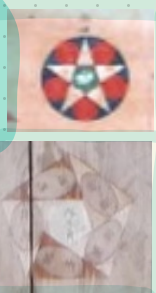


10


Пять задач про правильный пятиугольник

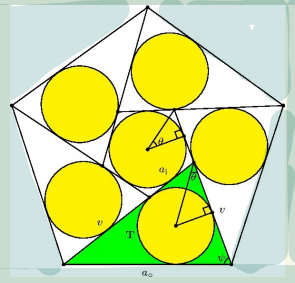
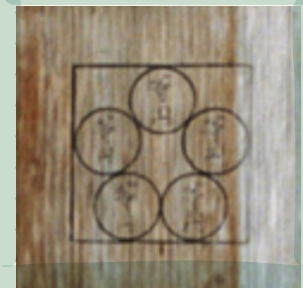
Две?



Пятиугольник

А чего в этом пятиугольнике 10?

- половин сторон
- 
- 10 углов
- 10 равных треугольников

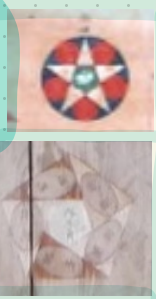


Enryoji Temple (Saitama Pref.), 1828

10

Пять задач про правильный пятиугольник


Две?



Пятиугольник

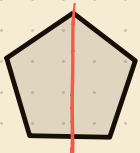
А чего в этом пятиугольнике 10 ?

- 10 разных отрезков с концами в вершинах




$10 = 5 + 5$

- 10 симметрий




и



5 отражений 5 поворотов

Выбранная вершина → любую из 5-ти соседних ребер → любое из 2х соседних ребер






Enryoji Temple (Saitama Pref.), 1828

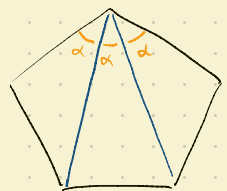
Подготовка

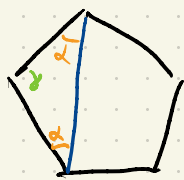
Обозначим: $\pi = \text{угол } 180^\circ$

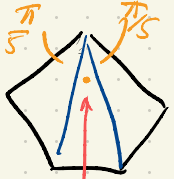
Решение:


0. Чему равен угол γ ? 

 $5\gamma = 3\pi$
 $\gamma = \frac{3\pi}{5} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$

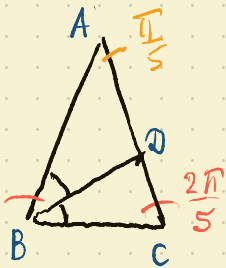
1.  Докажите, что углы равны. Найдите α

 $\gamma = \frac{3\pi}{5}$
 $\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \frac{3\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$

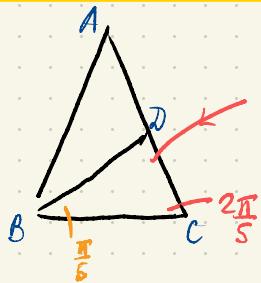
 $\gamma - 2\alpha = \frac{\pi}{5}$

2.  Верно ли, что диагональ параллельна стороне?

Верно, из-за симметрии (А куда ей наклониться - влево, или вправо?)

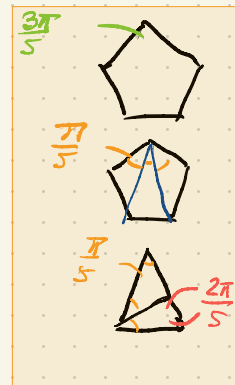
3.  Найдите подобные треугольники

$\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ подобны (у них одинаковые углы)

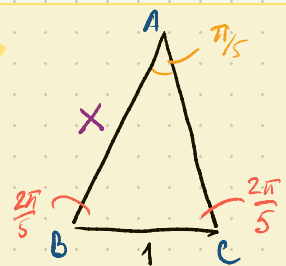
 $\pi - \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$

Подготовка

Обозначим: $\pi = \text{угол } 180^\circ$

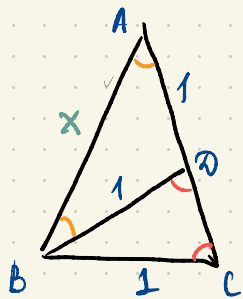


4.



