Несколько задач: Решения

Задачи и решения взяты с сайта http://www.problems.ru

1. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

   Подсказка: Используйте тождество $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

   Решение: Разобьём все остатки от деления на 100 на 50 групп: {1, 99}, {2, 98}, ..., {49, 51}, {0, 50}. Поскольку чисел больше 50, найдутся два числа x и y, остатки которых попадут в одну группу. Если это – одна из первых 49 групп, то либо $x - y$, либо $x + y$ делится на 100. Если это последняя группа, то и $x - y$ и $x + y$ кратны 10. В любом случае $x^2 - y^2$ делится на 100.

2. Докажите неравенство: $2^n > n$.

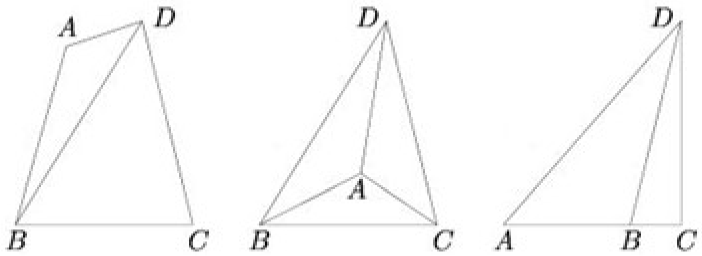
   Подсказка: можно воспользоваться индукцией.

   Решение: Применим индукцию. *База*: $2^1 > 1$.
   Шаг индукции. $2^{n+1} > 2n = n + n \geq n + 1$.

3. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что существует неостроугольный треугольник с вершинами в этих точках.

   Подсказка: рассмотрите различные случаи расположения данных точек на плоскости.

   Решение: Рассмотрим различные случаи расположения четырёх данных точек на плоскости.
   1) Четыре данные точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Сумма углов этого четырёхугольника равна 360°. Поэтому хотя бы один из его углов не острый. Обозначим вершину, угол при которой не острый, через A. Тогда треугольник с вершинами в точке A и двух соседних с ней вершинах четырёхугольника будет неостроугольным (рис. слева).
   2) Одна из точек (обозначим ее A) лежит внутри треугольника BCD, образованного остальными тремя точками (рис. в центре). Сумма углов BAC, CAD и DAB равна 360°. Поэтому по крайней мере один из них имеет величину не меньше 120°. Неостроугольный треугольник найден и в этом случае.
   3) Три точки лежат на одной прямой. Обозначим эти точки A, B и C в порядке их следования на прямой, четвёртую точку обозначим D (рис. справа). Тогда сумма углов DBA и DBC равна 180°. Значит, один из этих углов не меньше 90°. В этом случае требуемый треугольник тоже найден.



4. В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: "М" и "О". Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний "МО" и "ООММ", повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова "ОММ" и "МОО"?

   Подсказка: разность между количествами букв М и О не меняется при добавлении или удалении разрешённых буквосочетаний.

   Решение: Заметьте, что при каждом добавлении или удалении разрешённых буквосочетаний не меняется разность между количеством букв "М" и "О" в слове — она всегда равна 1 для слова "ОММ" и -1 для слова "МОО". Значит, эти слова не синонимы.

5. Каждая точка числовой оси, координата которой – целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдётся цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k.

   Подсказка: можно использовать рассуждение от противного.

   Решение: Пусть A и B – множества соответственно синих и красных точек. Предположим утверждение задачи неверно. Тогда найдется такое натуральное число a, что A содержит лишь конечное число точек с координатами, кратными a. Также найдётся такое натуральное число b, что B содержит лишь конечное число точек с координатами, кратными b. Но тогда $A \cup B$ содержит лишь конечное число точек, с координатами, кратными ab. Противоречие, так как число таких точек бесконечно.

6. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

   Подсказка: рассмотрите самую тяжелую кучку.

   Решение: Предположим, что можно разложить гирьки в соответствии с условием задачи. Сумма масс всех гирек равна 5050. Значит, масса самой тяжёлой кучки не меньше $5050 : 10 = 505$. Так как в наборе нет гирек массы больше 100, то в этой кучке не меньше 6 гирек. Значит, общее количество гирек не меньше чем $6 + 7 + 8 + ... + 15 = 105 > 100$. Противоречие.

7. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

   Подсказка: сколько нужно шариков, чтобы выполнить условие задачи?

