathscr{R}^+/\varphi(\mathscr{R}^+)}f^-/f^-$ et $b = \varphi^{-1}(\mathrm{N}_{\mathscr{R}^+/\varphi(\mathscr{R}^+)}f^-)$.

Si $f = \frac{a}{\varphi(b)} = \frac{a'}{\varphi(b')}$, on a $a\varphi(b') = a'\varphi(b)$ et donc $\psi(a)b' = \psi(a')b$, ce qui démontre le (ii).

Lemme 3.16. — *Si $n \in \mathbf{N}$, alors $\mathscr{R} \cap \varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R})) = \varphi^n(\mathscr{R})$.*

Démonstration. — Soit $y \in \mathrm{Fr}(\mathscr{R})$ tel que $\varphi^n(y) \in \mathscr{R}$. Il existe $a \ge 1$ tel que $y \in \mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{(0,r_a]})$ et, d'après le cor. 3.12, on peut écrire y sous la forme $y = y^{\{0\}}\frac{y^+}{y^-}$, avec $y^+, y^- \in U_a$ sans zéros communs, et $y^{\{0\}} \in (\mathscr{E}^{]0,r_a]})^*$. Maintenant, si $\varphi^n(y) \in \mathscr{R}$, il existe b (que l'on peut supposer $\ge a+n$) tel que $\varphi^n(y)$ n'ait pas de pôle dans C_b. Ceci implique que $\varphi^n(y^-)$ n'a pas de zéro dans C_b, et donc que y^- n'a pas de zéro dans C_{b-n}. On en déduit l'appartenance de y^- à $(\mathscr{E}^{]0,r_{b-n}]})^*$ et celle de y à $\mathscr{R}$, ce qui permet de conclure.

Si $a \in \mathbf{Z}$ est ≤ 1, on pose $r_a = r_1 + 1 - a$. Alors $\psi(\mathscr{E}^{]0,r_a]}) \subset \mathscr{E}^{]0,r_{a+1}]}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$ (cela résulte de [**13**, prop. I.13]), et $\varphi(\mathscr{E}^{]0,r_{a+1}]}) \subset \mathscr{E}^{]0,r_a]}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$ car $z \in C_{a+1}$ implique $(1+z)^p - 1 \in C_a$.

Lemme 3.17. — *Si $f \in \mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]}) \cap \varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R}))$, alors $\mathrm{Div}(f)$ est C_a-stable par $\boldsymbol{\mu}_{p^n}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.14, on peut écrire f sous la forme $f = \frac{g}{\varphi^n(h)}$, avec $\varphi^n(h) = \mathrm{N}_{\mathscr{R}^+/\varphi^n(\mathscr{R}^+)}(f^-) \in \mathscr{R}^+$ et $g \in \mathscr{E}^{]0,r_a]}$ (cf. cor. 3.12 pour la définition de f^-). L'hypothèse $f \in \varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R}))$ implique que $f = \varphi^n(\psi^n(f))$. Or $\psi^n(f) = \frac{\psi^n(g)}{h}$, et $\psi^n(g) \in \mathscr{E}^{]0,r_{a-n}]}$. Il s'ensuit que si $\sum_{\alpha\in C_{a-n}} n_\alpha[\alpha]$ est le diviseur de $\psi^n(f)$ sur C_{a-n} (avec $n_\alpha = v_\alpha(\psi^n(g)) - v_\alpha(h)$), celui de f est $\sum_{\alpha\in C_{a-n}}\sum_{\beta\in C_a,\ (1+\beta)^{p^n}=1+\alpha} n_\alpha[\beta]$. Il est clair sur cette expression que ce diviseur est C_a-stable par $\boldsymbol{\mu}_{p^n}$.

Théorème 3.18. — $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R})) = \mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})$.

Démonstration. — Soit $f \in \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R}))$. Il existe $a \geq 1$ tel que $f \in \mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]})$, et il résulte du lemme 3.17 que $\mathrm{Div}(f)$ est C_a-stable par $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$. Il existe donc $g \in \mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})$ tel que $\mathrm{Div}(g) = \mathrm{Div}(f)$ (cf. lemme 3.10). Cela signifie que $\frac{f}{g} \in (\mathscr{E}^{]0,r_a]})^* \subset \mathscr{R}$. Par ailleurs, φ est bijectif sur $\mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})$ puisqu'il l'est sur $L\{\{t\}\}$. Il s'ensuit, grâce au lemme 3.16, que $\frac{f}{g} \in \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R})$, et donc, grâce à la prop. 3.9, que $\frac{f}{g} \in L\{\{t\}\}$. On en déduit le résultat.

3.3. Le $L\{\{t\}\}$-module $\Delta \boxtimes \{0\}$

3.3.1. Structure de $\Delta \boxtimes \{0\}$

Soit $\Delta \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, de rang d. D'après [**1**, th. I.3.3], il existe $m(\Delta) \in \mathbf{N}$ et, pour $a \geq m(\Delta)$, un sous-$\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-module $\Delta^{]0,r_a]}$ de Δ vérifiant les propriétés suivantes (qui les caractérisent) :

• $\Delta^{]0,r_{m(D)}]}$ est de rang d sur $\mathscr{E}^{]0,r_{m(D)}]}$ et les applications naturelles $\mathscr{E}^{]0,r_a]} \otimes \Delta^{]0,r_{m(D)}]} \to \Delta^{]0,r_a]}$ et $\mathscr{R} \otimes \Delta^{]0,r_{m(D)}]} \to \Delta$ (les produits tensoriels sont au-dessus de $\mathscr{E}^{]0,r_{m(D)}]}$) sont des isomorphismes (et donc $\Delta^{]0,r_a]}$ est de rang d sur $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ pour tout $a \geq m(D)$).

• $\varphi(\Delta^{]0,r_a]}) \subset \Delta^{]0,r_{a+1}]}$, pour tout $a \geq m(D)$.

On peut déduire de ces propriétés que :

• $\psi(\Delta^{]0,r_{a+1}]}) \subset \Delta^{]0,r_a]}$, pour tout $a \geq m(D)$ et que $\varphi(x) \in \Delta^{]0,r_{a+1}]}$ si et seulement si $x \in \Delta^{]0,r_a]}$.

On note $\Delta\boxtimes\{0\}$, le L-espace vectoriel $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\Delta)$. C'est un $L\{\{t\}\} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathscr{R})$-module.

Lemme 3.19. — *Soient $x_1, \ldots, x_d \in \Delta \boxtimes \{0\}$. Si $x_1, \ldots, x_d$ sont linéairement dépendants sur $\mathscr{R}$, ils le sont déjà sur $L\{\{t\}\}$.*

Démonstration. — Soit $\sum_{i=1}^r f_i x_i = 0$ une relation de longueur minimale sur $\mathscr{R}$. En divisant tout par f_1, on obtient une relation $\sum_{i=1}^r g_i x_i = 0$ de longueur minimale sur $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$, avec $g_1 = 1$. Comme $x_i \in \varphi^n(\Delta)$, on a $\varphi^n(\psi^n(x_i)) = x_i$ et $\psi^n(g_i x_i) = \psi^n(g_i\varphi^n(\psi^n(x_i))) = \psi^n(g_i)\psi^n(x_i)$; on en déduit la relation $\sum_{i=1}^r \varphi^n(\psi^n(g_i))x_i = 0$. Comme $\varphi^n(\psi^n(g_1)) = 1$, la minimalité de la relation entraîne la relation $g_i = \varphi^n\psi^n(g_i))$, pour tout i et tout $n \in \mathbf{N}$. Il s'ensuit que $g_i \in \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathrm{Fr}(\mathscr{R})) = \mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})$. On en déduit le résultat.

Théorème 3.20. — *Si $\Delta \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$ est de rang d, alors $\Delta \boxtimes \{0\}$ est un (φ, Γ)-module de rang $\leq d$ sur $L\{\{t\}\}$.*

Démonstration. — Soient j la dimension du sous-$\mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})$-espace vectoriel de $\mathrm{Fr}(\mathscr{R}) \otimes_{\mathscr{R}} \Delta$ engendré par $M = \Delta \boxtimes \{0\}$ (d'après le lemme 3.19, on a $j \leq d$), et $e_1, \ldots, e_j$ une base de cet espace vectoriel constituée d'éléments de $\Delta \boxtimes \{0\}$.

Soit $a \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^{]0,r_a]}$ contienne $e_1, \dots, e_j$ et, si $n \geq a$, soit $M_n = \Delta^{]0,r_n]} \cap M$. Alors φ induit une bijection de M_n sur M_{n+1} (car φ est bijectif sur M et $\varphi(x) \in \Delta^{]0,r_{n+1}]}$ si et seulement si $x \in \Delta^{]0,r_n]}$) et on a $M = \cup_{n \geq a} M_n$.

Soit X l'adhérence du $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-module engendré par M_a dans $\Delta^{]0,r_a]}$. Alors X est un $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-module de rang j [il est libre en tant que sous-module fermé du $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-module libre $\Delta^{]0,r_a]}$; il contient $e_1, \dots, e_j$ qui sont libres sur $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$, et donc son rang est $\geq j$; il est contenu dans le $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$-espace vectoriel F engendré par $e_1, \dots, e_j$ ce qui implique qu'une base de X sur $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ (une telle base peut se compléter en une base de $\Delta^{]0,r_a]}$) est aussi une base de F sur $\mathrm{Fr}(\mathscr{R})$] et $e_1, \dots, e_j$ est une base de $\mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]}) \otimes X$ sur $\mathrm{Fr}(\mathscr{E}^{]0,r_a]})$. Si δ est le déterminant de $e_1, \dots, e_j$ dans une base de M_a sur $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$, les coordonnées de δx par rapport à $e_1, \dots, e_j$ sont dans $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$, si $x \in M_a$. Par ailleurs, $M_a = \Delta^{]0,r_a]} \cap \big(\oplus_{i=1}^{j} \mathrm{Fr}(L\{\{t\}\})\, e_i\big)$. On en déduit, en utilisant le lemme 3.13, l'existence de $g \in L\{\{t\}\}$ tel que M_a soit inclus dans $\oplus_{i=1}^{j} g^{-1} L\{\{t\}\}\, e_i$. Comme M_a est fermé dans $\Delta^{]0,r_a]}$ (c'est l'intersection des noyaux des $1 - \varphi^n \psi^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), son image par l'application qui à x associe les coordonnées de gx dans la base $e_1, \dots, e_j$ est fermée dans $(\mathscr{E}^{]0,r_a]})^j$ et est incluse dans $(L\{\{t\}\})^j$ par construction de g. Comme la topologie de $L\{\{t\}\}$ induite par celle de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ est sa topologie naturelle, on en déduit que cette image est fermée dans $(L\{\{t\}\})^j$, et comme c'est un $L\{\{t\}\}$-module, il en résulte qu'elle est libre de rang j sur $L\{\{t\}\}$. On en déduit que M_a est libre de rang j sur $L\{\{t\}\}$ et on peut donc supposer que $e_1, \dots, e_j$ est une base de M_a sur $L\{\{t\}\}$.

Maintenant, M_{a+n} est stable par Γ et engendré par $\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_j)$. Il en résulte que l'idéal de $L\{\{t\}\}$ engendré par le déterminant de $e_1, \dots, e_j$ dans la base $\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_j)$ est stable par Γ et donc que ce déterminant est de la forme αt^k, avec $a \in L^*$ et $k \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, le déterminant $b(\gamma)$ de $\gamma(e_1), \dots, \gamma(e_j)$ dans la base $e_1, \dots, e_j$ appartient à $(L\{\{t\}\})^* = L^*$ puisque M_a est stable par Γ. La relation $(\det \sigma_a)\sigma_a(\det \varphi) = (\det \varphi)\varphi(\det \sigma_a)$ se traduit alors par la relation $b(\sigma_a)\alpha^{-1}a^{-k}t^{-k} = \alpha^{-1}t^{-k}b(\sigma_a)$, dont on déduit que $k = 0$. Il en résulte que $M_{a+n} = M_a$, pour tout n, et donc $\Delta \boxtimes \{0\} = M_a$. Ceci permet de conclure.

3.3.2. Le module $\Delta \boxtimes \{0\}$ *dans le cas de rang* 2. — Si $s \in \mathscr{S}$, le (φ, Γ)-module $\Delta(s)$ vit, par construction, dans une suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to \Delta(s) \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0$. On note e_1 la base canonique $1 \otimes \delta_1$ de $\mathscr{R}(\delta_1)$ et e_2 celle de $\mathscr{R}(\delta_2)$. On note aussi p_s la projection $\Delta(s) \to \mathscr{R}(\delta_2)$ et on choisit $\hat{e}_2 \in \Delta(s)$ tel que $p_s(\hat{e}_2) = e_2$.

Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ n'est pas exceptionnel, alors $t^{w(s)}e_2$ a un (unique) relèvement e_2' dans $\Delta(s)$, vérifiant $\varphi(e_2') = p^{w(s)}\delta_2(p)e_2'$ et $\sigma_a(e_2') = a^{w(s)}\delta_2(a)e_2'$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Si $x^{w(s)}\delta_2 = \delta_1$, alors $t^{w(s)}e_2$ a un relèvement e_2' dans $\Delta(s)$ (unique à addition près d'un multiple de e_1), vérifiant $\varphi(e_2') = p^{w(s)}\delta_2(p)e_2' + e_1$ et $\sigma_a(e_2') = a^{w(s)}\delta_2(a)e_2'$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Remarque 3.21. — Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ n'est pas exceptionnel, l'isomorphisme de la prop. 0.3 entre $\Delta(s)$ et $\Delta(s')$ se voit de la manière suivante. Le sous-$\mathscr{R}$-module $\mathscr{R}e_2'$

de $\Delta(s)$ est stable par φ et Γ (isomorphe à $\mathscr{R}(x^{w(s)}\delta_2)$) et est saturé. On en déduit la suite exacte $0 \to \mathscr{R}(x^{w(s)}\delta_2) \to \Delta(s) \to \mathscr{R}(x^{-w(s)}\delta_1) \to 0$, et l'image de e_1 dans $\mathscr{R}(x^{-w(s)}\delta_1)$ est $t^{w(s)}e'_1$, où l'on a noté e'_1 la base canonique de $\mathscr{R}(x^{-w(s)}\delta_1)$.

Lemme 3.22. — *Soit $\Delta \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, irréductible de rang 2.*

(i) *Si Δ possède un vecteur propre pour les actions de φ et Γ, alors Δ est triangulable.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \cup \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ les seuls vecteurs propres* (à multiplication près par un élément de L^*) *de $\Delta(s)$ pour les actions de φ et Γ sont les $t^k e_1$* (propre pour $x^k\delta_1$), *pour $k \in \mathbf{N}$; c'est aussi le cas si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ est exceptionnel.*

(iii) *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ n'est pas exceptionnel, les seuls vecteurs propres de $\Delta(s)$ pour les actions de φ et Γ sont les $t^k e_1$* (propre pour $x^k\delta_1$), *pour $k \in \mathbf{N}$, et les $t^k e'_2$* (propre pour $x^{k+w(s)}\delta_2$), *pour $k \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Si Δ_1 est un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 d'un (φ,Γ)-module Δ sur $\mathscr{R}$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $t^{-k}\Delta_1$ soit saturé dans Δ (cf. dém. de [**10**, lemme 3.2]). Ceci permet de démontrer le (i).

Maintenant, les seuls sous-(φ,Γ)-modules de $\mathscr{R}(\delta)$ sont les $t^k\mathscr{R}(\delta)$, pour $k \in \mathbf{N}$ (cf. prop. 1.24). On en déduit que les seuls vecteurs propres (à multiplication près par un élément de L^*) de $\mathscr{R}(\delta_1)$ pour les actions de φ et Γ sont les $t^k e_1$, pour $k \in \mathbf{N}$. De plus, si $v \notin \mathscr{R}e_1$ est propre pour φ et Γ, il en est de même de son image dans $\mathscr{R}(\delta_2)$ qui est donc de la forme $\alpha t^i e_2$, avec $\alpha \in L^*$; autrement dit, il existe $i \in \mathbf{N}$, tel que $t^i e_2$ admette un relèvement propre pour φ et Γ. D'après [**10**, lemme 4.9], cela implique que $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ n'est pas exceptionnel et que v est un multiple de $t^k e'_2$, avec $k \in \mathbf{N}$.

On en déduit le résultat.

Théorème 3.23. — *Soit $\Delta \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, irréductible de dimension 2. Alors $\Delta \boxtimes \{0\}$ possède un unique sous-L-espace vectoriel $(\Delta \boxtimes \{0\})_0$, stable par φ et Γ, tel que l'application naturelle $L\{\{t\}\} \otimes_L (\Delta(s) \boxtimes \{0\})_0 \to \Delta \boxtimes \{0\}$ soit un isomorphisme. Plus précisément :*

(i) *Si Δ n'est pas triangulable, alors $\Delta \boxtimes \{0\} = 0$ et donc $(\Delta \boxtimes \{0\})_0 = 0$.*

(ii) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, alors $(\Delta(s) \boxtimes \{0\})_0 = L\,e_1$.*

(iii) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, alors $(\Delta(s) \boxtimes \{0\})_0 = L\,e_1 \oplus L\,e'_2$.*

Démonstration. — Si $M = \Delta \boxtimes \{0\}$ n'est pas nul, alors il est de rang 1 ou 2 et quitte à faire une extension quadratique de L, il existe $v \in M$, propre pour les actions de φ et Γ (cf. ex. 3.7), ce qui, d'après le (i) du lemme 3.22, implique que Δ est triangulable.

Maintenant, soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$. On a une suite exacte $0 \to \mathscr{R}e_1 \boxtimes \{0\} \to \Delta(s) \boxtimes \{0\} \to \mathscr{R}e_2 \boxtimes \{0\}$, et $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \{0\} = \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathscr{R})e_1 = L\{\{t\}\}e_1$. De même $\mathscr{R}e_2 \boxtimes \{0\} = L\{\{t\}\}e_2$, et si l'image de $\Delta(s) \boxtimes \{0\}$ dans $\mathscr{R}e_2 \boxtimes \{0\}$ est non nulle, elle est de la forme $t^i L\{\{t\}\}e_2$, avec $i \in \mathbf{N}$. D'après l'ex. 3.7, on a alors deux possibilités :

• $t^i e_2$ admet un relèvement propre pour φ et Γ, et d'après [**10**, lemme 4.9], cela implique que $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$ et est non exceptionnel, auquel cas un tel relèvement de $t^i e_2$ existe si et seulement si $i \geq w(s)$ (où l'on peut prendre $t^{i-w(s)} e_2'$ comme relèvement).
• il existe $k \in \mathbf{N}$ et $(\alpha, \beta) \in L^2$ non nul, et un relèvement f de $t^i e_2$ tels que

$$\varphi(f) = p^k \delta_1(p) f + \alpha t^k e_1 \ \text{ et } \ \sigma_a(f) = a^k \delta_1(a) f + \beta t^k e_1, \ \text{ si } a \in \mathbf{Z}_p^*.$$

On en déduit que $x^k \delta_1 = x^i \delta_2$. Comme $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0$ et $v_p(\delta_1(p)) > 0$, cela implique $i > k$, et donc que $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$ est exceptionnel, et que $w(s) = i - k$. En particulier, on a $i \geq w(s)$, et comme on peut relever $t^{w(s)} e_2$ en e_2', on en déduit que $i = w(s)$ et que $k = 0$.

Cela prouve que M est de rang 2 si et seulement si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$, auquel cas il est engendré par e_1 et e_2'. Comme M est de rang ≥ 1, si $s \in \mathscr{S}_{\rm irr}$, cela prouve qu'il est de rang 1, engendré par e_1, si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm ng} \cup \mathscr{S}_*^{\rm st}$.

Enfin, l'existence et l'unicité de $(\Delta(s) \boxtimes \{0\})_0$ se déduisent de la description de M_0 dans l'ex. 3.7 (on remarquera que le second cas de cet exemple avec $k \geq 1$ a été exclu par la discussion précédente).

Ceci permet de conclure.

Remarque 3.24. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{E})$, à côté de $D \boxtimes \{0\} = \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(D)$ (qui est noté $D^{\rm nr}$ dans [**12**]), on dispose [**12**] de sous-modules $D^\natural \subset D^\sharp$ qui jouent un grand rôle dans l'établissement et l'étude [**13, 2, 14**] de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Par analogie avec les définitions et les propriétés de $D^\natural$ et $D^\sharp$, on est amené à définir, pour $\Delta \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{E})$, les sous-modules suivants :
• $\Delta^\sharp = \cap_{n \in \mathbf{N}} \psi^n(\Delta^{]0, r_a]})$, où $a \geq m(D)$ est quelconque.
• $\Delta^\natural$ est l'orthogonal de $\check{\Delta} \boxtimes \{0\}$ dans $\Delta^\sharp$.

Nous laissons au lecteur le soin de montrer, en utilisant le dictionnaire d'analyse fonctionnelle, que dans le cas $\Delta = \mathscr{R}$, alors $\Delta^\natural = \mathscr{R}^+$ et $\Delta^\sharp / \Delta^\natural$ est le sous-espace de ${\rm LA}(\mathbf{Z}_p)$ des ϕ qui sont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ d'une fonction analytique sur $\mathbf{C}_p$.

4. Les vecteurs localement analytiques de la série principale unitaire

Ce chapitre est consacré à la description (prop. 4.11) de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$. L'ingrédient principal en est la détermination (th. 4.4) du module de Jacquet dual $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))$ qui permet (th. 4.6) de dévisser le module $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$.

4.1. La représentation localement analytique $\mathbf{\Pi}(\Delta)$

4.1.1. Le faisceau $U \mapsto \Delta \boxtimes U$. — Soit $\Delta \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{R})$. Alors Δ est muni d'une action de P^+ donnée par $\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (1+T)^b \varphi^k \circ \sigma_a(z)$, si $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $b \in \mathbf{Z}_p$, et d'un inverse à gauche ψ de φ qui commute à l'action de Γ et qui est donné par la formule $\psi(\sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i)) = x_0$. On utilise ces données pour associer à Δ un faisceau $U \mapsto \Delta \boxtimes U$ sur $\mathbf{Z}_p$ (où U décrit les ouverts compacts de $\mathbf{Z}_p$), équivariant sous l'action de P^+, où P^+ agit sur $\mathbf{Z}_p$ par la formule $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x = ax+b$ habituelle. De manière précise :

- $\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p = \Delta$ et $\Delta\boxtimes\emptyset = 0$,
- $\Delta\boxtimes(i+p^k\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} p^k & i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Delta\subset\Delta$
- $\mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p} : \Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p\to\Delta\boxtimes(i+p^k\mathbf{Z}_p)$ est donné par $\mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k\circ\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

On remarquera que l'on a une suite exacte $0\to\mathscr{D}\to\Delta\to\mathrm{LA}\boxtimes\chi^{-1}\to 0$ de faisceaux P^+-équivariants sur $\mathbf{Z}_p$ si $\Delta = \mathscr{R}$.

Ce qui précède est valable pour un élément de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$ de rang arbitraire. Si Δ est de rang 2, on peut lui associer un faisceau $U\mapsto\Delta\boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ (où U décrit les ouverts compacts de $\mathbf{P}^1$), équivariant sous l'action de G, où G agit sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ par la formule $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$ habituelle. (Si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, l'élément $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)$ du centre de G agit par multiplication par $\omega_\Delta(a)$, où ω_Δ est le caractère $\chi^{-1}\det\Delta$, mais la définition de l'action de G repose [**14**, § II.1] sur des formules nettement plus compliquées que celle de P^+). On a comme ci-dessus $\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p = \Delta$, et le faisceau ainsi obtenu sur $\mathbf{Z}_p$, muni de la restriction de l'action de G à P^+, n'est autre que le faisceau P^+-équivariant sur $\mathbf{Z}_p$ défini ci-dessus. Par ailleurs, si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1$, on dispose d'une application de prolongement par 0 qui permet de voir $\Delta\boxtimes U$ comme un sous-module de l'espace $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ des sections globales.

Comme $\mathbf{P}^1$ est obtenu en recollant $\mathbf{Z}_p$ et $w\cdot\mathbf{Z}_p$ le long de $\mathbf{Z}_p^*$, et comme G est engendré par P^+ et w, le faisceau $U\mapsto\Delta\boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ est complètement décrit par sa restriction à $\mathbf{Z}_p$ (avec l'action de P^+) et par l'action de w sur $\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. Si on note w_Δ cette action, l'application $z\mapsto(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}w\cdot z)$ permet de décrire $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ comme l'ensemble des $(z_1,z_2)\in\Delta\times\Delta$ vérifiant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}z_2 = w_\Delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}z_1)$. L'action de G sur $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ est alors décrite par les formules du *squelette d'action* (avec $z=(z_1,z_2)$) :

- $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (z_2,z_1)$.
- Si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (\omega_\Delta(a)z_1, \omega_\Delta(a)z_2)$.
- Si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z_1, \omega_\Delta(a)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z_2)$.
- Si $z' = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z$, alors $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}z' = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_1$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}wz' = \omega_\Delta(p)\psi(z_2)$.
- Si $b\in p\mathbf{Z}_p$, et si $z' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z$, alors[(5)]

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_1 \quad\text{et}\quad \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}wz' = u_b(\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2)),$$

où $u_b = \omega_\Delta(1+b)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ w_\Delta\circ\left(\begin{smallmatrix} (1+b)^{-2} & b(1+b)^{-1} \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ w_\Delta\circ\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/(1+b) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur $\Delta\boxtimes p\mathbf{Z}_p$.

Le G-module $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ vit alors dans une suite exacte de G-modules :

$$0\to\mathbf{\Pi}(\Delta)^*\otimes\omega_\Delta\to\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1\to\mathbf{\Pi}(\Delta)\to 0,$$

(5) La formule pour u_b de [**14**] comporte plusieurs fautes de frappe comme me l'a fait remarquer G. Dospinescu.

où $\mathbf{\Pi}(\Delta)$ est une représentation localement analytique de G (topologiquement, c'est une limite inductive compacte de L-banach et son dual $\mathbf{\Pi}(\Delta)^*$ est donc un L-fréchet). Si V est la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui est associée à Δ par l'équivalence de catégories de Fontaine, et si $\mathbf{\Pi}(V)$ est la représentation unitaire associée à V par la correspondance de Langlands locale p-adique, alors $\mathbf{\Pi}(\Delta)$ est la sous-représentation $\mathbf{\Pi}(V)^{\rm an}$ des vecteurs localement analytiques de $\mathbf{\Pi}(V)$.

