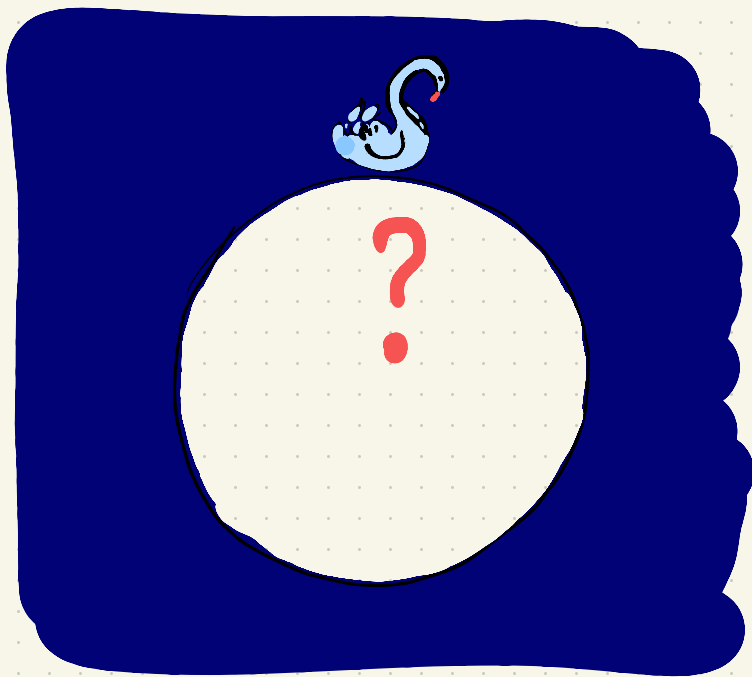
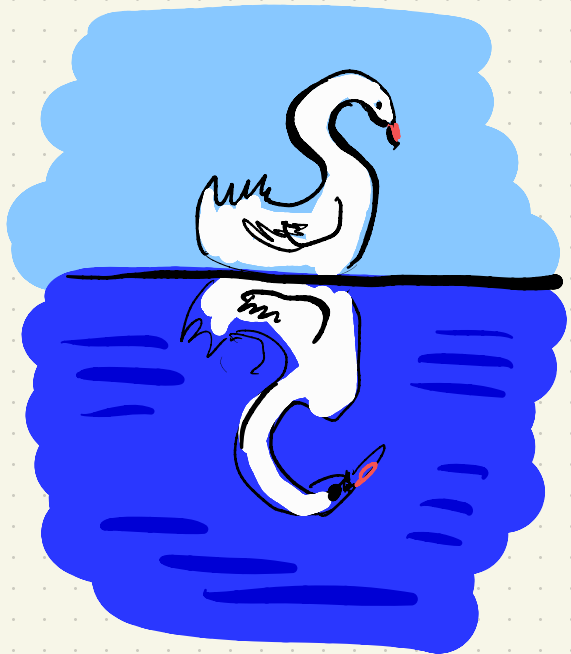
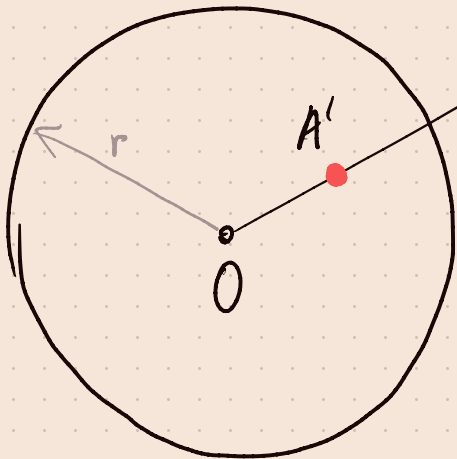


Инверсия



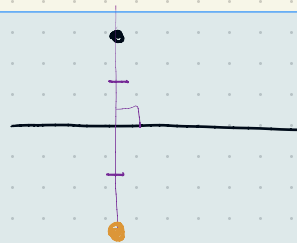
Инверсия:



$I: A \rightarrow A'$, так что

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2$$

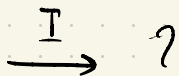
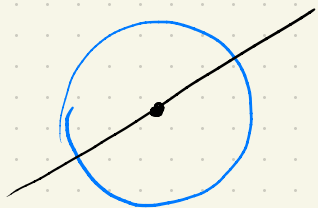
Отражение



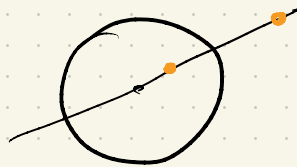
Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

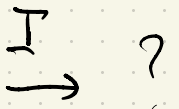
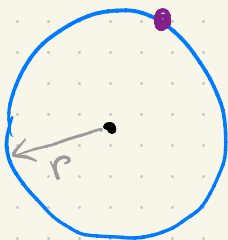
1a



куда инверсия
переведет прямую,
проходящую через
центр O ?



1b

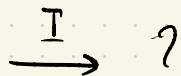
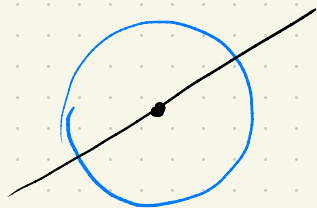


а точки на окружности?

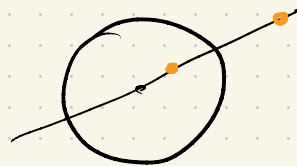
Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

1a

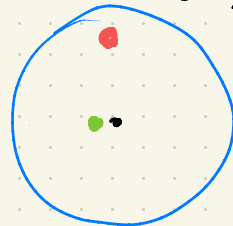


куда инверсия
переведет прямую,
проходящую через
центр O ?

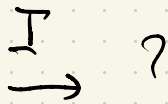
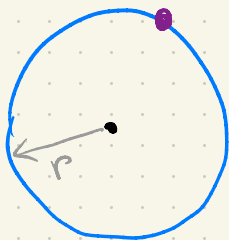


Решение: в ту же
прямую

Куда перейдут
эти точки?



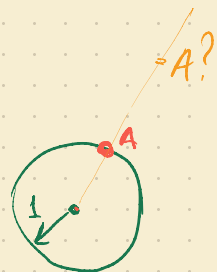
1b



точки на окружности
остаются на месте

Пример:

если $r=1$:



$$OA \cdot OA' = 1$$

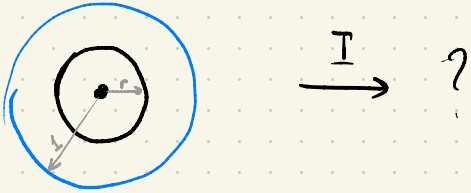
$$1 \cdot ? = 1$$

$$\Rightarrow OA' = 1, A = A'$$

Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

1c

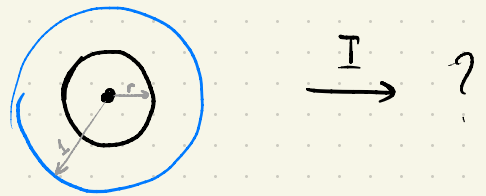


куда перейдет
окружность с центром O ?

Нарисуйте / угадайте / докажите:

$OA \cdot OA' = r^2$

1c

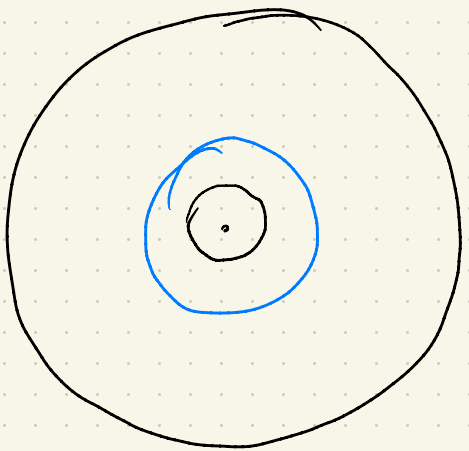


куда перейдет
окружность с центром O?



