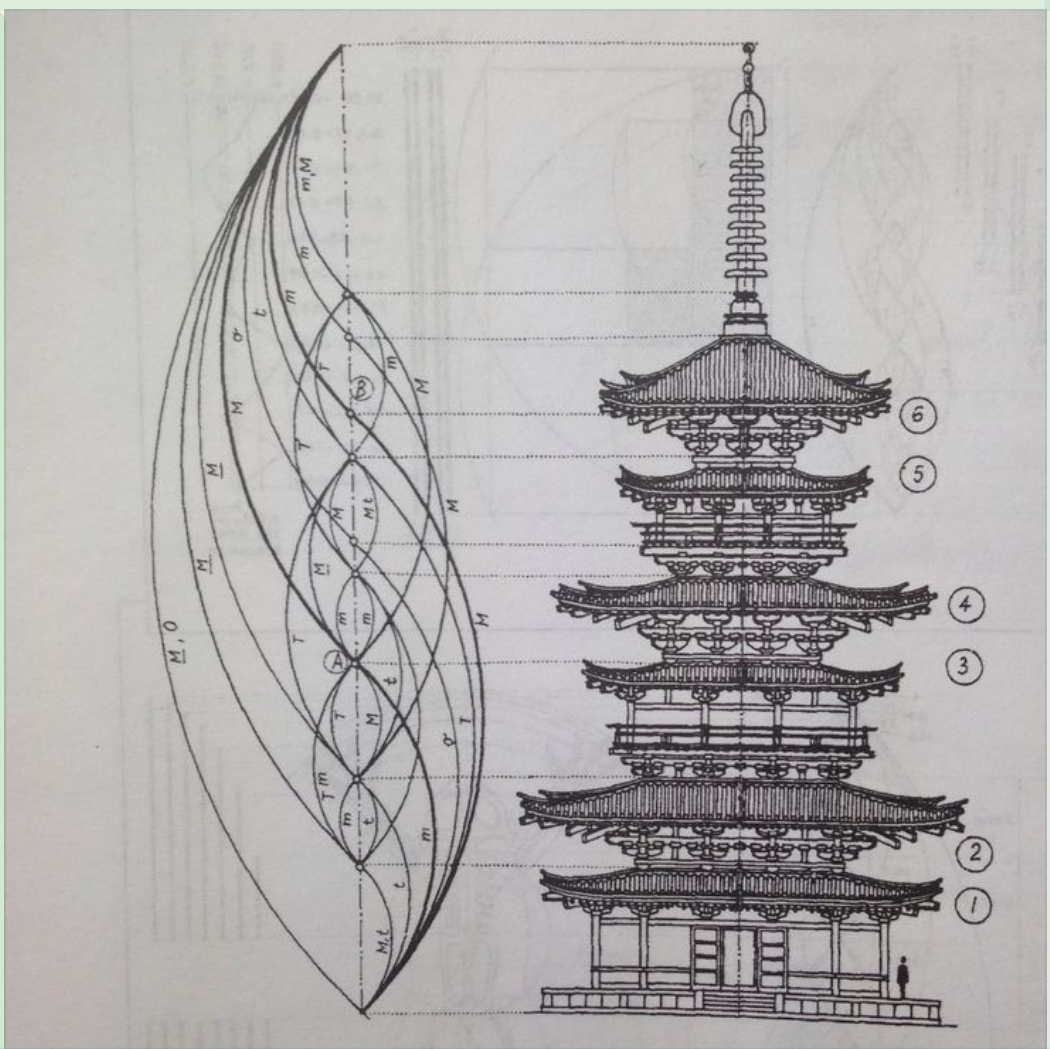


Серебряное сечение

(Японская пропорция)



Пагода храма Yakushiji в Наге, 730.



Задача (1 в. до н.э.)

китайская разминка

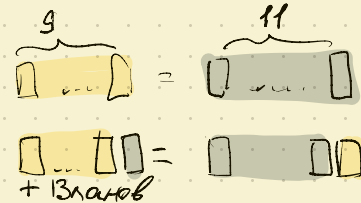
Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра.

Их взвесили, вес как раз совпал

Переложили слиток золота и слиток серебра.

Золото стало легче серебра на 13 ланов.

Найдите вес одного слитка золота и одного слитка серебра.



Решение:

Пусть V = вес 9 слитков золота

g = вес слитка золота

s = вес слитка серебра

$$9g = 11s$$

$$g\left(s + \frac{13}{2}\right) = 11s$$

$$\frac{13 \cdot g}{2} = 2s$$

$$s = \frac{13 \cdot g}{4} = \frac{117}{4} = 29,25 \text{ ланов}$$

$$g = \frac{13 \cdot 11}{4} = \frac{143}{4} = 35,75 \text{ ланов}$$

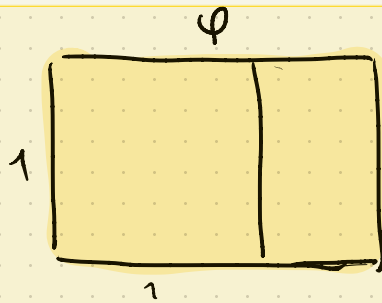
Тогда: $V - g + s + 13 = V - s + g$

$$2(g - s) = 13$$

$$g = s + \frac{13}{2}$$

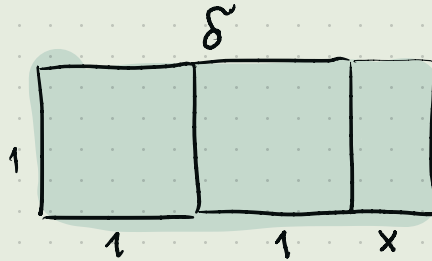
Золотое сечение

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi-1}$$

Серебряное сечение:



$$\frac{\delta}{1} = \frac{1}{\delta-2}$$

1 Найдите серебряное сечение

Решение:

$$\delta(\delta-2) = 1$$

$$\delta^2 - 2\delta + 1 = 2$$

$$(\delta-1)^2 = 2$$

$$\delta-1 = \pm\sqrt{2}$$

$$\delta = 1 \pm \sqrt{2} \quad \delta > 0 \Rightarrow$$

Ответ:

$$\delta = 1 + \sqrt{2}$$

$$= 2.414$$



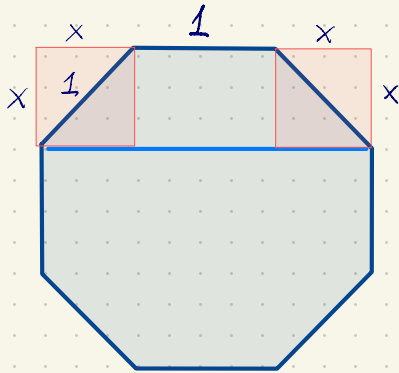
„Отянувшаяся красавица“



Hishikawa Moronobu
17 век (1618–1694)

2 В правильном восьмиугольнике со стороной 1 найдите длину диагонали, параллельной стороне.

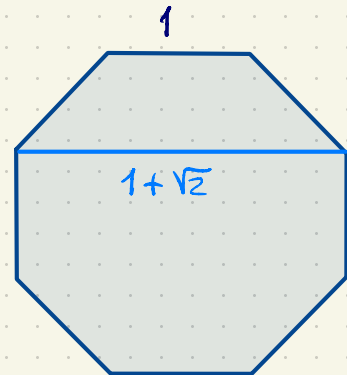
Решение:



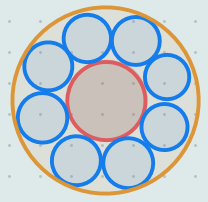
$$2x^2 = 1$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d = 1 + 2x =$$
$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} =$$
$$= 1 + \sqrt{2}$$

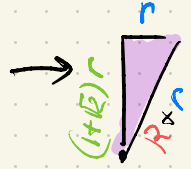
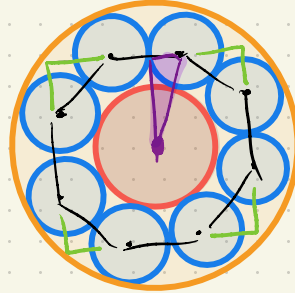
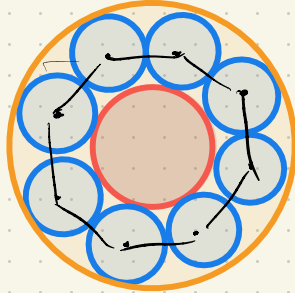
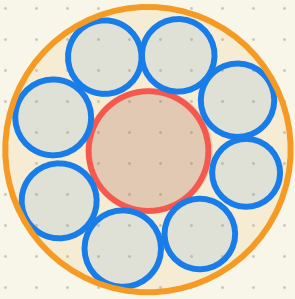
Ответ:



3. Дано: r . Найдите R и R .

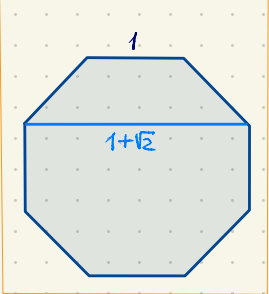


Решение:



Восьмиугольник со стороной $2r$

Квадрат со стороной $(1+\sqrt{2}) \cdot 2r$



$$\rightarrow r^2 + (1+\sqrt{2})^2 r^2 = (R+r)^2$$

$$r^2 (2+2\sqrt{2}+2) = (R+r)^2$$

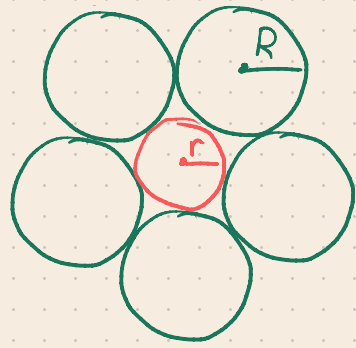
$$R = (\sqrt{4+2\sqrt{2}} - 1) r$$

$$R = R + 2r = (\sqrt{4+2\sqrt{2}} + 1) r$$

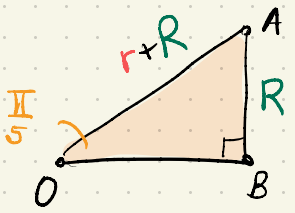
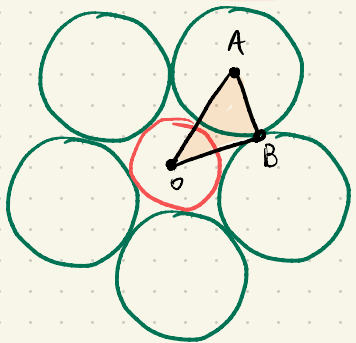
Gunma Pref. Sojido Temple, 1872.