4.1.2. Dualité. — Soit $\check{\Delta} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}(\Delta, \mathscr{R}\frac{dT}{1+T})$ le dual de Tate de Δ. On définit un accouplement G-équivariant $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ sur $(\check{\Delta}\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)$, en posant

$$\{x,y\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}x, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}y\} + \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)x, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)y\},$$

où $\{\ ,\ \} : \check{\Delta}\times\Delta\to L$ est l'accouplement $(x,y)\mapsto \mathrm{rés}_0(\langle\sigma_{-1}x,y\rangle)$, et $\langle\ ,\ \rangle$ est l'accouplement tautologique sur $\check{\Delta}\times\Delta$. Cet accouplement identifie $\check{\Delta}\boxtimes\mathbf{P}^1$ au dual topologique de $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$. Plus généralement, si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1$, alors $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ identifie $\check{\Delta}\boxtimes U$ au dual topologique de $\Delta\boxtimes U$, et $\check{\Delta}\boxtimes U$ et $\Delta\boxtimes V$ sont orthogonaux si $U\cap V=\emptyset$.

On choisit un isomorphisme de $\wedge^2\Delta$ sur $\mathscr{R}(\det\Delta)$, ce qui nous fournit un isomorphisme de (φ,Γ)-modules de $\Delta\otimes\omega_\Delta^{-1}$ sur $\check{\Delta}$. Cela permet, si $z\in\Delta$, de voir $z\otimes\omega_\Delta^{-1}$ comme un élément de $\check{\Delta}$. Si v_1,v_2 est une base de Δ sur $\mathscr{R}$, telle que $v_1\wedge v_2 = 1\otimes\det\Delta$, alors $v_1\otimes\omega_\Delta^{-1}, v_2\otimes\omega_\Delta^{-1}$ est une base de $\check{\Delta}$ sur $\mathscr{R}$, et on a

$$\{\sigma_{-1}\big(x_1(v_1\otimes\omega_\Delta^{-1})+x_2(v_2\otimes\omega_\Delta^{-1})\big), y_1v_1+y_2v_2\} = \mathrm{rés}_0\big((x_1y_2-x_2y_1)\,\tfrac{dT}{1+T}\big),$$

pour tous $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathscr{R}$. L'isomorphisme P^+-équivariant $\Delta\otimes\omega_\Delta^{-1}\cong\check{\Delta}$ s'étend en un isomorphisme G-équivariant $(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)\otimes\omega_\Delta^{-1}\cong\check{\Delta}\boxtimes\mathbf{P}^1$. On a donc une suite exacte

$$0\to\mathbf{\Pi}(\Delta)^*\to\check{\Delta}\boxtimes\mathbf{P}^1\to\mathbf{\Pi}(\Delta)\otimes\omega_\Delta^{-1}\to 0,$$

et alors $\mathbf{\Pi}(\Delta)^*\subset\check{\Delta}\boxtimes\mathbf{P}^1$ et $\mathbf{\Pi}(\Delta)^*\otimes\omega_\Delta\subset\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ sont les orthogonaux l'un de l'autre ([**14**, rem. V.2.21]).

Lemme 4.1. — *Si $v\in\Delta=\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p\subset\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ est propre pour l'action de φ et Γ pour le caractère δ, alors $w\cdot(v\otimes\omega_\Delta^{-1})\in\check{\Delta}\boxtimes\mathbf{P}^1$ est propre pour l'action de $T=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^*&0\\0&\mathbf{Q}_p^*\end{smallmatrix}\right)$ pour le caractère $\delta^{-1}\otimes\delta\omega_\Delta^{-1}$.*

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot(w\cdot(v\otimes\omega_\Delta^{-1})) &= \omega_\Delta^{-1}(a)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d/a\end{smallmatrix}\right)w\cdot(v\otimes\omega_\Delta^{-1}) = \omega_\Delta^{-1}(a)w\cdot\left(\begin{smallmatrix}d/a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(v\otimes\omega_\Delta^{-1})\\ &= \omega_\Delta^{-1}(a)w\cdot(\delta\omega_\Delta^{-1}(d/a)\,v\otimes\omega_\Delta^{-1}) = \delta^{-1}(a)\,\delta\omega_\Delta^{-1}(d)(w\cdot(v\otimes\omega_\Delta^{-1})),\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4.2. Le foncteur de Jacquet dual. — Notre but est de déterminer le module de Jacquet dual de $\mathbf{\Pi}(\Delta)$. Pour cela nous allons avoir besoin d'introduire certaines notations.

Si $s \in \mathscr{S}_{\rm irr}$, on définit les éléments suivants de $(\Delta(s)\otimes\omega_s^{-1})\boxtimes\mathbf{P}^1 = (\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1)^*$ (cf. n° 3.3.2 pour la définition de e_1 et e_2') :

- $f_1 = w\cdot(e_1\otimes\omega_s^{-1})$ (pour tout $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$),
- $f_2 = w\cdot(e_2'\otimes\omega_s^{-1})$ (si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$),
- $f_1' = w\cdot(t^{-w(s)}e_1\otimes\omega_s^{-1})$ (si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm HT}\cap\mathscr{S}_*^{\rm ng}$).

Remarque 4.2. — Il résulte du lemme 4.1 et du lemme 4.5 ci-dessous, que :

- f_1 est propre sous l'action de B pour le caractère $\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi$,
- f_1' est propre sous l'action de B pour le caractère $x^{w(s)}\delta_1^{-1}\otimes x^{-w(s)}\delta_2^{-1}\chi$ (si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm HT}\cap\mathscr{S}_*^{\rm ng}$),
- f_2 est propre sous l'action de B pour le caractère $x^{-w(s)}\delta_2^{-1}\otimes x^{w(s)}\delta_1^{-1}\chi$ (si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ n'est pas exceptionnel).

Lemme 4.3. — *Les éléments f_1, f_1' et f_2 appartiennent au sous-module $\Pi(s)^*$ de $\check\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$.*

Démonstration. — Il est équivalent de prouver que e appartient à $\Pi(s)^*\otimes\omega_\Delta$, si $e\in\{e_1,e_1',e_2'\}$ (avec $e_1' = t^{-w(s)}e_1$), ou encore que e est orthogonal au sous-module $\Pi(s)^*$ de $\check\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$. Or $\Pi(s)^*$ contient un sous-$\mathscr{O}_L$-module compact W, stable par G, engendrant un sous-L-espace dense, à savoir le $\mathscr{O}_L$-dual de la boule unité de $\mathbf{\Pi}(D)$, si $D=\widehat\Delta^{[0]}$ de telle sorte que $\Pi(s)=\mathbf{\Pi}(D)^{\rm an}$; il suffit donc de prouver que e est orthogonal à W. Comme W est stable par $\left(\begin{smallmatrix}p^{-n}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et comme $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ est G-équivariant, cela implique que $\left\{\left(\begin{smallmatrix}p^{n}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e, W\right\}_{\mathbf{P}^1} = \{e,W\}_{\mathbf{P}^1}$ pour tout n. Or $\left(\begin{smallmatrix}p^{n}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e=\alpha_e e$, avec $v_p(e)>0$ (on a $\alpha_e=\delta_1(p)$ si $e=e_1$, $\alpha_e=p^{-w(s)}\delta_1(p)$ et $w(s)<0$ si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm HT}\cap\mathscr{S}_*^{\rm ng}$, et $\alpha_e=p^{w(s)}\delta_2(p)$ si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$). On a donc $\{e,W\}_{\mathbf{P}^1}=\alpha_e^n\{e,W\}_{\mathbf{P}^1}$, pour tout n, et comme W est compact, $\{e,W\}_{\mathbf{P}^1}$ est borné et $\cap_{n\in\mathbf{N}}\alpha_e^n\{e,W\}_{\mathbf{P}^1}=0$, ce qui permet de conclure.

Théorème 4.4. — (i) *Si Δ n'est pas triangulable, alors $J^*(\mathbf{\Pi}(\Delta))=0$.*

(ii) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}-(\mathscr{S}_*^{\rm ng}\cap\mathscr{S}_*^{\rm HT})$ ou si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$, alors $J^*(\Pi(s)^{\rm an})=L\,f_1$.*

(iii) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}\cap\mathscr{S}_*^{\rm HT}$, alors $J^*(\Pi(s)^{\rm an})=L\,f_1\oplus L\,f_1'$.*

(iv) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$, alors $J^*(\Pi(s)^{\rm an})=L\,f_1\oplus L\,f_2$.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.3, f_1, f_1' et f_2 appartiennent à $\Pi(s)^*$. Le théorème est donc une conséquence du résultat suivant (en tordant par ω_Δ^{-1}).

Lemme 4.5. — (i) *Si Δ n'est pas triangulable, alors $(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)^N=0$.*

(ii) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}-(\mathscr{S}_*^{\rm ng}\cap\mathscr{S}_*^{\rm HT})$ ou si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$, alors $(\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1)^N=L\,w\cdot e_1$.*

(iii) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}\cap\mathscr{S}_*^{\rm HT}$, alors $(\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1)^N=L\,w\cdot e_1\oplus L\,w\cdot e_1'$.*

(iv) *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$, alors $(\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1)^N=L\,w\cdot e_1\oplus L\,w\cdot e_2$.*

Démonstration. — On a $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z\big) = (1+T)^{p^n}\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}z$. On ne déduit que si $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z = z$, alors $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}z = 0$ pour tout n, et donc que $w \cdot z \in \Delta \boxtimes p^{n+1}\mathbf{Z}_p = \varphi^{n+1}(\Delta)$, pour tout n. Il en résulte que z est dans l'image de $\Delta \boxtimes \{0\}$ par $x \mapsto w \cdot x$. On en déduit le (i) en utilisant le (i) du th. 3.23.

Supposons maintenant que $\Delta = \Delta(s)$. On a a priori une inclusion $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)^N \subset (\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)^{\mathfrak{n}}$, où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de N, avec égalité si $(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)^{\mathfrak{n}}$ est de dimension finie (en effet, il existe alors un sous-groupe ouvert de N qui agit trivialement sur $(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)^{\mathfrak{n}}$ et donc N agit trivialement car $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ induit un isomorphisme de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)^{\mathfrak{n}}$). Il s'agit donc d'étudier l'action infinitésimale de G sur le module $w\cdot(\Delta\boxtimes\{0\})$ ou, ce qui revient au même en conjuguant par w, sur $\Delta \boxtimes \{0\}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est engendrée par $u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ et $a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et on a $u^+u^- - u^-u^+ = a^+ - a^-$.

On cherche à déterminer le noyau de u^- agissant(6) sur $\Delta \boxtimes \{0\}$. Commençons par remarquer que, si $v \in \Delta \boxtimes \{0\}$ est un vecteur propre pour Γ pour le caractère δ_v (i.e. $\sigma_a(v) = \delta_v(a)v$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$), alors v est vecteur propre de a^+ pour la valeur propre $w(\delta_v)$. Par ailleurs,

$$\left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)u^- = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1\end{smallmatrix}\right)-1\big) = b^{-1}\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^{-1}x}\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b^{-1}x & 1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = b^{-1}u^-\left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right).$$

Il en résulte que $u^-(v)$ est propre sous l'action de Γ pour le caractère $x^{-1}\delta_v$, si v l'est pour le caractère δ_v. En revenant à la description explicite de $M = (\Delta \boxtimes \{0\})_0$ et de $(\Delta \boxtimes \{0\})$, donnée dans le th. 3.23, on en déduit que u^- tue M.

Par ailleurs, on a $u^+(v) = tv$, pour tout $v \in \Delta\boxtimes\{0\}$ et $a^+ + a^-$ est la multiplication par $w(\delta_\Delta) = 2w(\delta_1) - w(s) - 1$. Maintenant, $\sigma_a(v) = \delta_1(a)v$, pour tout a assez proche de 1 et tout $v \in M$, et donc $a^+(v) = w(\delta_1)v$. On déduit de la relation $u^+u^- - u^-u^+ = a^+ - a^-$ que

$$tu^-(t^jv) - u^-(t^{j+1}v) = (2w(\delta_1) + 2j - (2w(\delta_1) - w(s) - 1))t^jv = (2j + w(s) + 1)t^jv,$$

si $v \in M$ et $j \in \mathbf{N}$. Comme $u^-(v) = 0$, une récurrence immédiate permet d'en déduire que $u^-(t^jv) = -(j(w(s)+1) + j(j-1))t^{j-1}v$.

Maintenant, si $j \geq 1$, la nullité de $u^-(t^jv)$ équivaut à celle de $w(s) + 1 + j - 1 = w(s) + j$. Il s'ensuit que, dans le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, $u^-(t^jv) = 0$ n'est possible que si $j = 0$ (car $w(s) \in \mathbf{N} - \{0\}$) et donc le noyau de u^- sur $\Delta \boxtimes \{0\}$ est réduit à $(\Delta \boxtimes \{0\})_0$.

Dans les cas restant, cela n'est possible que si $w(s)$ est un entier < 0, et si $j = -w(s)$. On en déduit le résultat.