Решение:

В окружность с тем же
центром и радиусом r'
т.ч. $r \cdot r' = 1$



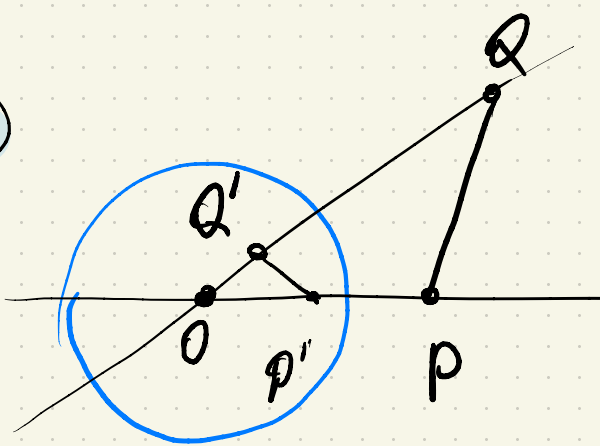
Дискуссия

Хватит ли на большую
окружность точек,
или останутся пробелы?



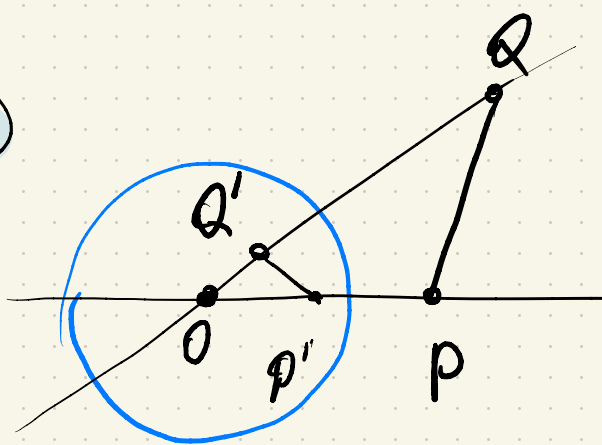
$$OA \cdot OA' = r^2$$

Доказать, что треугольники
 $\triangle OPQ$ и $\triangle OQ'P'$ подобны.



$$OA \cdot OA' = r^2$$

Доказать, что треугольники $\triangle OPQ$ и $\triangle OQ'P'$ подобны.



Решение:

$$OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$$

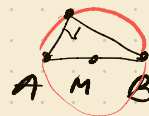
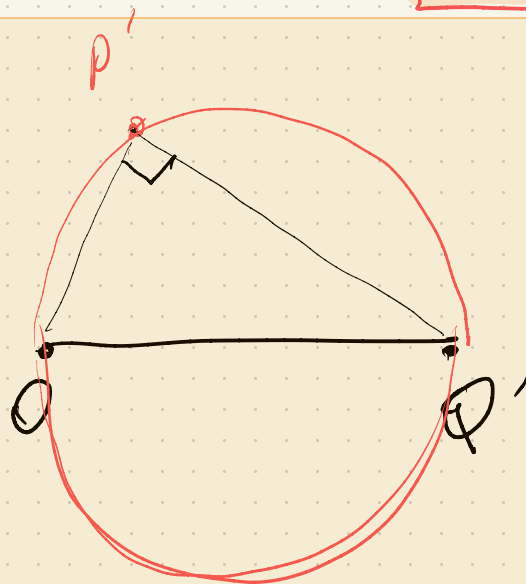
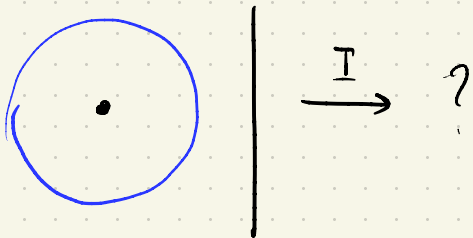
$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$$

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$$



Нарисуйте / угадайте / докажите:

3.