BC = 1
Найти AB

Решение:



из $\triangle BCD$ \downarrow из $\triangle ABD$

$$1 = BC = BD = AD$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

$$x(x-1) = 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

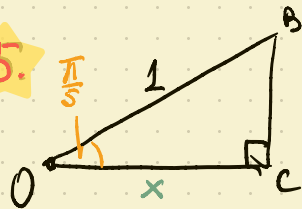
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$
не имеет смысла!

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad - \text{золотое сечение}$$

Подготовка

Обозначим: $\pi = \text{угол } 180^\circ$

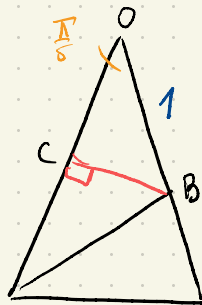
5.



$$\angle O = \frac{\pi}{5}, \quad \angle C = \frac{\pi}{2}, \quad OB = 1$$

Найти OC

Решение:



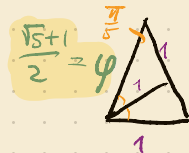
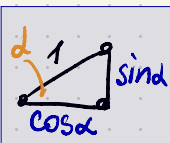
$$OC = \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

Замечание:

По теореме Пифагора можно найти BC, получится

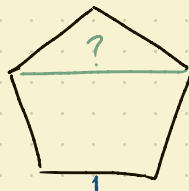
$$BC = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \stackrel{\text{обозначим}}{=} S$$

обозначим

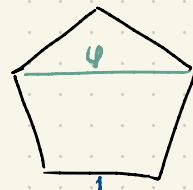


- S называется "синус $\frac{\pi}{5}$ ", обозначается $\sin \frac{\pi}{5}$
- OC называется "косинус $\frac{\pi}{5}$ ", обозначается $\cos \frac{\pi}{5}$

6. Найдите длину диагонали в правильном пятиугольнике со стороной 1.

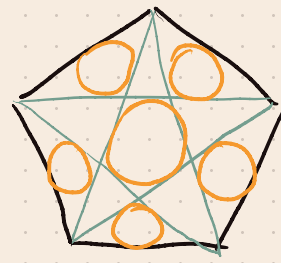


Решение:



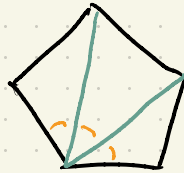
1.

Верно ли, что все окружности на картинке равны?



Решение: Нет!

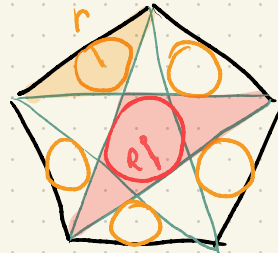
Поскольку углы равны, равные описанные в них окружности были бы одинаково удалены от вершины



1'

Чему равен радиус большей окружности, если радиус меньшей равен 1?

Решение:



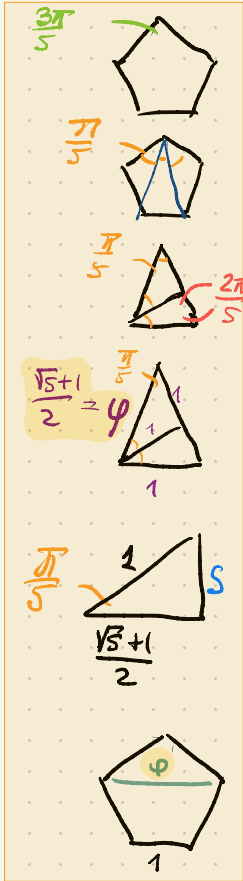
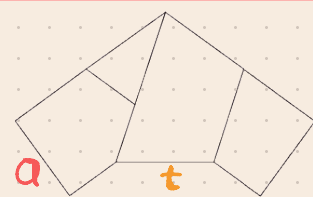
$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi}{1}$$

Если $r=1$

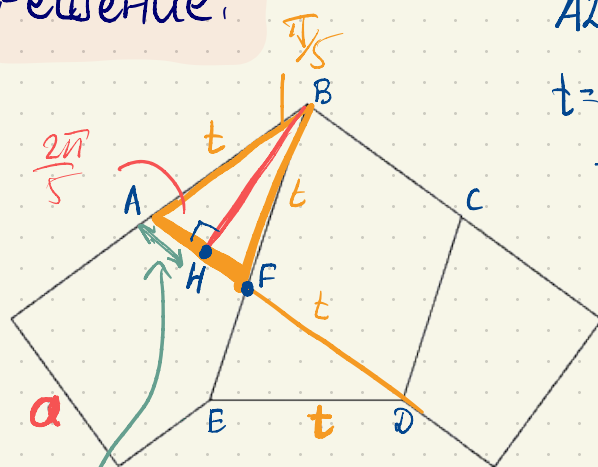
То $R=\varphi$

$\frac{3\pi}{5}$
 $\frac{\pi}{5}$
 $\frac{\pi}{5}$
 $\frac{2\pi}{5}$
 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
 $\frac{\pi}{5}$
 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
 φ