4.3. Dévissage de $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$

Nous allons prouver que $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$ se dévisse comme $\Delta(s)$. Plus précisément, on a le résultat suivant qui permet, en utilisant la prop. 2.6, de déterminer les composantes de Jordan-Hölder de $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$.

(6) On pourrait utiliser la formule explicite [15] pour l'action de u^- pour simplifier ce qui suit.

Théorème 4.6. — (i) *$\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1,z_2) \in \Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1,\ z_1,z_2\in\mathscr{R}e_1\}$ est stable par G, et le G-module $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$ vit dans une suite exacte de G-modules*[7]

$$0\to\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1\to\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1\to\mathscr{R}e_2\boxtimes\mathbf{P}^1\to 0.$$

(ii) *Si $i=1,2$, on a une suite exacte de G-modules :*

$$0\to B^{\rm an}(\delta_{3-i},\delta_i)^*\otimes\omega_s\to\mathscr{R}e_i\boxtimes\mathbf{P}^1\to B^{\rm an}(\delta_i,\delta_{3-i})\to 0.$$

Démonstration. — La démonstration va demander un peu de préparation ; le résultat est une traduction de la prop. 4.9 ci-dessous.

Soit $f_1 = w\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(e_1\otimes\omega_s^{-1}) = \omega_s^{-1}\delta_1(-1)w\cdot(e_1\otimes\omega_s^{-1})\in(\Delta(s)\otimes\omega_s^{-1})\boxtimes\mathbf{P}^1$. D'après la rem. 4.2, f_1 est propre sous l'action de B, pour le caractère $\delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\chi$. On en déduit, grâce aux rem. 2.3 et 2.2, que Φ_1, envoyant z sur $\phi_{1,z}:\mathbf{Q}_p\to L$ définie par $\phi_{1,z}(x)=\left\{f_1,\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right\}_{\mathbf{P}^1}$, est G-équivariante de $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$ dans $B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)$.

Lemme 4.7. — *L'application $\Phi_1 : \Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1\to B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)$ est surjective et son noyau est l'ensemble des z vérifiant $p_s(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z)\in\mathscr{R}^+e_2$ et $p_s(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)z)\in\mathscr{R}^+e_2$.*

Démonstration. — On a $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right)=w\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-x\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et donc

$$\phi_{1,z}(x)=\left\{w\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(e_1\otimes\omega_s^{-1}),w\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right\}_{\mathbf{P}^1}=\left\{e_1\otimes\omega_s^{-1},\left(\begin{smallmatrix}1&-x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right\}_{\mathbf{P}^1}.$$

Maintenant, $e_1\otimes\omega_s^{-1}$ étant à support $\{0\}$, on a $\phi_{1,\mathrm{Res}_U z}=\mathrm{Res}_U\phi_{1,z}$, et comme $\mathbf{P}^1$ est la réunion disjointe de $\mathbf{Z}_p$ et $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{Z}_p$, on est ramené à prouver que Φ_1 induit une surjection de $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{Z}_p=\Delta(s)$ sur $B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)\boxtimes\mathbf{Z}_p=\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, dont le noyau est $p_s^{-1}(\mathscr{R}^+e_2)$ (la partie concernant $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{Z}_p$ s'en déduit alors par G-équivariance). L'application $(z_1,z_2)\mapsto z_1e_1+z_2\hat{e}_2$ est un isomorphisme de $\mathscr{R}$-modules de $\mathscr{R}\times\mathscr{R}$ sur $\Delta(s)$, et si $z=z_1e_1+z_2\hat{e}_2$, on a $\phi_{1,z}(x)=\phi_{z_2}(x)$. On peut donc déduire la surjectivité de $\Delta(s)\mapsto\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ du (iii) de la prop. 1.2 ainsi que le fait que z est dans le noyau de Φ_1 si et seulement si $z_2\in\mathscr{R}^+e_2$.

Lemme 4.8. — (i) *$\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est stable par $w_{\Delta(s)}$.*

(ii) *Le sous-module $\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1=\{(z_1,z_2)\in\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1,\ z_1,z_2\in\mathscr{R}e_1\}$ de $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$ est stable par G.*

Démonstration. — $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est stable par w et contenu dans $\mathrm{Ker}\,\Phi_1$. On déduit donc du lemme 4.7 que l'image par p_s de $w(\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)$ est incluse dans $\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. Or $\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est un sous-$\mathscr{R}(\Gamma)$-module de $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, et $w_{\Delta(s)}$ étant $\mathscr{R}(\Gamma)$-semi-linéaire (car $w_{\Delta(s)}\circ\sigma_a=\omega_s(a)\sigma_{a^{-1}}\circ w_{\Delta(s)}$, traduction de $w\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)w$), $w_{\Delta(s)}(\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)$ est aussi un $\mathscr{R}(\Gamma)$-module. Il en est donc de même de son image par p_s et comme celle-ci est incluse dans le $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module $\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, qui est de rang fini (et même de rang 1), elle est nulle, ce qui démontre le (i).

[7] Le (i) du lemme 4.8 permet de munir $\mathscr{R}e_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ de l'action quotient de $w_{\Delta(s)}$ et donc de définir $\mathscr{R}e_2\boxtimes\mathbf{P}^1$; les formules du squelette d'action munissent alors ce module d'une action de G.

Enfin, comme $\mathscr{R}e_1$ est stable par P^+ et ψ et $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par $w_{\Delta(s)}$, il résulte des formules du squelette d'action que $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G (cf. [**14**, prop. V.2.8] pour des résultats du même genre).

Ceci permet de conclure.

le (i) du lemme permet de munir $\mathscr{R}e_2 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ d'une action de $w_{\Delta(s)}$, et donc de définir un module $\mathscr{R}e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Les formules du squelette d'action passent alors au quotient modulo $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$, et donc munissent $\mathscr{R}e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'une action de G, rendant G-équivariante l'application naturelle $p_s : \Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathscr{R}e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Ceci prouve le (i) du th. 4.7.

Si $i = 1, 2$, on note $\mathscr{R}^+ e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ l'ensemble des $z \in \mathscr{R}e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ vérifiant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in \mathscr{R}^+ e_i$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) z \in \mathscr{R}^+ e_i$.

Proposition 4.9. — *Si $i = 1, 2$, le sous-module $\mathscr{R}^+ e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ de $\mathscr{R}e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G et on a des isomorphismes de G-modules :*

$$\mathscr{R}^+ e_i \boxtimes \mathbf{P}^1 \cong B^{\mathrm{an}}(\delta_{3-i}, \delta_i)^* \otimes \omega_s \ \text{ et } \ (\mathscr{R}e_i \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}^+ e_i \boxtimes \mathbf{P}^1) \cong B^{\mathrm{an}}(\delta_i, \delta_{3-i}).$$

Démonstration. — $\mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$ est l'image de $\mathrm{Ker}\, \Phi_1$ par p_s ; on en déduit sa stabilité par G. De plus, $(\mathscr{R}e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est isomorphe à l'image de Φ_1, c'est-à-dire $B^{\mathrm{an}}(\delta_2, \delta_1)$.

Maintenant, $w \cdot e_2$ est stable par N. En effet, on a $\mathrm{Res}_U w \cdot e_2 = 0$ pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, et donc $\mathrm{Res}_U \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot e_2 = 0$, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$. On en déduit que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot e_2$ est de la forme $\sum_{k \in \mathbf{N}} \alpha_k(b) w \cdot t^k e_2$, avec $\alpha_k(b) \in L$ et $\sum_{k \in \mathbf{N}} \alpha_k(b) X^k$ convergeant sur $\mathbf{C}_p$ tout entier. Par ailleurs, $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot t^k e_2 = \omega_s(a) w \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot t^k e_2 = \omega_s(a) \delta_2(a)^{-1} a^{-k} w \cdot t^k e_2$. En caculant de deux manières $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot e_2$, on obtient $\alpha_k(ab) = a^{-k} \alpha_k(b)$, et donc $\alpha_k(b) = c_k b^{-k}$. Or $b \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot e_2$ est analytique dans un voisinage de 0, et donc $c_k = 0$ pour tout $k \neq 0$ et $c_0 = 1$.

On déduit de ce qui précède que $w \cdot \hat{e}_2$, qui est un relèvement de $w \cdot e_2$, est fixe par N modulo $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Ceci permet, comme pour le lemme 4.7, de définir une application G-équivariante $\Phi_2 : \mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1 \to B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$, en envoyant z sur la fonction $\phi_{2,z}$ définie par $\tilde{\phi}_{2,z}(x) = \left\{ w \cdot (\hat{e}_2 \otimes \omega_s^{-1}), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right) \cdot z \right\}_{\mathbf{P}^1}$. Le noyau de Φ_2 est $\mathscr{R}^+ e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ pour les mêmes raisons que précédemment ; on en déduit sa stabilité par G ainsi que l'isomorphisme $(\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}^+ e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1) \cong B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$.

Enfin, dans la dualité entre $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{\Delta}(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$ les espaces $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\mathscr{R}e_1' \boxtimes \mathbf{P}^1$ sont les orthogonaux l'un de l'autre (on a $\{z', z\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z', \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z\} + \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) z', \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) z\}$, et si $\hat{e}_2' = \hat{e}_2 \otimes \omega_s^{-1}$, on a $\{x_1' e_1' + x_2' \hat{e}_2', x_1 e_1 + x_2 e_2\} = \mathrm{r\acute{e}s}_0\big(x_1' x_2 - x_2' x_1 \frac{dT}{1+T}\big)$ si $x_1, x_2, x_1', x_2' \in \mathscr{R}$). Cette dualité induit donc des dualités G-équivariantes entre $\mathscr{R}e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\mathscr{R}e_{3-i}' \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans laquelle $\mathscr{R}^+ e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\mathscr{R}^+ e_{3-i}' \boxtimes \mathbf{P}^1$ sont les orthogonaux l'un de l'autre (car $\mathscr{R}^+$ est l'orthogonal de $\mathscr{R}^+$ dans $\mathscr{R}$). On en déduit que $\mathscr{R}^+ e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ est le dual de $(\mathscr{R}e_{3-i}' \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}^+ e_{3-i}' \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est donc est isomorphe à $B^{\mathrm{an}}(\chi \delta_i^{-1}, \chi \delta_{3-i}^{-1})^* \cong B^{\mathrm{an}}(\delta_{3-i}, \delta_i)^* \otimes \omega_s$

Cela permet de conclure.

Remarque 4.10. — (i) Si δ, ω sont deux caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$, on peut construire des représentations $\mathscr{E}(\delta) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ et $\mathscr{R}(\delta) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ en reprenant la stratégie menant à la construction de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans le cas où D est de rang 2 sur $\mathscr{E}$. La représentation $\mathscr{R}e_i \boxtimes \mathbf{P}^1$ de la prop. 4.9 est alors isomorphe à $\mathscr{R}(\delta_i) \boxtimes_{\omega_s} \mathbf{P}^1$.

(ii) Si D est irréductible de rang ≥ 3, on peut encore définir le G-module $D \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ (cf. [**14**, § II.1]), mais la stratégie menant à la construction de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est en défaut. Les résultats de Paskunas [**29**] laissent à penser qu'il n'est pas possible de munir $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'une action de G.

4.4. Dévissage de $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$

On note simplement $\Pi(s)$ la représentation $\mathbf{\Pi}(\Delta(s))$. On a donc une suite exacte $0 \to \Pi(s)^* \otimes \omega_s \to \Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(s) \to 0$ de G-modules.

Proposition 4.11. — *Soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$.*

(i) *Si s est générique, on a des suites exactes*

$$0 \to \mathscr{R}^+ e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(s)^* \otimes \omega_s \to \mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1 \to 0\,,$$
$$0 \to B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2) \to \Pi(s) \to B^{\mathrm{an}}(\delta_2, \delta_1) \to 0\,.$$

(ii) *Si s est spécial, $\mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$ contient un sous-espace fermé $(\mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1)_0$, stable par G, de codimension $w(s)$ et $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ contient un sous-espace fermé $(\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1)^0$, stable par G, dans lequel $\mathscr{R}^+ e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ est de codimension $w(s)$, et on a des suites exactes*

$$0 \to (\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1)^0 \to \Pi(s)^* \otimes \omega_s \to (\mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1)_0 \to 0\,,$$
$$0 \to E_{\mathscr{L}} \to \Pi(s) \to B^{\mathrm{an}}(\delta_2, \delta_1) \to 0\,,$$

où $E_{\mathscr{L}}$ est l'extension de $W(\delta_1, \delta_2)$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ correspondant à celle de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ via l'isomorphisme du (iii) de la rem. 2.11.

Démonstration. — La démonstration consiste à analyser comment se répartissent les composantes de Jordan-Hölder entre $\Pi(s)^* \otimes \omega_s$ et $\Pi(s)$.

Dans le cas (i) :

• Si $\delta_s \neq |x|^2 x^{w(s)-1}$, ces composantes sont de dimension infinie et sont de deux types bien distincts : des limites inductives compactes de banach qui font partie des composantes de $\Pi(s)$ et des fréchets (non banach) qui interviennent dans $\Pi(s)^* \otimes \omega_s$. Cela permet de démontrer la première suite exacte en regardant les fréchets ; la seconde s'en déduit.