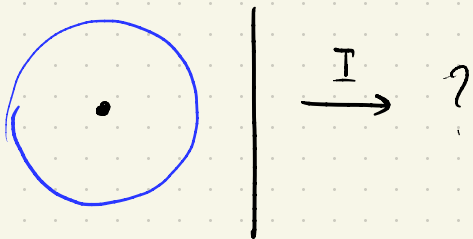
$$OA \cdot OA' = r^2$$

Множество точек,
из которых отрезок AB
виден под прямым углом —
окружность с центром
в середине AB ,

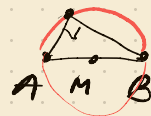
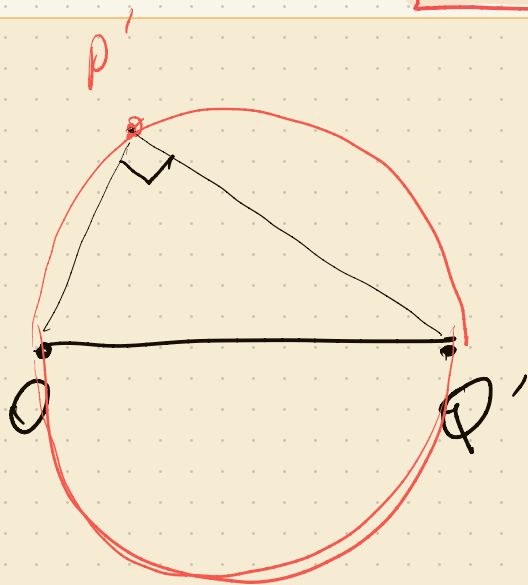
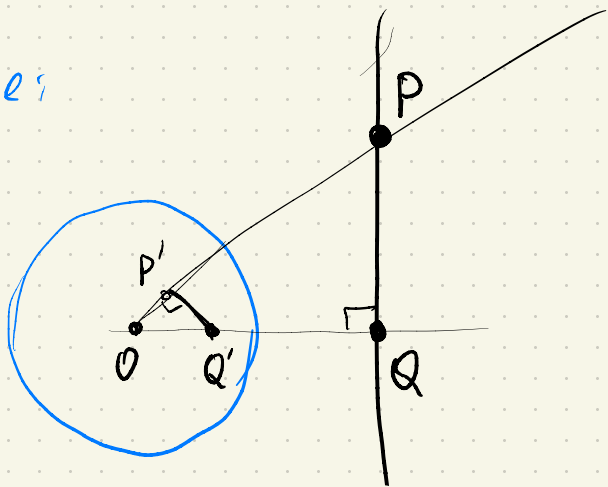
нарисуйте / угадайте / докажите.

$$OA \cdot OA' = r^2$$

3.



Решение?



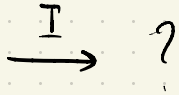
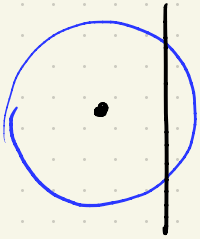
Множество точек,
из которых отрезок AB
виден под прямым углом —
окружность с центром
в середине AB ,

Т.е. пока P едет по прямой PQ ,
 P' едет по окружности с диаметром
 OQ' .

Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

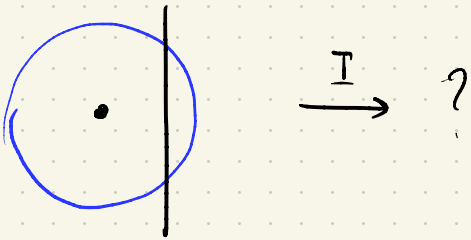
4.



