Несколько задач: подсказки

Задачи и решения и подсказки взяты с сайта http://www.problems.ru

1. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

   Подсказка: Используйте тождество $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

2. Докажите неравенство: $2^n > n$.

   Подсказка: можно воспользоваться индукцией.

3. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что существует неостроугольный треугольник с вершинами в этих точках.

   Подсказка: рассмотрите различные случаи расположения данных точек на плоскости.

4. В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: "М" и "О". Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний "МО" и "ООММ", повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова "ОММ" и "МОО"?

   Подсказка: разность между количествами букв М и О не меняется при добавлении или удалении разрешённых буквосочетаний.

5. Каждая точка числовой оси, координата которой – целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдётся цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k.

   Подсказка: можно использовать рассуждение от противного.

6. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

   Подсказка: рассмотрите самую тяжелую кучку.

7. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

   Подсказка: сколько нужно шариков, чтобы выполнить условие задачи?

8. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

   Подсказка: используйте индукцию по числу вершин многоугольника.

9. Имеется 1000 деревянных правильных 100-угольников, прибитых к полу. Всю эту систему мы обтягиваем верёвкой. Натянутая верёвка будет ограничивать некоторый многоугольник. Доказать, что у него более 99 вершин.

   Подсказка: что можно сказать о сумме углов получившегося многоугольника?

10. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке – по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении.
   а) Могут ли все чижи собраться на одной ёлке?
   б) А если чижей и ёлок – семь?

   Подсказка: занумеруйте елки и рассмотрите сумму номеров елок, на которых сидят чижи.

11. Докажите, что если a, b, c – нечётные числа, то хотя бы одно из чисел $ab - 1$, $bc - 1$, $ca - 1$ делится на 4.

   Подсказка: Рассмотрите остатки от деления данных чисел на 4 и воспользуйтесь принципом Дирихле.

12. Давным-давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: А, И, Н, Р, Т, Я, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу. Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось "Тарния". Какое слово следовало в словаре за именем Ятианр?

   Подсказка: Замените буквы (в “алфавитном порядке”) цифрами от 1 до 6.

13. В таблице 3×3 одна из угловых клеток закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

   Подсказка: рассмотрите чётность числа чёрных клеток среди четырёх угловых клеток.

14. Найдите все натуральные n, для которых $2^n \le n^2$.

   Подсказка: Пользуясь индукцией по n, покажите, что при $n > 4$ выполнено $2^n > n^2$.

15. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

   Подсказка: Если отрезки, освещенные n-м и (n+2)-м фонарями, пересекаются, то (n+1)-й фонарь можно выключить.

16. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4...A_n$ и $B_1B_2B_3B_4...B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3,..., A_nA_1 = B_nB_1$ и n - 3 угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

   Подсказка: Воспользуйтесь индукцией по числу сторон многоугольника.

17. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолетов.

    Подсказка: Воспользуйтесь тем, что если в треугольнике AOB сторона AB является наибольшей, то угол $\angle AOB$ – наибольший угол треугольника.

18. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трёх разных цветов.

    Подсказка: Используйте индукцию по числу вершин многоугольника.