• Si $\delta_s = |x|^2 x^{w(s)-1}$, alors $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ a une composante de Jordan-Hölder qui est de dimension finie, mais celle-ci n'est pas un sous-objet, ce qui fait que le plus grand sous-objet de $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ qui est de type fréchet est quand-même $\mathscr{R}^+ e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$. De même, $\mathscr{R}^+ e_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$ a une composante de dimension finie, mais celle-ci n'apparaît pas en quotient, et donc $\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1$ est le plus petit sous-objet de $\mathscr{R}e_2\boxtimes\mathbf{P}^1$ contenant les composantes de type fréchet de dimension infinie. On en déduit le résultat dans ce cas aussi.

Dans le cas (ii), la situation est un peu plus délicate à cause des deux composantes de dimension finie qui peuvent faire partie des composantes de l'un ou de l'autre. Or $\Pi(s)$ ne contient pas de sous-représentation de dimension finie (cela résulte, par exemple, des cor. I.3.2 et II.2.9 de **[14]** dont on déduit que $\Pi(s)$ ne contient pas de sous-L-espace de dimension finie stable par B). Il en résulte que le sous-quotient $W(\delta_1,\delta_2)$ de $\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1$ apparaît dans $\Pi(s)^*\otimes\omega_s$, et comme il n'intervient pas dans $\mathscr{R}^+e_1\boxtimes\mathbf{P}^1$, cela prouve que $(\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1)\cap\Pi(s)^*\otimes\omega_s$ est l'extension $(\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1)^0$ de $W(\delta_1,\delta_2)$ par $\mathscr{R}^+e_1\boxtimes\mathbf{P}^1$ apparaissant dans $\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1$. La suite exacte $0\to\Pi(s)^*\otimes\omega_s\to\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1\to\Pi(s)\to 0$ prouve alors que la composante $W(\delta_1,\delta_2)$ de $\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1$ n'apparaît pas dans $\Pi(s)^*\otimes\omega_s$ (sinon, $\Pi(s)$ n'aurait pas de composante de Jordan-Hólder de dimension finie contrairement à $\Pi(s)^*$). Il s'ensuit que l'image de $\Pi(s)^*\otimes\omega_s$ dans $\mathscr{R}e_2\boxtimes\mathbf{P}^1$ est strictement incluse dans $\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1$ et que le quotient est isomorphe à $W(\delta_1,\delta_2)$; cette image est donc le sous-module $(\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1)_0$ [qui est l'orthogonal du sous-module $W(\chi\delta_2^{-1},\chi\delta_1^{-1})$ de $B^{\mathrm{an}}(\chi\delta_2^{-1},\chi\delta_1^{-1})$]. On en déduit la première suite exacte. Le lemme du serpent nous fournit alors une suite exacte $0\to B^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)/W(\delta_1,\delta_2)\to\Pi(s)\to E\to 0$, où $E=(\mathscr{R}e_2\boxtimes\mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1)_0$ est une extension de $B^{\mathrm{an}}(\delta_2,\delta_1)$ par $W(\delta_1,\delta_2)$. Il en résulte que $\Pi(s)$ contient une extension E' de $W(\delta_1,\delta_2)$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)$ et que l'on a une suite exacte $0\to E'\to\Pi(s)\to B^{\mathrm{an}}(\delta_2,\delta_1)\to 0$. Il reste à déterminer la classe de l'extension E', et pour cela, nous allons utiliser les isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1_G(W(\delta_1,\delta_2),\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2))\cong H^1(A^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes x^k)\cong\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$$

de la rem. 2.11 dont nous reprenons les notations. Commençons par remarquer que notre $W(\delta_1,\delta_2)$ est $(\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}^+e_2\boxtimes\mathbf{P}^1)_0$; les t^ie_2, pour $0\leq i\leq k$ en forment donc une base sur L. Par ailleurs, $W(\delta_1,\delta_2)\cong W_k\otimes\delta_1\chi^{-1}=W_k\otimes x^k\delta_2$, et comme $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ agit par multiplication par $\delta_2(a)$ sur e_2, on voit que e_2 correspond à l'élément $x^{-k}\otimes x^k$ de $W_k\otimes x^k$. L'image de l'extension de $W(\delta_1,\delta_2)$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)$ dans $H^1(A^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes x^k)$ est donc, d'après la rem. 2.11, obtenue de la manière suivante : on relève e_2 en $\tilde e_2$ dans $\Pi(s)$, et on se débrouille pour que le cocycle $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mapsto c_a=\big(\delta_2(a)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot\tilde e_2$ sur A^+ soit à valeurs dans les fonctions à support dans $\mathbf{Z}_p$; l'image de ce cocycle dans $H^1(A^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes x^k)$ est alors la classe qui nous intéresse. Une manière d'assurer que c_a est à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$ est de choisir un relèvement $\hat e_2$ de e_2 dans $\Delta(s)=\Delta(s)\boxtimes\mathbf{Z}_p\subset\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$, et de prendre pour $\tilde e_2$ l'image de $\hat e_2$ dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes x^k$. Or cette description du cocycle $a\mapsto c_a$ montre que son image dans $H^1(A^+,\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)\otimes x^k)$ est celle de l'extension $\Delta(s)$ de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$.

Ceci permet de conclure.

4.5. Vecteurs localement algébriques. — On note $\Pi(s)^{\mathrm{alg}}$ l'ensemble des vecteurs localement algébriques de $\Pi(s)$ pour l'action de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (si δ_1 est localement algébrique, c'est l'ensemble des vecteurs localement algébriques de $\Pi(s)$).

Théorème 4.12. — *Soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$.*

(i) *$\Pi(s)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ si et seulement si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{dR}}$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, alors $\Pi(s)^{\mathrm{alg}} = \mathrm{St} \otimes \mathrm{Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$.*

(iii) *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, alors*

$$\Pi(s)^{\mathrm{alg}} = \big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(|x|\delta_s x^{1-w(s)} \otimes |x|^{-1})\big) \otimes \mathrm{Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$$

et est irréductible, sauf si $\delta_s = x^{w(s)-1}$ ou si $\delta_s = |x|^{-2}x^{w(s)-1}$ auquel cas $\Pi(s)^{\mathrm{alg}}$ est une extension de $\mathrm{Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$ par $\mathrm{St} \otimes \mathrm{Sym}^{w(s)-1} \otimes \delta_2$.

Démonstration. — Il y a plusieurs cas :

- Si s n'est pas spécial (i.e. si $\delta_s \neq x^{w(s)-1}$, avec $w(s)$ entier ≥ 1), l'énoncé est équivalent à $\Pi(s)^{\mathrm{alg}} = B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2)$, ce qui est immédiat si $w(s)$ n'est pas un entier < 0 au vu des composantes de Jordan-Hölder de $B(\delta_1, \delta_2)$ et $B(\delta_2, \delta_1)$ (prop. 2.6) et de la suite exacte $0 \to B(\delta_1, \delta_2) \to \Pi(s) \to B(\delta_2, \delta_1) \to 0$.
- Si $w(s)$ est un entier < 0, on cherche à prouver que $\Pi(s)^{\mathrm{alg}} = 0$, et donc que $B^{\mathrm{alg}}(\delta_2, \delta_1)$ n'est pas un sous-objet de $\Pi(s)$. Dans le cas contraire, $B^{\mathrm{alg}}(\delta_2, \delta_1)$ serait une sous-représentation de la représentation unitaire $\mathbf{\Pi}(V(s))$, et son complété universel serait non nul, ce qui contredit un résultat d'Emerton [**17**]. (On a $\sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} = \delta_2(p)^n \sum_{i=0}^{p^n-1} \mathbf{1}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} = \delta_2(p)^n \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$; il en résulte, puisque $v_p(\delta_2) < 0$, que l'image de $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$ dans le complété universel de $B^{\mathrm{alg}}(\delta_2, \delta_1)$ est nulle, et donc que ce complété universel est nul puisque $B^{\mathrm{alg}}(\delta_2, \delta_1)$ est irréductible.)
- Si $\delta_s = x^k$, avec $k \in \mathbf{N}$ (ce qui couvre le cas $s \in \mathscr{S}^{\mathrm{st}}$ et le cas $s \in \mathscr{S}^{\mathrm{cris}}$ spécial), alors $\Pi(s)$ est une extension de $B(\delta_2, \delta_1)$ par $E_\ell \otimes \delta_1\chi^{-1}$, où E_ℓ est l'extension de W_k par X_k correspondant à $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ (cf. th. 2.7). On est donc ramené à démontrer le résultat suivant (on rappelle que $\mathrm{Sym}^k \otimes \delta_2 = W_k \otimes \delta_2 x^k = W_k \otimes \delta_1\chi^{-1}$).

Lemme 4.13. — *$E_\ell^{\mathrm{alg}} = \mathrm{St} \otimes W_k$ sauf si $\ell = v_p$ où E_ℓ^{alg} est une extension non triviale de W_k par $\mathrm{St} \otimes W_k$ et donc est isomorphe à $\big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(|x| \otimes |x|^{-1})\big) \otimes W_k$.*

Démonstration. — On reprend les notations du th. 2.7.

Si $\ell = v_p$, le sous-espace de Y_k engendré par $W_k\ell^+$ et les fonctions localement polynomiales sur $\mathbf{P}^1$ de degré $\leq k$ (isomorphe à $\mathrm{St} \otimes W_k$) est stable par G, et l'extension de W_k par $\mathrm{St} \otimes W_k$ ainsi obtenue est non scindée car $\Pi(s)$ ne contient pas de sous-représentation de dimension finie. Ceci permet de conclure dans le cas $\ell = v_p$.

Si $\ell \neq v_p$, on peut, quitte à multiplier ℓ par une constante ce qui ne change pas E_ℓ, supposer que $\ell = \log + \alpha v_p$, avec $\alpha \in L$. Montrons qu'une sous représentation de G qui se surjecte sur W_k contient une fonction qui n'est pas localement polynomiale sur $\mathbf{P}^1$ de degré $\leq k$. Pour cela, il suffit de prouver que si $\phi \in X_k$, alors $\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\big) \cdot (\ell^+ + \phi)$ ne peut pas être nulle dans un voisinage de l'infini. Dans le cas contraire, il existerait $b \in \mathbf{Z}$

tel que $\phi(x+1)-\phi(x)=\log(x+1)-\log x$, si $v_p(x)\leq b$. Par densité de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}_p$, on en déduit que $\phi-\log$ est constante sur $i+\mathbf{Z}_p$, si $v_p(i)\leq b$, ce qui est en contradiction avec le fait que ϕ est analytique au voisinage de ∞ (i.e. $\phi(x)=\sum_{n\in\mathbf{N}}a_nx^{-n}$, si $v_p(x)\ll 0$).

Ceci permet de conclure.

4.6. Cas particuliers

Ce n$^{\text{o}}$ est consacré à l'étude des deux cas particuliers où le module de Jacquet est de dimension 2. Le résultat obtenu, dans le cas cristallin, répond aux conjectures 5.3.7 et 5.4.4 de [**2**].

4.6.1. Le cas cristallin. — Soit $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$. On note s' l'élément de $\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ défini par $s'=(\delta_1',\delta_2',\infty)$ et $\delta_1'=x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2'=x^{-w(s)}\delta_1$. Alors s est exceptionnel si et seulement si $s=s'$.

Il résulte de la démonstration du th. 4.12 que :

- si $\delta_s\neq x^{w(s)-1},|x|^2x^{w(s)-1}$, alors $\Pi(s)^{\rm alg}=B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ (qui est isomorphe à $B^{\rm alg}(\delta_1',\delta_2')$, d'après le (iii) de la rem. 2.5),
- si $\delta_s=|x|^2x^{w(s)-1}$, alors $\Pi(s)^{\rm alg}=B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ (extension de $W(\delta_1',\delta_2')$ par ${\rm St}^{\rm alg}(\delta_1',\delta_2')$),
- si $\delta_s=x^{w(s)-1}$, alors $\Pi(s)^{\rm alg}$ est une extension de $W(\delta_1,\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)$ isomorphe à $B^{\rm alg}(\delta_1',\delta_2')=\Pi(s')^{\rm alg}$.

On remarque que, dans tous les cas, $\Pi(s)^{\rm alg}\cong\Pi(s')^{\rm alg}$. Cela traduit l'existence d'un isomorphisme $\Pi(s)\cong\Pi(s')$.

Proposition 4.14. — *Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ n'est pas exceptionnel, on a des suites exactes*

$$0\to\Pi(s)^{\rm alg}\to B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)\oplus B^{\rm an}(\delta_1',\delta_2')\to\Pi(s)\to 0$$
$$0\to\Pi(s)^{\rm alg}\to\Pi(s)\to B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)\oplus B^{\rm an}(\delta_2',\delta_1')\to 0$$

Démonstration. — Comme $\Pi(s)\cong\Pi(s')$, il résulte de la prop. 4.11 que $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$ et $B^{\rm an}(\delta_1',\delta_2')$ s'identifient à des sous-objets de $\Pi(s)$. La première suite exacte s'en déduit en examinant les composantes de Jordan-Hölder des représentations considérées. La seconde en résulte en utilisant les isomorphismes $B^{\rm an}(s)/B^{\rm alg}(s)\cong B^{\rm an}(\delta_2',\delta_1')$ et $B^{\rm an}(s')/B^{\rm alg}(s')\cong B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)$.

