Трёхмерные задачи

Три пути ведут к знанию:
путь размышления – самый благородный
путь подражания – самый легкий
и путь опыта – самый горький.

Конфуций

У Даоцзи „Портрет Конфуция" 685-758.

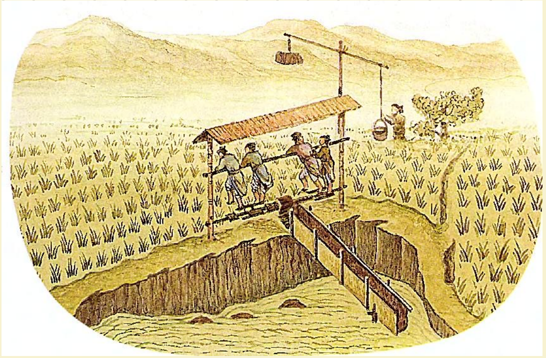
Из 3 снопов хорошего урожая,
2 снопов среднего
и 1 снопа плохого

мера объема

получили 39 доу зерна

Из 2 снопов хорошего урожая,
3 снопов среднего
и 1 снопа плохого
получили 34 доу зерна

Из 1 снопа хорошего урожая,
2 снопов среднего
и 3 снопов плохого
получили 26 доу зерна



$$3a + 2b + 1c = 39$$
$$2a + 3b + 1c = 34$$
$$1a + 2b + 3c = 26$$
$$a, b, c = ?$$

Сколько зерна получится из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая?

$$3a + 2b + 1c = 39$$
$$2a + 3b + 1c = 34$$
$$1a + 2b + 3c = 26$$
$$a, b, c = ?$$

Решение:

«вычтем второе из первого»

1. Из первых двух уравнений: $a = b + 5$

«вычтем третье из первого»

2. Из первого и третьего: $2a = 2c + 13$
3. Выразим b и c через a: $b = a - 5$, $c = a - \frac{13}{2}$
4. И подставим в третье уравнение:

$$a + 2(a-5) + 3\left(a - \frac{13}{2}\right) = 26$$

$$6a - 10 - \frac{39}{2} = 26$$

$$6a = 36 + \frac{39}{2}$$

$$a = 6 + \frac{39}{12} = 6 + \frac{13}{4} = 6 + 3 + \frac{1}{4} = 9\frac{1}{4}$$

$$b = a - 5 = 4\frac{1}{4}$$

$$c = a - \frac{13}{2} = a - 6 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

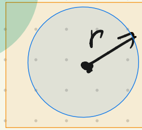
Проверка:

$$3 \cdot \left(9\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \left(4\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \left(2\frac{3}{4}\right) =$$
$$= 27 + \frac{3}{4} + 8 + \frac{2}{4} + 2 + \frac{3}{4} = 37 + \frac{8}{4} = 39$$

$$2 \cdot \left(9\frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \left(4\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \left(2\frac{3}{4}\right) =$$
$$= 18 + \frac{2}{4} + 12 + \frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{4} = 32 + \frac{8}{4} = 34$$

$$1 \cdot \left(9\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \left(4\frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \left(2\frac{3}{4}\right) =$$
$$= 9 + \frac{1}{4} + 8 + \frac{2}{4} + 6 + \frac{9}{4} = 23 + \frac{12}{4} = 26$$

Трёхмерное обобщение теоремы Декарта:



$k = \frac{1}{r}$

Т. Декарта

$$(k_1+k_2+k_3+k_4)^2 = 2(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2)$$

$$x^2+2px+q=0$$

$$2p = -(x_1+x_2)$$

$$k_0+k_4 = 2(k_1+k_2+k_3)$$

Теорема Содди:

$$(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5)^2 = 3(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2+k_5^2)$$