   Решение: Предположим, нам это удалось. Упорядочим кучки по возрастанию количества шариков. Тогда в первой кучке должно быть не меньше одного шарика, во второй – не меньше двух, в третьей – не меньше трёх и т. д. Всего шариков должно быть не меньше чем $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$. А у нас только 44. Противоречие.

8. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

   Подсказка: используйте индукцию по числу вершин многоугольника.

   Решение: Пусть n — число вершин многоугольника. Докажем индукцией по n, что найдутся по крайней мере две несмежные вершины, из которых не проведено ни одной диагонали. При $n = 4$ это очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть в многоугольнике проведена диагональ через вершины M и N. Эта диагональ разрезает его на два многоугольника с меньшим числом вершин, в каждом из которых по предположению индукции найдутся две несмежные вершины, из которых не проведены диагонали. Ясно, что для каждого многоугольника одна из этих вершин отлична от M и N (если отрезан треугольник, то нужная вершина — отличная от M и N).

9. Имеется 1000 деревянных правильных 100-угольников, прибитых к полу. Всю эту систему мы обтягиваем верёвкой. Натянутая верёвка будет ограничивать некоторый многоугольник. Доказать, что у него более 99 вершин.

   Подсказка: что можно сказать о сумме углов получившегося многоугольника?

   Решение: Докажем, что если верёвка натянута на несколько правильных n-угольников, то она ограничивает многоугольник, у которого не менее n вершин. Пусть выпуклая оболочка вершин данных n-угольников является m-угольником и $\varphi_1, ..., \varphi_m$ – его углы. Так как каждый угол выпуклой оболочки содержит угол правильного n-угольника, то $\varphi_i \geq (1 - {}^2/_n)\pi$ (справа стоит величина угла правильного n-угольника). Поэтому $(m - 2)\pi = \varphi_1 + ... + \varphi_m \geq m(1 - {}^2/_n)\pi$.

   Следовательно, ${}^{2m}/_n \geq 2$, то есть $m \geq n$.

10. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке – по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении.
    а) Могут ли все чижи собраться на одной ёлке?
    б) А если чижей и ёлок – семь?

    Подсказка: занумеруйте елки и рассмотрите сумму номеров елок, на которых сидят чижи.

    Решение:

    а) **Первый способ**. Занумеруем ёлки числами от 1 до 6 по порядку. Пусть каждый чиж получает номер, равный номеру ёлки, на которой он сидит (в данный момент). Тогда сумма номеров чижей – инвариант. В начале она равна $1 + 2 + ... + 6 = 21$. Поскольку 21 не делится на 6, то собраться на одной ёлке чижи не смогут.
    Второй способ. Заменим нечётные елки дубами и заметим, что на дубах всегда будет нечётное число чижей.

    б) Нетрудно собрать всех чижей на четвёртой ёлке: чижи с первой и седьмой (второй и шестой, третьей и пятой) могут перелететь туда одновременно.

11. Докажите, что если a, b, c – нечётные числа, то хотя бы одно из чисел $ab - 1$, $bc - 1$, $ca - 1$ делится на 4.

    Подсказка: Рассмотрите остатки от деления данных чисел на 4 и воспользуйтесь принципом Дирихле.

    Решение: Так как числа a, b, c нечётны, то при делении на 4 они могут дать остатки 1 или 3. Следовательно, по крайней мере два из них имеют один остаток. числа. Пусть это a, b и остаток 3 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $ab - 1 = (4k + 3)(4n + 3) - 1 = 16kn + 12(k + n) + 8$, что делится на 4.

12. Давным-давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: А, И, Н, Р, Т, Я, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу. Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось "Тарния". Какое слово следовало в словаре за именем Ятианр?

    Подсказка: Замените буквы (в “алфавитном порядке”) цифрами от 1 до 6.

    Решение: В первом слове буквы расположены в алфавитном порядке: Т, А, Р, Н, И, Я. Для удобства занумеруем буквы в алфавитном порядке: Т = 1, А = 2, Р = 3,
    Н = 4, И = 5, Я = 6. Заменим каждое слово соответствующим шестизначным числом. Если слова расположены по алфавиту, то числа – в порядке возрастания. Слово Ятианр запишется числом 615243. За ним следует 615324, что соответствует слову Ятиран.

13. В таблице 3×3 одна из угловых клеток закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

    Подсказка: рассмотрите чётность числа чёрных клеток среди четырёх угловых клеток.