Remarque 4.15. — (i) La flèche $\Pi(s)\to B^{\rm an}(\delta_2,\delta_1)\oplus B^{\rm an}(\delta_2',\delta_1')$ peut s'induire à partir de l'application $z\mapsto\big(\{f_1,\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right)\cdot z\}_{\mathbf{P}^1},\{f_2,\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right)\cdot z\}_{\mathbf{P}^1}\big)$, définie sur $\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$, et qui se factorise à travers $\Pi(s)$.

(ii) Dans le cas exceptionnel, on a $\delta_1'=\delta_1$ et $\delta_2'=\delta_2$. Les suites exactes ci-dessus deviennent

$$0\to B^{\rm alg}(\delta_1,\delta_2)\to{\rm Ind}^{\rm an}\big((\delta_2\otimes\chi^{-1}\delta_1)\otimes\left(\begin{smallmatrix}1&v_p(a/d)\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)\to\Pi(s)\to 0$$
$$0\to\Pi(s)^{\rm alg}\to\Pi(s)\to{\rm Ind}^{\rm an}\big((\delta_1\otimes\chi^{-1}\delta_2)\otimes\left(\begin{smallmatrix}1&v_p(a/d)\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)\to 0$$

4.6.2. Le cas Hodge-Tate non de Rham. — Si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm HT} \cap \mathscr{S}_*^{\rm ng}$, alors $J^*(\Pi(s))$ contient un autre vecteur propre que f_1 pour l'action de B, à savoir f_1', qui est propre pour le caractère $x^{-w(s)}\delta_1^{-1} \otimes x^{w(s)}\delta_2^{-1}\chi$. L'application $z \mapsto \phi'_{1,z}$ définie par $\phi'_{1,z}(x) = \{f_1', \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right) z\}_{\mathbf{P}^1}$ induit donc un morphisme G-équivariant de $\Delta(s) \boxtimes \mathbf{P}^1$ sur $B^{\rm an}(x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1)$ qui est surjectif pour les mêmes raisons que $z \mapsto \phi_{1,z}$. Or on a $f_1' = w \cdot (t^{-w(s)} e_1 \otimes \omega_s^{-1})$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\phi'_{1,z}(x) &= (-1)^{w(s)}\omega_s^{-1}\delta_1(-1)\big\{t^{-w(s)}e_1 \otimes \omega_s^{-1}, \left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big\}_{\mathbf{P}^1} \\ &= \omega_s^{-1}\delta_1(-1)\big\{e_1 \otimes \omega_s^{-1}, t^{-w(s)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big\}_{\mathbf{P}^1} \\ &= \omega_s^{-1}\delta_1(-1)\big\{e_1 \otimes \omega_s^{-1}, \big(\frac{d}{dx}\big)^{-w(s)}\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big)\big\}_{\mathbf{P}^1} = \big(\frac{d}{dx}\big)^{-w(s)}\phi_{1,z}(x).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $z \mapsto \phi'_{1,z}$ s'obtient en composant $z \mapsto \phi_{1,z}$ avec le morphisme $\big(\frac{d}{dx}\big)^{-w(s)} : B^{\rm an}(\delta_2, \delta_1) \to B^{\rm an}(x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1)$ de la proposition 2.6. Il est à noter que l'extension de $B^{\rm alg}(\delta_2, \delta_1)$ (noyau de ce morphisme) par $B^{\rm an}(\delta_1, \delta_2)$ qui apparaît n'est pas scindée (cf. démonstration du th. 4.12).

4.7. La transformée de Stieljes. — Terminons cet article par une curiosité dont je ne sais pas vraiment que penser.

Soit Δ une extension non triviale de $\mathscr{R}$ par $\mathscr{R}(\delta)$. Si $e \in \Delta$ est un relèvement de $1 \in \mathscr{R}$, alors ${\rm Res}_U e \in \mathscr{R}(\delta)$ pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Z}_p$ ne contenant pas 0. Les $\phi_{{\rm Res}_U e}$ définissent donc une fonction localement analytique (notée simplement ϕ_e) sur $\mathbf{Z}_p - \{0\}$ (plus exactement, un élément de ${\rm LA}(\mathbf{Z}_p - \{0\}) \otimes \delta\chi^{-1}$).

Proposition 4.16. — (i) *Si $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\} \cup \{\chi x^i,\ i \in \mathbf{N}\}$, il existe $\lambda \in L^*$ et $\phi \in {\rm LA}(\mathbf{Z}_p)$, uniquement déterminés, tels que $\phi_e = \lambda\delta\chi^{-1} + \phi$, et on peut choisir e de telle sorte que $\phi = 0$.*

(ii) *Si $\delta = \chi x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, il existe $\ell \in {\rm Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ non nul et $\phi \in {\rm LA}(\mathbf{Z}_p)$, uniquement déterminés, tels que $\phi_e = x^i\ell + \phi$, et on peut choisir e de telle sorte que $\phi = 0$.*

(iii) *Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $\phi_e \in {\rm LA}(\mathbf{Z}_p)$ et on peut choisir e de telle sorte que $\phi_e = 0$.*

Démonstration. — C'est une traduction du (i) de la rem. 1.39, utilisant la prop. 1.34.

4.7.1. Le cas générique. — Soit $s \in \mathscr{S}_{\rm irr}$ non spécial. On suppose l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ *normalisée* (ce qui signifie que $\lambda = 1$ dans le (i) de la prop. 4.16 ; le cas $\delta = x^{-i}$ avec $i \in \mathbf{N}$ est incompatible avec l'hypothèse $s \in \mathscr{S}_{\rm irr}$).

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1$, on note ${}^cU$ son complémentaire. On définit un morphisme

$$S_{s,U} : (B^{\rm an}(\delta_1, \delta_2)^* \otimes \omega_s) \boxtimes U \to B^{\rm an}(\delta_1, \delta_2) \boxtimes {}^cU$$

de la manière suivante : si $\mu \in B^{\rm an}(\delta_1, \delta_2)^* \boxtimes U$, on peut relever μ en un élément $\tilde{\mu}$ de $\Pi(s)^* \otimes \omega_s$ d'après le (i) de la prop. 4.11. Maintenant, $\Pi(s)^* \otimes \omega_s$ est un sous-espace de

$\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1$, et donc $\mathrm{Res}_{{}^cU}\tilde\mu$ est un élément de $\Delta(s)\boxtimes{}^cU$ dont l'image dans $\mathscr{R}e_2\boxtimes{}^cU$ est nulle puisque μ est à support dans U ; il s'ensuit que $\mathrm{Res}_{{}^cU}\tilde\mu\in\mathscr{R}e_1\boxtimes{}^cU$. On définit alors $S_{s,U}(\mu)$ comme l'image de $\mathrm{Res}_{{}^cU}\tilde\mu$ dans $B^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)\boxtimes{}^cU$ qui est le quotient de $\mathscr{R}e_1\boxtimes{}^cU$ par $\mathscr{R}^+e_1\boxtimes{}^cU$. (Ceci ne dépend pas du choix de $\tilde\mu$ car deux choix diffèrent par un élément de $\mathscr{R}^+e_1\boxtimes\mathbf{P}^1$ et donc leurs images par $\mathrm{Res}_{{}^cU}$ diffèrent par un élément de $\mathscr{R}^+e_1\boxtimes{}^cU$.)

Proposition 4.17. — (i) *Si $g\in G$, on a $g\cdot S_{s,U}(\mu)=S_{s,g\cdot U}(g\cdot\mu)$.*

(ii) *On a $(S_{s,U}(\mu))(x)=\int_U\delta_s(z-x)\,\mu(z)$, si $x\in{}^cU$.*

Démonstration. — Le (i) est immédiat : on peut prendre $g\cdot\tilde\mu$ comme relèvement de $g\cdot\mu$ et on a alors $\mathrm{Res}_{g\cdot{}^cU}g\cdot\tilde\mu=g\cdot\mathrm{Res}_{{}^cU}\tilde\mu$.

Pour démontrer le (ii), commençons par prouver la G-équivariance de $\mu\mapsto S'_{s,\mu}$, avec $S'_{s,\mu}(x)=\int_U\delta_s(z-x)\,\mu(z)$. Si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, on a $g^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix}d&-b\\-c&a\end{smallmatrix}\right)$, et comme $\omega_s\delta_1^{-1}\chi=\delta_2$ et $\delta_s\delta_2=\delta_1\chi^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}(S'_{s,g\cdot U}(g\cdot\mu))(x)=&\omega_s(ad-bc)\int_{g\cdot U}\delta_s(z-x)\,g\cdot\mu(z)\\ =&\,\delta_2(ad-bc)\int_U\delta_s(cz+d)\delta_s\big(\tfrac{az+b}{cz+d}-x\big)\,\mu(z)\\ =&\,\delta_s\delta_2(ad-bc)\delta_s\big(\tfrac{-cx+a}{ad-bc}\big)\int_U\delta_s\big(z-\tfrac{dx-b}{-cx+a}\big)\,\mu(z)=(S'_{s,U}(\mu)\star g^{-1})(x),\end{aligned}$$

ce que l'on cherchait à vérifier. Maintenant, comme $\mu\mapsto S_{s,U}(\mu)$ et $\mu\mapsto S'_{s,U}(\mu)$ sont G-équivariantes toutes les deux, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur la masse de Dirac en 0 pour montrer qu'elles sont égales : en effet, la G-équivariance implique qu'elles coïncident en toute masse de Dirac et la densité des masses de Dirac dans $B^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)^*$ permet de conclure.

Soit donc $\tilde e_2$ un relèvement de e_2 dans $\Pi(s)^*\otimes\omega_s$. Si V est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1$ ne contenant pas 0, on a $\mathrm{Res}_V\tilde e_2\in\mathscr{R}e_1\boxtimes V$; on note ϕ_{V,e_2} l'image de $\mathrm{Res}_V\tilde e_2$ dans $B^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)\boxtimes V$, et les ϕ_{V,e_2} se recollent en une fonction ϕ_{e_2}, localement analytique sur $\mathbf{Q}_p^*$, et qui ne dépend pas du choix de $\tilde e_2$. On cherche à vérifier que $\phi_{e_2}(x)=\delta_s(x)$, pour tout $x\in\mathbf{Q}_p^*$. Or on a $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)e_2=\delta_2(a)e_2$, si $a\in\mathbf{Q}_p^*$. Il s'ensuit que $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\tilde e_2-\delta_2(a)\tilde e_2\in(\mathscr{R}e_1\boxtimes\mathbf{P}^1)\cap(\Pi(s)^*\otimes\omega_s)=(\mathscr{R}^+e_1\boxtimes\mathbf{P}^1)$; on en déduit que $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\phi_{e_2}=\delta_2(a)\phi_{e_2}$, ce qui se traduit par $\delta_1\chi^{-1}(a)\phi_{e_2}\big(\frac{x}{a}\big)=\delta_2(a)\phi_{e_2}(x)$ et donc que $\phi_{e_2}(x)=\delta_s(x)\phi_{e_2}(1)$.

Par ailleurs, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\tilde e_2$ est un relèvement de e_2 dans $\Delta(s)$, et comme l'extension est supposée normalisée on en déduit, grâce au (i) de la prop. 4.16, qu'il existe $\phi\in\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ telle que l'on ait $\phi_{e_2}=\delta_s+\phi$ sur $\mathbf{Z}_p$. Il en résulte que $\phi=0$ et $\phi_{e_2}(1)=1$, ce qui permet de conclure.

4.7.2. Le cas spécial. — Supposons maintenant que s est spécial. Alors $\delta_s=x^k$, avec $k\in\mathbf{N}$, et il existe $\ell\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,L)$ décrivant l'extension. La différence avec le cas générique est que l'application de $\Pi(s)^*\otimes\omega_s$ dans $B^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)^*\otimes\omega_s$ n'est pas surjective : son image est l'orthogonal de $W(\delta_1,\delta_2)$ (i.e. de l'espace des polynômes de degré $\leq k$). Si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1$ on note $(B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)^*\boxtimes U)_0\otimes\omega_s$ l'intersection de $(B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)^*\boxtimes U)\otimes\omega_s$ avec l'orthogonal de $W(\delta_1,\delta_2)$. On définit alors, par le même procédé que dans le cas générique, un morphisme

$$S_{s,U}:(B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)^*\boxtimes U)_0\otimes\omega_s\to{\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)\boxtimes{}^cU,$$

où ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)\boxtimes{}^cU$ est le quotient de $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)\boxtimes{}^cU$ par l'espace des polynômes de degré $\leq k$ sur ${}^cU$.