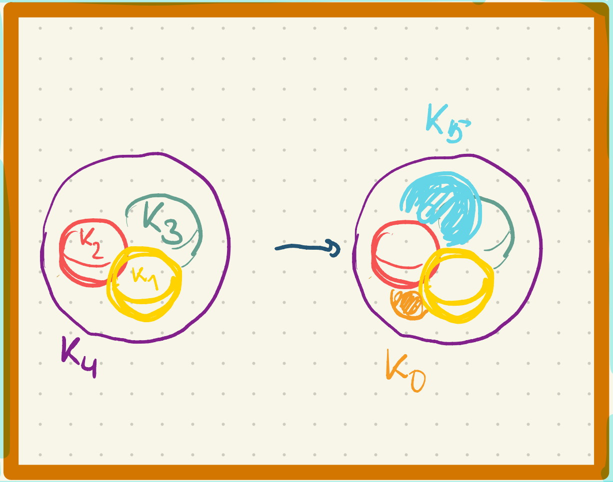
Следствие:

$$k_0+k_5 = 3(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

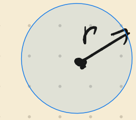
by Fredrick Soddy (Nature **137**, p.1021, 1936)

Взаимное касанье сфер
прекрасней всех земных афер,
ведь к поцелую пары пар
присовокуплен пятый шар.
Нули и знак кривизн учти
в касании шаров пяти.
Квадраты всех пяти кривизн
сложи, утрой и сверь:
квадрат от суммы всех пяти
кривизн этих сфер.



1 Касающиеся шары кривизны a и b вписаны в шар кривизны K. Между малыми шарами и большим вписана гирлянда из шести шаров кривизны $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$. Докажите, что

$$k_1+k_4=k_2+k_5=k_3+k_3$$



$k=\frac{1}{r}$

Т. Декарта

$(k_1+k_2+k_3+k_4)^2=2(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2)$

$x^2+2px+q=0$

$2p=-(x_1+x_2)$

$k_0+k_4=2(k_1+k_2+k_3)$

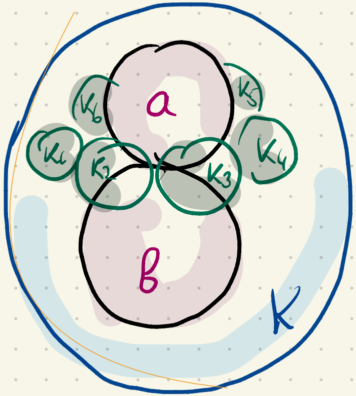
Т. Содди:

$(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5)^2=3(k_1^2+k_2^2+\dots+k_5^2)$

$k_0+k_5=3(k_1+k_2+k_3+k_4)$

Решение:

$$k_{i-1}+k_{i+1}=3(k_i+\underbrace{a+b-K}_{u})$$



Конкретно:

$k_1+k_3=3(k_2+u)$

$k_2+k_4=3(k_3+u)$

....

Вычтем:

$(k_1+k_3)-(k_2+k_4)=3(k_2-k_3)$

$k_1-k_4=\boxed{4(k_2-k_3)}$

Аналогично: $k_1-k_4=\boxed{4(k_6-k_5)}$

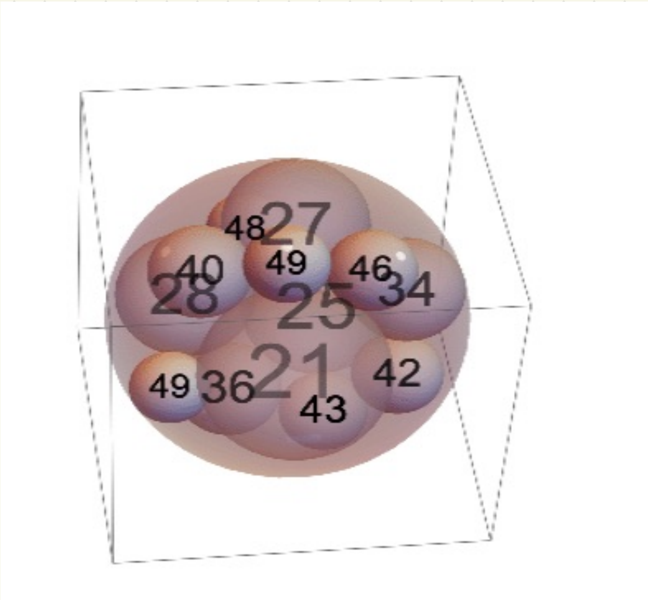
$k_2-k_3=k_6-k_5$,

т.е. $k_2+k_5=k_3+k_6$.