2. Постройте правильный пятиугольник, завязав узел из полоски бумаги. Найдите длину t стороны пятиугольника если ширина полоски равна a



Решение:



$$AD = \varphi t$$

$$t = BD = FD = BF = AB$$

$$\text{т.е. } AF = \varphi t - t$$

$$AH = \frac{1}{2} AF = \frac{\varphi - 1}{2} t$$

$a = BH$ - найдем по т. Пифагора:

$$a^2 + \left(\frac{\varphi - 1}{2} t\right)^2 = t^2$$

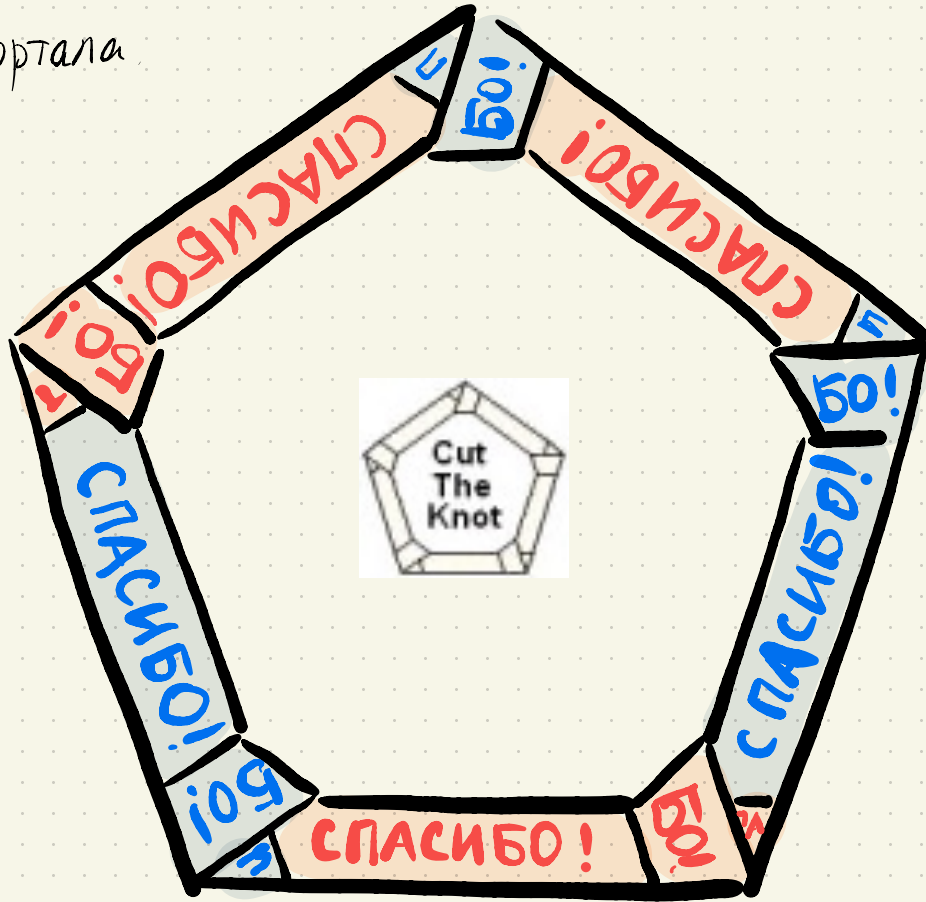
$$a^2 = t^2 \left(1 - \frac{(\varphi - 1)^2}{4}\right) = t^2 \left(1 - \frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2}{4}\right) = t^2 \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = t^2 \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right) = t^2 \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

$$t^2 = a^2 \frac{8}{5+\sqrt{5}} = a^2 \frac{8(5-\sqrt{5})}{25-5} = a^2 \frac{8(5-\sqrt{5})}{20} = a^2 \cdot \frac{2}{5} (5-\sqrt{5})$$

Ответ:
 $t = a \sqrt{\frac{2}{5} (5-\sqrt{5})}$



Эмблема портала
cut-the-knot



- Геометрические задачи
(и не только геометрические)
- Решения
- Анимации