Proposition 4.18. — (i) *Si $g\in G$, on a $g\cdot S_{s,U}(\mu)=S_{s,g\cdot U}(g\cdot\mu)$.*
(ii) *On a $(S_{s,U}(\mu))(x)=\int_U(x-z)^k\ell(x-z)\,\mu(z)$, si $x\in{}^cU$.*

Démonstration. — Le (i) se démontre exactement comme dans le cas générique. Pour démontrer le (ii), on commence, comme dans le cas générique, par prouver la G-équivariance de $\mu\mapsto S'_{s,\mu}$, avec $S'_{s,\mu}(x)=\int_U(z-x)^k\,\mu(z)$. Si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}(S'_{s,g\cdot U}(g\cdot\mu))(x)=&\omega_s(ad-bc)\int_{g\cdot U}(z-x)^k\ell(z-x)\,g\cdot\mu(z)\\&=\delta_2(ad-bc)\int_U(cz+d)^k\big(\tfrac{az+b}{cz+d}-x\big)^k\ell\big(\tfrac{az+b}{cz+d}-x\big)\,\mu(z)\\&=(ad-bc)^k\delta_2(ad-bc)\big(\tfrac{-cx+a}{ad-bc}\big)^k\int_U\big(z-\tfrac{dx-b}{-cx+a}\big)^k\ell\big(\tfrac{az+b}{cz+d}-x\big)\,\mu(z)\\&=(S'_{s,U}(\mu)\star g^{-1})(x),\end{aligned}$$

la dernière identité venant de ce que $\ell\big(\frac{az+b}{cz+d}-x\big)=\ell\big(z-\frac{dx-b}{-cx+a}\big)+\ell(-cx+a)-\ell(cz+d)$, et de ce que le terme faisant intervenir $\ell(-cx+a)$ disparaît car on intègre un polynôme en z de degré $\leq k$, et que celui faisant intervenir $\ell(cz+d)$ disparaît car le résultat est un polynôme en x de degré $\leq k$.

Il suffit alors, comme dans le cas générique, de prouver que $S_{s,U}(\mu)$ et $S'_{s,U}(\mu)$ coïncident pour $\mu={\rm Dir}_0-w\cdot(\frac{1}{k!}d^k{\rm Dir}_0)$ qui est un élément de $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)^*_0$ dont les translaté sous l'action de G (et même de N) engendrent topologiquement $B^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)^*_0$. Soit donc $\tilde e_2$ un relèvement de $e_2-w\cdot\frac{t^k}{k!}e_2$. On définit, comme ci-dessus, une fonction ϕ_2, localement analytique sur $\mathbf{Q}_p^*$, et on cherche à prouver que son image modulo les polyômes de degré $\leq k$ est $x^k\ell$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on a $\big(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)-\delta_2(a)\big)\cdot\phi_2=0$ dans ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$, ce qui signifie que $\big(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)-\delta_2(a)\big)\cdot\phi_2$ est un polyôme de degré $\leq k$, et donc que ϕ_2 est de la forme $x^k\ell'(x)+P(x)$, où $\ell'\in{\rm Hom}(\mathbf{Q}_p^*,L)$ et P est un polyôme de degré $\leq k$. On en déduit le résultat, comme dans le cas générique, en utilisant le fait que ${\rm Res}_{\mathbf{Z}_p}\tilde e_2$ est un relèvement de e_2 dans $\Delta(s)$, et donc que la restriction de ϕ_2 à $\mathbf{Z}_p$ est de la forme $x^k\ell+\phi$, où $\phi\in{\rm LA}(\mathbf{Z}_p)$.

Remarque 4.19. — La transformation $\mu\mapsto\int_U\frac{1}{z-x}\mu(z)$ (qui correspondrait au cas $\delta_s=x^{-1}$, interdit par l'hypothèse $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$), est la transformée de Stieljes **[23]** : son image est l'espace des $\phi : {}^cU \to L$ qui sont la restriction d'une fonction analytique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) - U$, nulle en ∞.

A. Cohomologie des semi-groupes

Soit G^+ un semi-groupe topologique. Si M est un L-espace vectoriel topologique muni d'une action continue de G^+ (en bref M est un G^+-module), on note $C^\bullet(G^+, M)$ le complexe habituel

$$0 \longrightarrow C^0(G^+, M) \xrightarrow{d_1} C^1(G^+, M) \xrightarrow{d_2} \cdots,$$

où $C^n(G^+, M)$ est le Λ module des fonctions continues de $(G^+)^n$ dans M (et $C^0(G^+, M) = M$ par convention), et d_{n+1} est la différentielle

$$d_{n+1}c(g_0, \dots, g_n) = g_0 \cdot c(g_1, \dots, g_n) + \sum_{0 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+1} c(g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^{n+1} c(g_0, \dots, g_{n-1}).$$

Si $n = 0, 1, 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&d_1 c(g) = (g-1) \cdot c, \quad \text{si } c \in M = C^0(G^+, M),\\
&d_2 c(g_0, g_1) = g_0 \cdot c(g_1) - c(g_0 g_1) + c(g_0),\\
&d_3(g_0, g_1, g_2) = g_0 \cdot c(g_1, g_2) - c(g_0 g_1, g_2) + c(g_0, g_1 g_2) - c(g_0, g_1).
\end{aligned}$$

On note $B^n(G^+, M)$ l'espace des cobords, image de d_n, et $Z^n(G^+, M)$ l'espace de cocycles, noyau de d_{n+1}. Comme $d_{n+1} \circ d_n = 0$, on a $B^n(G^+, M) \subset Z^n(G^+, M)$, et on note $H^n(G^+, M)$ le n-ième groupe de cohomologie de G^+ à valeurs dans M, quotient de $Z^n(G^+, M)$ par $B^n(G^+, M)$.

Notons G^- le semi-groupe opposé de G^+ que l'on voit comme l'ensemble des inverses des éléments de G^+ (et donc $G^+ = \{g^{-1},\ g \in G^-\}$). Si M est un L-espace vectoriel topologique, muni d'une action de G^+, son dual M^* est muni d'une action de G^- donnée par $\langle g \cdot \mu, v \rangle = \langle \mu, g^{-1} \cdot v \rangle$. On dispose donc de groupes de cohomologie $H^n(G^-, M^*)$, pour $n \in \mathbf{N}$.

A.1. Dévissage de la cohomologie de A^+. — On a $A^+ = \Phi^+ \times A^0$, où Φ^+ est le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{N}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et A^0 le groupe $A^0 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On note $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le générateur de Φ et σ_a, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, l'élément $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Tout élément g de A^+ s'écrit alors, de manière unique, sous la forme $\varphi^{k(g)} \sigma_{a(g)} = \sigma_{a(g)} \varphi^{k(g)}$, avec $k(g) \in \mathbf{N}$ et $a(g) \in \mathbf{Z}_p^*$.

On peut décomposer A^0 sous la forme $\Delta \times A^1$, où Δ est le sous-groupe de torsion de A^0 et $A^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1+2\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme nos coefficients sont tous des L-espaces vectoriels topologiques, on a

$$H^i(A^0, M) = H^i(A^1, H^0(\Delta, M)) = H^0(\Delta, H^i(A^1, M)),$$

pour tout i, et comme $A^1 \cong \mathbf{Z}_p$, on a $H^i(A^1, M) = 0$ et donc $H^i(A^0, M) = 0$, pour tout $i \geq 2$. De plus, si u est un générateur topologique de $1 + 2\mathbf{Z}_p$ (et donc σ_u est un générateur topologique de A^1), alors

$$H^0(A^1, M) = \mathrm{Ker}(\sigma_u - 1) \;\text{ et }\; H^1(A^1, M) \cong M/(\sigma_u - 1)\cdot M,$$

le dernier isomorphisme étant induit par $c \mapsto c(\sigma_u)$ (l'isomorphisme inverse envoie $v \in M$ sur $g \mapsto \frac{g-1}{\sigma_u - 1}\cdot v$, où $\frac{g-1}{\sigma_u-1}$ est vu comme un élément de $\mathbf{Z}_p[[A^1]]$).

La nullité de $H^2(A^0, H^0(\Phi^+, M))$ implique que la suite d'inflation-restriction

$$0 \to H^1(A^0, H^0(\Phi^+, M)) \xrightarrow{\iota_{HS}} H^1(A^+, M) \xrightarrow{\pi_{HS}} H^0(A^0, H^1(\Phi^+, M)) \to 0$$

est exacte, pour tout M. Par ailleurs,

$$H^0(\Phi^+, M) = \mathrm{Ker}(\varphi - 1) \;\text{ et }\; H^1(\Phi^+, M) \cong M/(\varphi - 1)M,$$

le dernier isomorphisme étant induit par $c \mapsto c(\varphi)$ (l'isomorphisme inverse envoie $v \in M$ sur le cocycle $g \mapsto \frac{g-1}{\varphi-1}\cdot v$; si $v \in (\varphi-1)\cdot M$, ce cocycle est un cobord).

On a $H^n(\Phi^+, M) = 0$ si $n \geq 2$. On en déduit, grâce à la suite spectrale de Hochshild-Serre, que $H^i(A^+, M) = 0$, si $i \neq 0, 1, 2$, et que l'on a des isomorphismes

$$\iota_{HS} : H^0(A^0, H^0(\Phi^+, M)) \cong H^0(A^+, M),$$
$$\iota_{HS} : H^1(A^0, H^1(\Phi^+, M)) \cong H^2(A^+, M).$$

Le premier isomorphisme se passe de commentaires, mais nous allons avoir besoin d'expliciter le second.

Soit c un 2-cocycle continu sur A^+, et soit $\alpha : A^+ \times A^+ \to M$ définie par $\alpha(g,h) = c(g,h) - c(h,g)$. En soustrayant de la relation de cocycle pour (h_1, g, h_2) celles pour (h_1, h_2, g) et (g, h_1, h_2), et en utilisant la commutatitivité de A^+, on obtient l'identité

$$d_{2,h}\alpha(g, h_1, h_2) = (1-g)\cdot c(h_1, h_2).$$

Par antisymétrie, on a aussi $d_{2,g}\alpha(g_1, g_2, h) = (h-1)\cdot c(g_1, g_2)$. Par ailleurs, si $c = d_2 c_1$, alors $\alpha(g,h) = (g-1)\cdot c_1(h) - (h-1)c_1(g)$. Maintenant, comme $H^2(\Phi, M) = 0$, on peut écrire c sous la forme $c' + d_2 c_1$, où c' est un 2-cocycle sur A^+ vérifiant $c(h_1, h_2) = 0$, pour tous $h_1, h_2 \in \Phi^+$. Alors les identités ci-dessus montrent que $h \mapsto c'(g,h) - c'(h,g)$ est un élément de $Z^1(A^+, M)$, pour tout $g \in A^+$, et que l'image de $g \mapsto (h \mapsto c'(g,h) - c'(h,g))$ dans $C^1(A^+, H^1(\Phi^+, M))$ est un 1-cocycle trivial sur Φ^+ et donc est l'inflation d'un 1-cocyle sur A^0 ; l'isomorphisme $\iota_{HS}^{-1} : H^2(A^+, M) \cong H^1(A^0, H^1(\Phi^+, M))$ envoie c sur l'image de $g \mapsto (h \mapsto c'(g,h) - c'(h,g))$. (Ceci ne dépend pas de la décomposition $c = c' + d_2 c_1$ choisie car, si $c = c'' + d_2 c_1'$ en est une autre, cela implique que $c_1 - c_1'$ est un 1-cocyle sur Φ, et l'image de $d_2(c_1 - c_1')$ par ι_{HS} est celle de $g \mapsto ((g-1)\cdot(c_1 - c_1'))$, et donc est nulle.)

Si $(\varphi - 1)M$ *est fermé dans* M, on peut décrire l'isomorphisme inverse ι_{HS} : $H^1(A^0, H^1(\Phi^+, M)) \to H^2(A^+, M)$ de la manière suivante. Si $\alpha \in Z^1(A^0, H^1(\Phi^+, M))$, on peut relever α en un cocyle sur A^0, à valeurs dans M, car $H^2(A^0, (\varphi-1)M) = 0$ et $H^1(\Phi^+, M) = M/(\varphi-1)M$. Alors $c(g,h) = -\frac{\varphi^{k(g)}-1}{\varphi-1}\cdot \sigma_{a(g)}\alpha(\sigma_{a(h)})$ est un 2-cobord sur A^+, trivial sur $\Phi^+ \times \Phi^+$, dont l'image dans $H^1(A^0, H^1(\Phi^+, M))$ est celle de α.

A.2. Dualité. — Dans tout ce qui suit, on suppose que la topologie sur M^* est telle que l'application naturelle $M \to (M^*)^*$ est un isomorphisme.

• *Entre* $H^j(\Phi^\pm, M)$ *et* $H^{1-j}(\Phi^\mp, M^*)$.

Notons $\Phi^- = \psi^{\mathbf{N}}$ le semi-groupe opposé de Φ^+. Si M est un L-espace vectoriel topologique, muni d'une action de Φ^+, alors $\psi - 1$ est le transposé de $\varphi - 1$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(\psi - 1)$ et $\mathrm{Im}(\varphi - 1)$ sont orthogonaux, ainsi que $\mathrm{Ker}(\varphi - 1)$ et $\mathrm{Im}(\psi - 1)$. L'accouplement naturel $M^* \times M \to L$ induit donc des accouplements

$$\langle\ ,\ \rangle_\Phi : H^i(\Phi^-, M^*) \times H^{1-i}(\Phi^+, M) \to L, \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

Si $\mathrm{Im}(\varphi - 1)$ *et* $\mathrm{Im}(\psi - 1)$ *sont fermés*, alors $H^i(\Phi^+, M)$ et $H^i(\Phi^-, M^*)$ sont séparés si $i = 0, 1$, et ces accouplements fournissent les identifications suivantes :

— $H^0(\Phi^-, M^*) \cong H^1(\Phi^+, M)^*$ et $H^0(\Phi^+, M) \cong H^1(\Phi^-, M^*)^*$,

— $H^1(\Phi^+, M) \cong H^0(\Phi^-, M^*)^*$ et $H^1(\Phi^-, M^*) \cong H^0(\Phi^+, M)^*$.