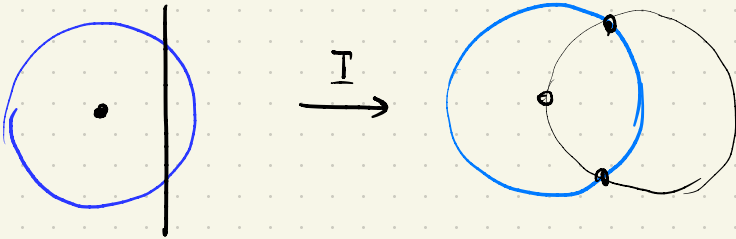
Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

4.



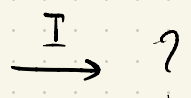
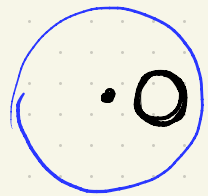
Ответ



Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

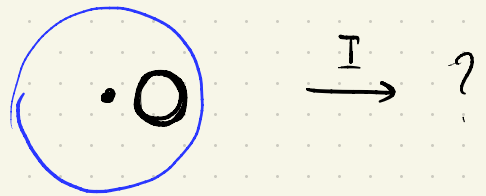
5.



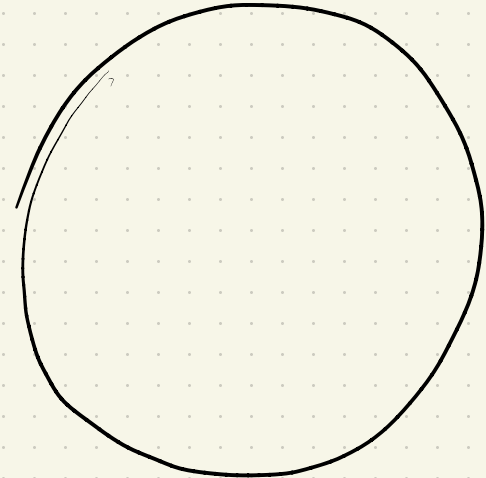
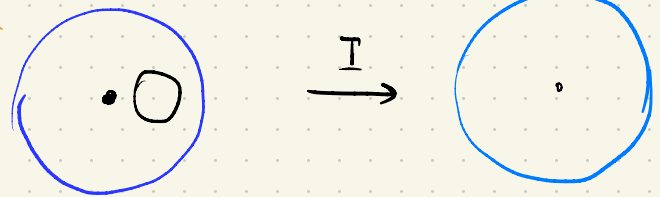
Нарисуйте / угадайте / докажите:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

5.



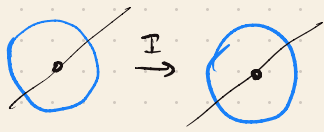
Ответ



Показали что:

инверсия переводит прямые и окружности
в прямые и окружности

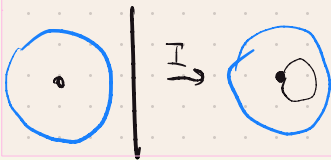
в том числе:



• прямые, проходящие
через центр



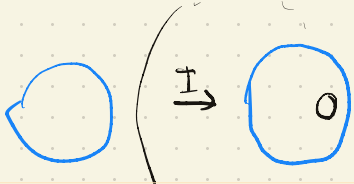
прямые, проходящие
через центр



• прямые, не
через центр



окружности
через центр



• окружности, не
через центр

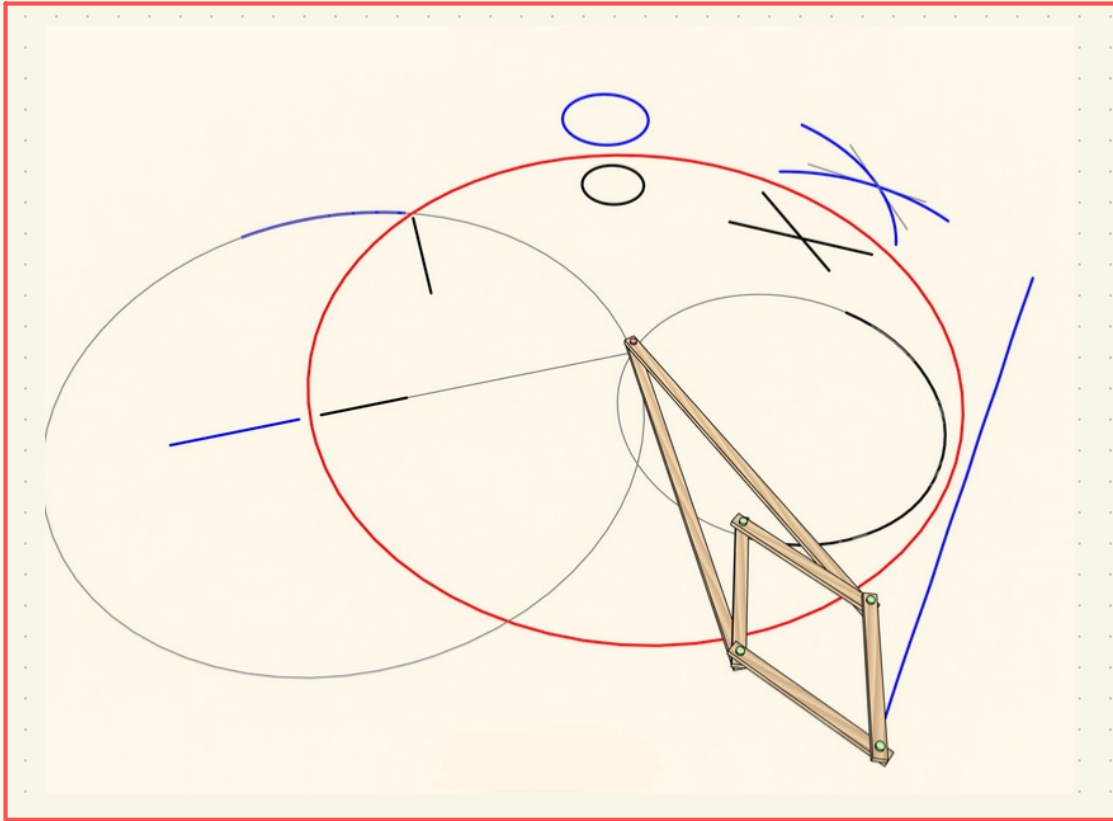
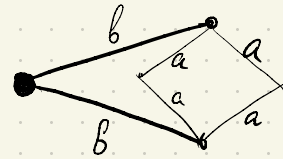


окружности, не
через центр

Можно доказать:

Инверсия сохраняет углы между кривыми

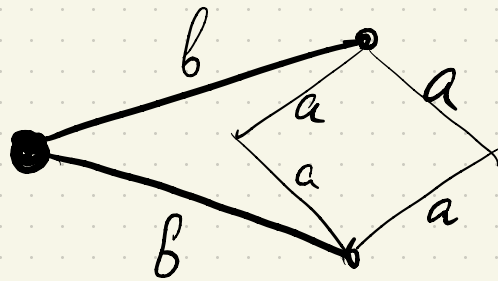
6. "Правило Липкина"



скрипшот с сайта etudes.ru;
etudes.ru/etudes/lipkin-inversor

6a

Окружность какого радиуса сохраняет это "прямо"?

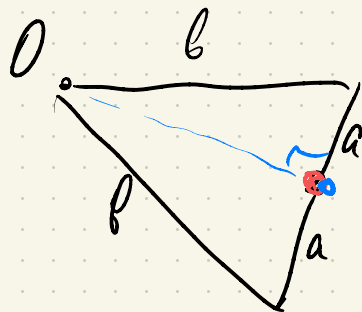
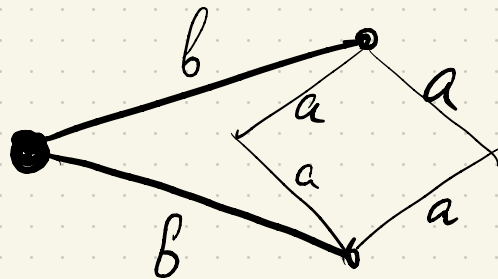


6a) Окружность какого радиуса сохраняет это "прямоугольником"?