3'

Дано r .
Используя величину s ,
найдите R .



Решение:



$$\frac{R}{r+R} = \frac{s}{1}$$

$$R = s(r+R)$$

$$R(1-s) = sr$$

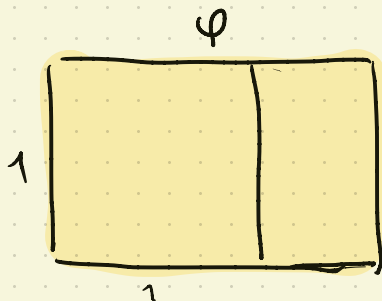
$$R = \frac{s}{1-s} r$$



$\frac{3\pi}{5}$
 $\frac{\pi}{5}$
 $\frac{\pi}{5}$
 $\frac{2\pi}{5}$
 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
 $\frac{\pi}{5}$
 $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$
 φ

Золотое сечение

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi-1}$$

$$\varphi = 1 + \varphi - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\varphi-1}} = 1 + \frac{1}{\varphi} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} =$$

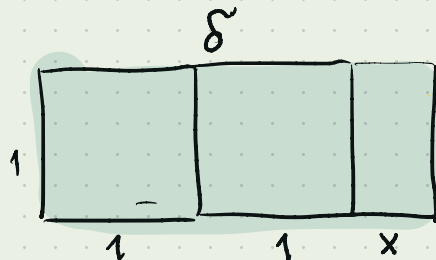
= ...

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

Серебряное сечение:

$$\delta = 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{\delta}{1} = \frac{1}{\delta-2}$$



4. Найдите непрерывную дробь для серебряного сечения

Решение:

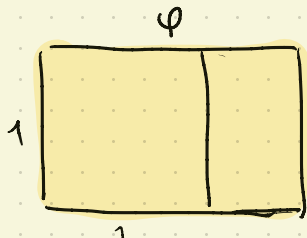
$$\delta = 2 + \delta - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\delta-2}} = 2 + \frac{1}{\delta} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\delta}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\delta}}} = \dots = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$= [2; 2, 2, 2, \dots]$$

Золотое сечение

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi-1}$$

φ приближается отношением чисел Фибоначчи!

$$F_0 = F_1 = 1 \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$\varphi \approx \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{при больших } n$$

Действительно,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

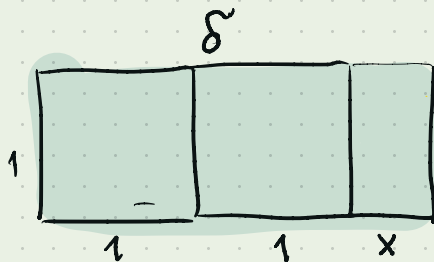
$$\begin{aligned} \downarrow & \quad \downarrow \\ x &= \frac{1}{x} + 1 \\ x^2 &= 1 + x \end{aligned}$$

то же уравнение, что определяет φ →

Серебряное сечение:

$$\delta = 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{\delta}{1} = \frac{1}{\delta-2}$$



5. Угадайте последовательность, связанную с серебряным сечением.

Решение:

$$D_0 = D_1 = 1 \quad D_{n+1} = D_n + 2D_{n-1}$$

$$1, 1, 3, 7, 17, 41, \dots$$

— числа Пелля

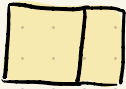
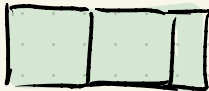
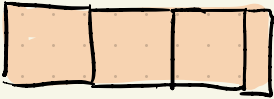

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{D_n + 2D_{n-1}}{D_n} = 1 + 2 \frac{D_{n-1}}{D_n}$$

$$x = \frac{1}{x} + 2$$

$$x^2 = 1 + 2x$$

$$x(x-2) = 1$$

Металлические сечения:

| | | | | |
|---|---|--------------|-------------------------------------|----------------------|
| 0 | | | $\frac{0+\sqrt{4}}{2} = 1$ | |
| 1 |  | золотое | $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61\dots$ | $= [1; 1, \dots]$ |
| 2 |  | серебряное | $\frac{2+\sqrt{8}}{2} = 2.41\dots$ | $= [2; 2, 2, \dots]$ |
| 3 |  | бронзовое | $\frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.30\dots$ | $= [3; 3, 3, \dots]$ |
| | | нет названия | | |
| n |  | | $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ | $= [n; n, n, \dots]$ |