Remarque A.1. — Soient E un L-espace vectoriel topologique, et $u : E \to E$ linéaire continue. On dispose de résultats généraux [**7**] assurant que l'image de ${}^t u : E^* \to E^*$ est fermée si celle de u l'est (c'est par exemple le cas si E est un fréchet [**4**, th. IV.4.2.1]). En pratique, la démonstration de la fermeture de $\mathrm{Im}\, {}^t u$ est en général une simple traduction de celle de $\mathrm{Im}\, u$.

• *Entre* $H^j(A^0, M)$ *et* $H^{1-j}(A^0, M^*)$.— Si M_0 est un L-espace vectoriel topologique muni d'une action de A^0, le cup-produit induit un accouplement

$$\langle\ ,\ \rangle_{A^0} : H^i(A^0, M_0^*) \times H^{1-i}(A^0, M_0) \to H^1(A^0, L) = L.$$

De manière explicite, si $x \in H^0(A^0, M_0^*)$ (resp. $H^0(A^0, M_0)$), alors il existe $\lambda \in L$ tel que l'on ait $\langle x, c(\sigma_a)\rangle = \lambda \log a$ (resp. $\langle c(\sigma_a), x\rangle = \lambda \log a$), pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et λ est l'élément de L fourni par l'accouplement ci-dessus.

On suppose que l'application naturelle $M_0 \to (M_0^*)^*$ est un isomorphisme. Soit u un générateur de $1 + 2p\mathbf{Z}_p$. *Si* $(\sigma_u - 1)M_0$ *et* $(\sigma_u - 1)M_0^*$ *sont fermés*, alors $H^i(A^0, M_0)$ et $H^i(A^0, M_0^*)$ sont séparés si $i = 0, 1$, et l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{A^0}$ induit les identifications suivantes :

— $H^0(A^0, M_0^*) \cong H^1(A^0, M_0)^*$ et $H^0(A^0, M_0) \cong H^1(A^0, M_0^*)^*$,

— $H^1(A^0, M) \cong H^0(A^0, M_0^*)^*$ et $H^1(A^0, M_0^*) \cong H^0(A^0, M_0)^*$.

• *Entre* $H^i(A^+, M)$ *et* $H^{2-i}(A^-, M^*)$.— On note A^- le semi-groupe opposé de A^+. On a alors une décomposition $A^- = \Phi^- \times A^0$.

Lemme A.2. — *Soit* $\langle g, h\rangle = k(h) \log a(g) - k(g) \log a(h)$. *Si* $j = 0, 1, 2$, *il existe un* (unique) *accouplement* $\langle\ ,\ \rangle_{A^+} : H^j(A^-, M^*) \times H^{2-j}(A^+, M) \to L$, *tel que l'on ait,* *pour tous* $h, g \in A^+$,

$$\langle c, c'(g,h) - c'(h,g)\rangle = \langle c, c'\rangle_{A^+}\langle g, h\rangle, \quad si\ c \in Z^0(A^-, M^*)\ et\ c' \in Z^2(A^+, M),$$
$$\langle c(g^{-1}), c'(h)\rangle - \langle c(h^{-1}), c'(g)\rangle = \langle c, c'\rangle_{A^+}\langle g, h\rangle, \quad si\ c \in Z^1(A^-, M^*)\ et\ c' \in Z^1(A^+, M),$$
$$\langle c(g^{-1}, h^{-1}) - c(h^{-1}, g^{-1}), c'\rangle = \langle c, c'\rangle_{A^+}\langle g, h\rangle, \quad si\ c \in Z^2(A^-, M^*)\ et\ c' \in Z^0(A^+, M).$$

Démonstration. — Soient $c \in Z^0(A^-, M^*)$ et $c' \in Z^2(A^+, M)$. Si $\alpha(g,h) = c'(g,h) - c'(h,g)$, on a $d_{2,h}\alpha(g, h_1, h_2) = (1-g)\cdot c'(h_1, h_2)$. (Cela a été utilisé pour la description de l'isomorphisme $\iota_{HS} : H^1(A^0, H^1(\Phi^+, M)) \cong H^2(A^+, M)$.) On en déduit que $(g,h) \mapsto \langle c, c'(g,h) - c'(h,g)\rangle$ est bilinéaire antisymétrique et donc de la forme $\lambda(k(h)\log a(g) - k(g)\log a(h))$, avec $\lambda \in L$. On note $\langle c, c'\rangle_{A^+}$ l'élément λ de L ainsi défini. Alors $(c, c') \mapsto \langle c, c'\rangle_{A^+}$ est bilinéaire sur $Z^0(A^-, M^*) \times Z^2(A^+, M)$ et, pour terminer la démonstration du cas $j=0$, il suffit de vérifier que $\langle c, c'\rangle_{A^+} = 0$ si $c' = d_2 c_1$ est un 2-cobord, ce qui suit de l'identité $\alpha(g,h) = (g-1)\cdot c_1(h) - (h-1)\cdot c_1(g)$.

Soient $c \in Z^1(A^{\mp}, M^*)$ et $c' \in Z^1(A^{\pm}, M)$. On cherche à prouver que $f(g,h) = \langle c(g^{-1}), c'(h)\rangle - \langle c(h^{-1}), c'(g)\rangle$ est bilinéaire, antisymétrique (ceci est évident), sur A^+. Or $f(g, h_1h_2) - f(g, h_1) - f(g, h_2)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\langle c(g^{-1}), c'(h_1h_2) - c'(h_1) - c'(h_2)\rangle - \langle c(h_2^{-1}h_1^{-1}) - c(h_1^{-1}) - c(h_2^{-1}), c'(g)\rangle\\
&= \langle c(g^{-1}), (h_1 - 1)\cdot c'(h_2)\rangle - \langle (h_2^{-1} - 1)\cdot c(h_1^{-1}), c'(g)\rangle\\
&= \langle (h_1^{-1} - 1)\cdot c(g^{-1}), c'(h_2)\rangle - \langle c(h_1^{-1}), (h_2 - 1)\cdot c'(g)\rangle,
\end{aligned}$$

Comme $A^{\pm}$ est commutatif, un 1-cocycle sur $A^{\pm}$ vérifie la relation $(g-1)\cdot c(h) = c(gh) - c(g) - c(h) = (h-1)\cdot c(g)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(g, h_1h_2) - f(g, h_1) - f(g, h_2) &= \langle (g^{-1} - 1)\cdot c(h_1^{-1}), c'(h_2)\rangle - \langle c(h_1^{-1}), (g-1)\cdot c'(h_2)\rangle\\
&= \langle c(h_1^{-1}), (g-1)\cdot c'(h_2)\rangle - \langle c(h_1^{-1}), (g-1)\cdot c'(h_2)\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Ceci prouve la linéarité par rapport à h ; celle par rapport à g en découle en utilisant l'antisymétrie. On en déduit l'existence d'un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{A^+} : Z^1(A^-, M^*) \times Z^1(A^+, M)$ tel que

$$f(g,h) = \langle c, c'\rangle_{A^+}(k(h)\log a(g) - k(g)\log a(h)).$$

Par ailleurs, De plus, si c ou c' est un cobord, alors f est identiquement nulle (car $\langle c(g^{-1}), (h-1)c'\rangle = \langle (h^{-1}-1)\cdot c(g^{-1}), c'\rangle = \langle (g^{-1}-1)\cdot c(h^{-1}), c'\rangle = \langle c(h^{-1}), (g-1)c'\rangle$ et argument similaire si c' est un cobord). Il en résulte que $\langle\ ,\ \rangle_{A^+}$ se factorise à travers $H^1(A^-, M^*) \times H^1(A^+, M)$.

Ceci démontre le cas $j = 1$, et le cas $j = 2$ s'obtenant en échangeant les rôles de M et M^* et de A^+ et A^- dans le cas $j = 0$, cela permet de conclure.

Proposition A.3. — *On suppose que :*

- $(\varphi - 1)\cdot M$ *et* $(\psi - 1)\cdot M^*$ *sont fermés dans* M *et* M^*,

• $(\sigma_u - 1) \cdot M_0$ *est fermé dans* M_0*, si* M_0 *est un des modules* $H^j(\Phi^+, M)$*, pour* $j = 0, 1$*, et* $H^j(\Phi^-, M^*)$*, pour* $j = 0, 1$.

Alors les accouplements $\langle\ ,\ \rangle_{A^+}$ *induisent des identifications :*

$$H^j(A^-, M^*) \cong H^{2-j}(A^+, M)^* \ \text{ et } \ H^j(A^+, M) \cong H^{2-j}(A^-, M^*)^*, \quad \textit{pour } j = 0, 1, 2.$$

Démonstration. — La première hypothèse implique que $H^j(\Phi^+, M)$ et $H^{1-j}(\Phi^-, M^*)$ sont séparés et duaux l'un de l'autre, si $j = 0, 1$; la seconde implique alors que $H^i(A^0, H^j(\Phi^+, M))$ et $H^{1-i}(A^0, H^{1-j}(\Phi^-, M^*))$ sont duaux l'un de l'autre, si $i = 0, 1$ et $j = 0, 1$, pour l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{A_0}$.

On en déduit le résultat pour $j = 0$ en utilisant l'identité

$$\langle \iota_{HS}(c), \iota_{HS}(c') \rangle_{A^+} = \langle c, c' \rangle_{A_0},$$

si $c \in H^0(A^0, H^0(\Phi^-, M^*))$ et $c' \in H^1(A^0, H^1(\Phi^+, M))$. (Elle se vérifie en revenant aux formules.) Le résultat pour $j = 2$ s'en déduit en échangeant les rôles de M et M^* et de A^+ et A^-.

Pour vérifier le résultat dans le cas $j = 1$, on utilise les suites exactes

$$0 \to H^1(A^0, H^0(\Phi^+, M)) \to H^1(A^+, M) \to H^0(A^0, H^1(\Phi^+, M)) \to 0,$$
$$0 \to H^1(A^0, H^0(\Phi^-, M^*)) \to H^1(A^-, M^*) \to H^0(A^0, H^1(\Phi^-, M^*)) \to 0.$$

Si $c \in \iota_{HS}(H^1(A^0, H^0(\Phi^-, M^*)))$ et $c' \in \iota_{HS}(H^1(A^0, H^0(\Phi^+, M)))$, on a $c(\varphi^{-1}) = 0$ et $c'(\varphi) = 0$, et donc $\langle c, c' \rangle_{A^+} = 0$. L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{A^+}$ induit donc des accouplements sur $H^1(A^0, H^0(\Phi^+, M)) \times H^0(A^0, H^1(\Phi^-, M^*))$ et $H^1(A^0, H^0(\Phi^-, M^*)) \times H^0(A^0, H^1(\Phi^+, M))$ dont on vérifie aisément en revenant aux formules qu'ils coïncident, au signe près, avec les accouplements $\langle\ ,\ \rangle_{A_0}$. On en déduit le résultat pour $j = 1$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés. Astérisque **319** (2008), 13–38.

[2] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 155–211.

[3] L. Berger et P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque **319** (2008), 303–337.

[4] N. Bourbaki, *Espace Vectoriels Topologiques*, chap. I à V, Masson, Paris, 1981.

[5] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. E.N.S. **37** (2004) 559–610.

[6] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, Astérisque **331** (2010), 65–115.

[7] H. Cartan, lettre du 4 mars 1940 et A. Weil, lettre du 9 mars 1940, *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991)*, éditée par M. Audin, Documents Mathématiques **6**, Société Mathématique de France, 2011.

[8] G. Chenevier, Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$, Math. Ann. (à paraître).

[9] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[10] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

[11] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique, Astérisque **330** (2010), 13–59.

[12] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153.

[13] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 213–262.

[14] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[15] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[16] G. Dospinescu, Équations différentielles p-adiques et foncteurs de Jacquet analytiques, ce volume.

[17] M. Emerton, p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups Duke Math. J. **130** (2005), 353-392.

[18] M. Emerton, Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties, Ann. E.N.S. **39** (2006), 775–839.

[19] M. Emerton, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 279–393.

[20] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[21] H. Jacquet et R. Langlands, Automorphic forms on $\mathbf{GL}(2)$, Lect. Notes in Math. **114**, Springer 1970.

[22] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[23] N. Koblitz, *p-adic analysis : a short course on recent work*, London Math. Soc. Lecture Note Series **46**, Cambridge University Press 1980.

[24] J. Kohlhaase, The cohomology of locally analytic representations, J. Reine Angew. Math. **651** (2011), 187–240.

[25] R. Liu, Locally Analytic Vectors of some crystabeline representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Compos. Math. 148 (2012), 28–64.

[26] R. Liu, Cohomology and duality for (φ, Γ)-modules over the Robba ring, Int. Math. Res. Not. IMRN (3) (2008)

[27] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Ann. E.N.S. **45** (2012), 167–190.

[28] V. Paskunas, On some crystalline representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra & Number Theory **3** (2009), 411–421.

[29] V. Paskunas, The image of Colmez's Montréal functor, Publ. Math. IHES (à paraître).

[30] P. Schneider et J. Teitelbaum, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to $\mathbf{GL}_2$, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 443–468.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* colmez@math.jussieu.fr