    Решение 1: чётность числа чёрных клеток среди четырёх угловых не меняется при перекрашиваниях.

    Решение 2: Выделим квадрат 2×2, содержащий чёрную клетку и заметим, что чётность числа чёрных клеток в нём не меняется.

14. Найдите все натуральные n, для которых $2^n \le n^2$.

    Подсказка: Пользуясь индукцией по n, покажите, что при $n > 4$ выполнено $2^n > n^2$.

    Решение: Непосредственная проверка показывает, что значения $n = 2, 3, 4$ подходят, а $n = 1$ – нет. Докажем индукцией по n, что $2^n > n^2$ при $n > 4$. *База* ($n = 5$) очевидна.
    Шаг индукции. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > (n + 1)^2$. В самом деле,

    $$2n^2 - (n + 1)^2 = (n^2 - 2n + 1) - 2 = (n - 1)^2 - 2 > 0 \text{ при } n > 4.$$

    Ответ: 2, 3, 4

15. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

    Подсказка: Если отрезки, освещенные n-м и (n+2)-м фонарями, пересекаются, то (n+1)-й фонарь можно выключить.

    Решение: Занумеруем фонари натуральными числами в порядке следования вдоль дороги. Если отрезки, освещенные n-м и (n+2)-м фонарями, пересекаются, то (n+1)-й фонарь можно выключить. Следовательно, отрезки с различными нечетными номерами, не пересекаются. На отрезке длины 1000 м нельзя расположить больше 999 непересекающихся отрезков длины 1 м. Значит, фонарей не больше 1998. Расположим 1998 фонарей так, чтобы центры освещенных отрезков образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен 0,5 м, а 1998-й равен 999,5 м. Между n-м и (n+2)-м отрезком остается зазор в 1/1997 м. Его освещает только (n+1)-й фонарь. Поэтому никакой фонарь нельзя выключить.

16. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4...A_n$ и $B_1B_2B_3B_4...B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3,..., A_nA_1 = B_nB_1$ и n - 3 угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

    Подсказка: Воспользуйтесь индукцией по числу сторон многоугольника.

    Решение: да, будут. Применим индукцию по n. При $n = 3$ имеем два треугольника, у которых соответственные стороны равны. Рассмотрим теперь два n-угольника, где $n>=4$. По условию у них есть пара равных соответственных углов. Отрежем от каждого многоугольника треугольник, две стороны которого заключают данный угол. Эти треугольники равны, поэтому к оставшимся (n - 1)-угольникам можно применить предположение индукции. Действительно, отрезая от равных углов равные углы, мы получаем равные углы.

17. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолетов.

    Подсказка: Воспользуйтесь тем, что если в треугольнике AOB сторона AB является наибольшей, то угол $\angle AOB$ – наибольший угол треугольника.

    Решение: Если самолеты из точек A и B прилетели в точку O, то AB — наибольшая сторона треугольника AOB, т. е. $\angle AOB > 60^o$. Предположим, что в точку O прилетели самолеты из точек $A_1,..., A_n$. Тогда один из углов A_iOA_j не превосходит $360^o/n$. Поэтому $360^o/n > 60^o$, т. е. $n < 6$.

18. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трёх разных цветов.

    <u>*Подсказка:*</u> Используйте индукцию по числу вершин многоугольника.

    <u>*Решение:*</u> Обозначим цвета цифрами 1, 2, 3. Доказательство проведём индукцией по числу n вершин многоугольника. *База* ($n = 3$) тривиальна.
    Шаг индукции. Пусть $n > 3$. Выберем две вершины A и B одного цвета, пусть это цвет 1. Точки A и B делят контур многоугольника на две ломаные. На каждой из этих ломаных есть вершина цвета, отличного от 1. Заметим, что можно найти такие две точки C и D цветов 2 и 3, что C и D лежат на разных ломаных. Действительно, это легко сделать, если на каждой из двух ломаных присутствуют вершины как цвета 2, так и цвета 3. Если же на одной ломаной нет вершин, скажем, цвета 2, то на этой ломаной все вершины цвета 3, и значит, на другой ломаной найдётся вершина цвета 2. Разобьём наш n-угольник на два многоугольника M_1, M_2 диагональю CD. Каждый из этих многоугольников удовлетворяет условию задачи. По предположению индукции каждый из них разбить на треугольники, у которых вершины окрашены в разные цвета. Это и даст разбиение исходного многоугольника.