Решение:



Нет, не совпади
совпади



Теорема Пифагора:

$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$x^2 + a^2 = b^2$$

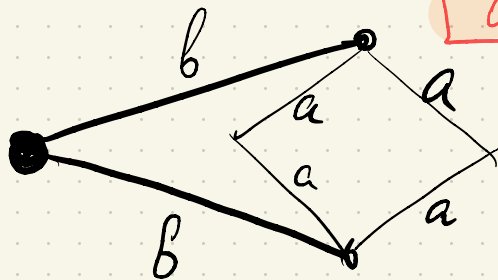
$$x^2 = b^2 - a^2$$

$$x = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Ответ: сохранится
окружность радиуса
 $x = \sqrt{b^2 - a^2}$

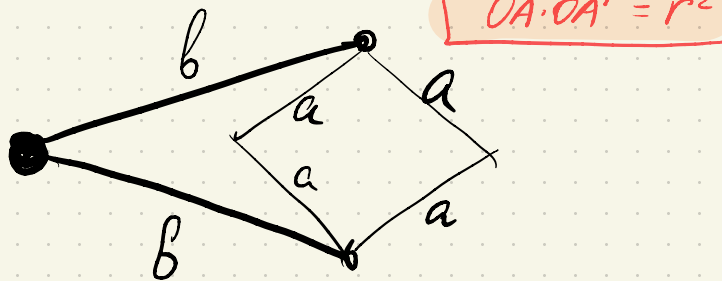
76

Покажите, что "прямилло" реализует инверсию.

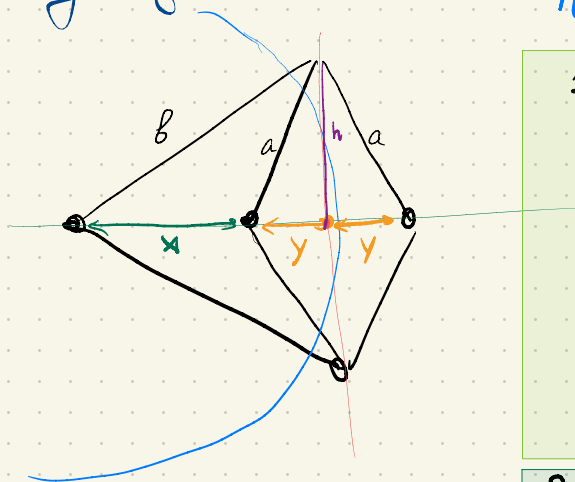


$$OA \cdot OA' = r^2$$

76) Покажите, что "прямилло" реализует инверсию.



Подсказка:



План:

1. Посчитать h из двух прямоугольных треугольников:

$$h^2 = b^2 - (x+y)^2 \quad \text{и} \quad h^2 = a^2 - y^2$$

Т.е. $b^2 - (x+y)^2 = a^2 - y^2$

$$b^2 - x^2 - 2xy - y^2 = a^2 - y^2$$

$$b^2 - a^2 - x^2 = 2xy$$

отсюда найдем y :