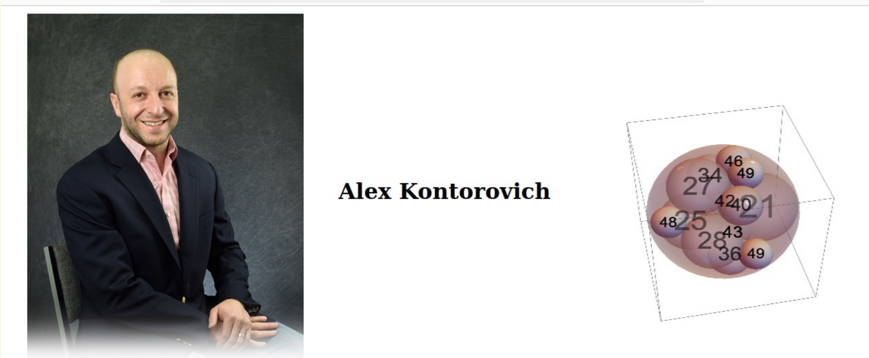
По симметрии,

$k_1+k_4=k_2+k_5=k_3+k_6$

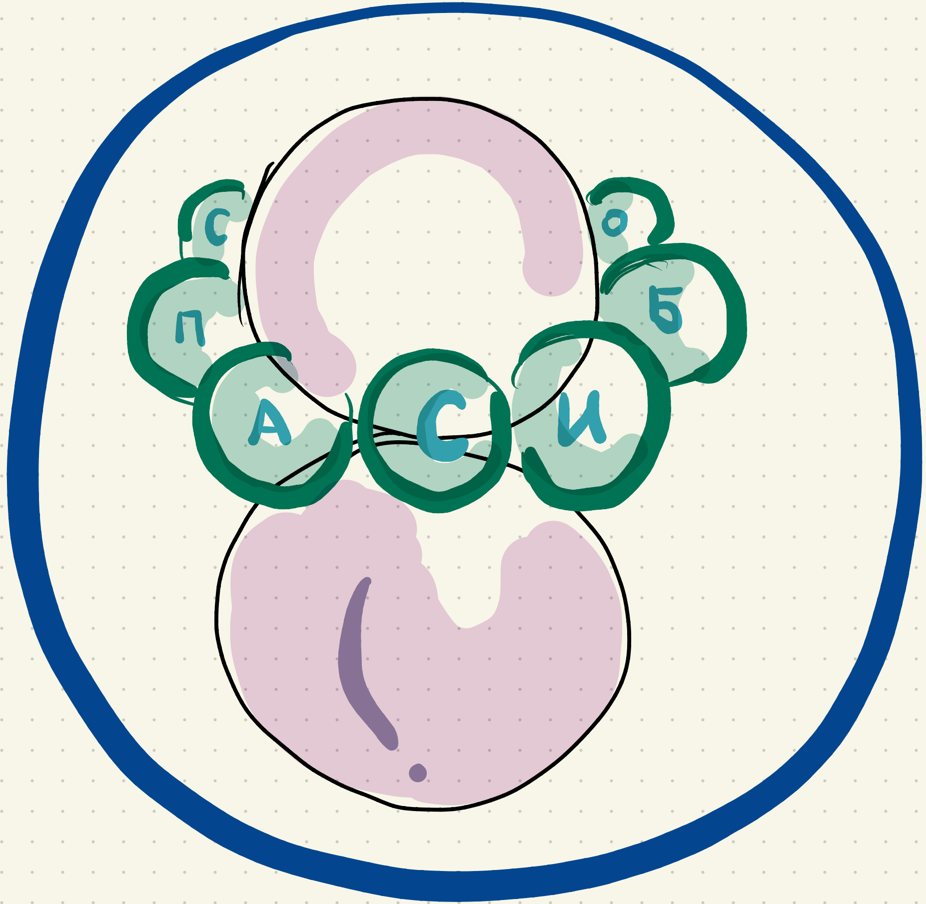
Аналогично 2-мерному случаю, можно строить 3-хмерные ковры Аполлония с целыми кривизнами



См анимацию на странице Алекса Конторовича:



https://sites.math.rutgers.edu/~alexk/index.html


спасибо