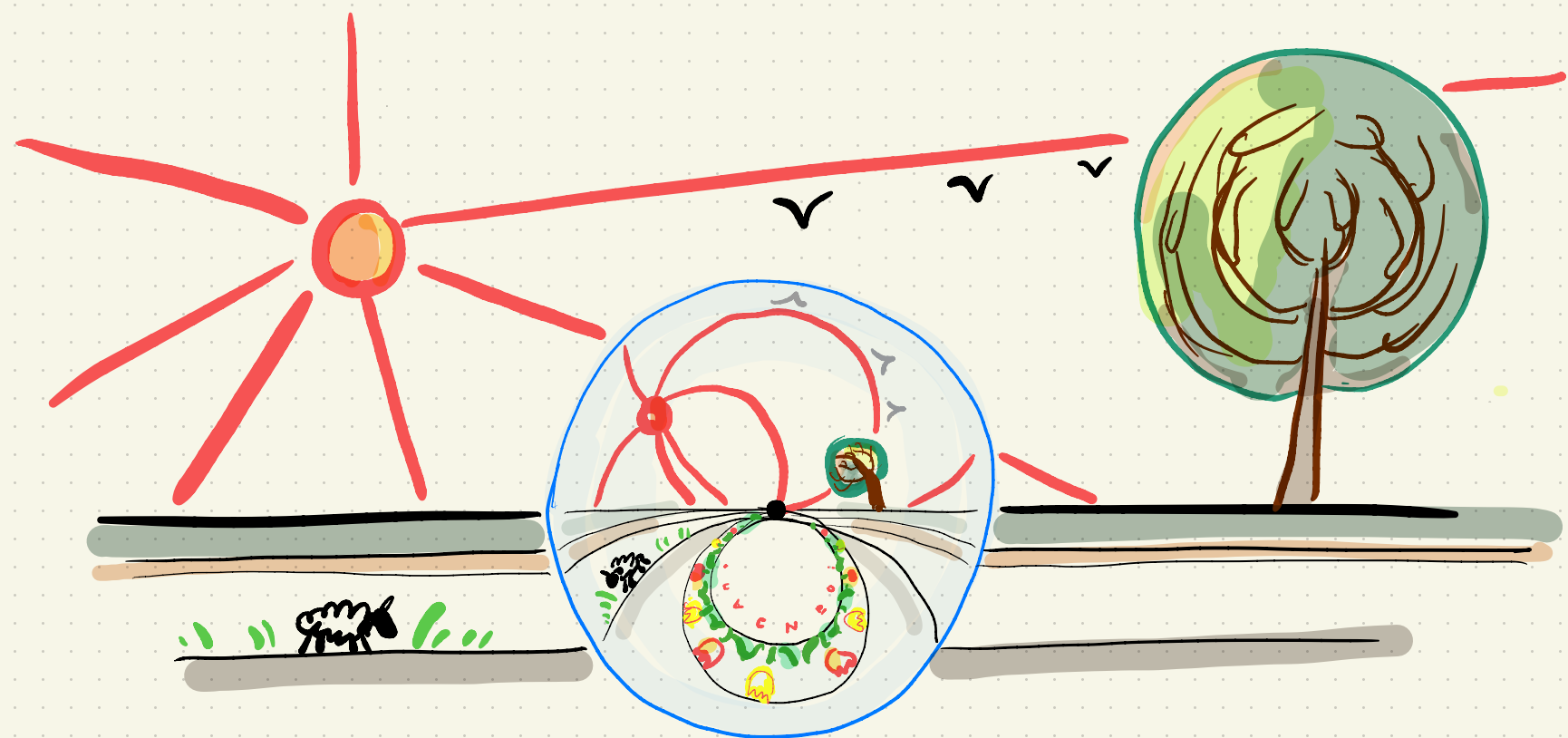
$$\frac{b^2 - a^2 - x^2}{2x} = y$$

2. Найти $d = x + y + y = x + 2 \cdot \frac{b^2 - a^2 - x^2}{2x} = x + \frac{b^2 - a^2 - x^2}{x} = \frac{b^2 - a^2}{x}$

3. Проверим: $OA \cdot OA' = r^2$

$$x \cdot \left(\frac{b^2 - a^2}{x} \right) = b^2 - a^2$$

← сравнить с прошлой задачей! тот же результат!



СПАСИБО!