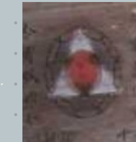
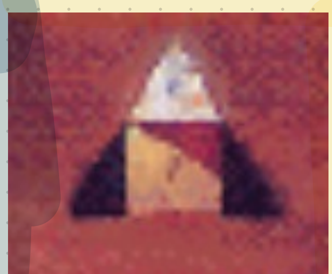
Три задачи про правильный треугольник



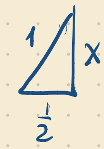


0. Китайская разминка

Решение:

a. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной 1

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Пифагор:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

в. Найдите площадь четырёхугольника и длину его короткой стороны d

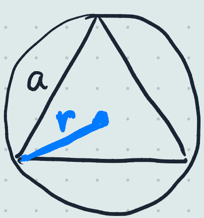
Ответ: $d = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\diamond} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$S_{\diamond} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot d = \frac{d}{2}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



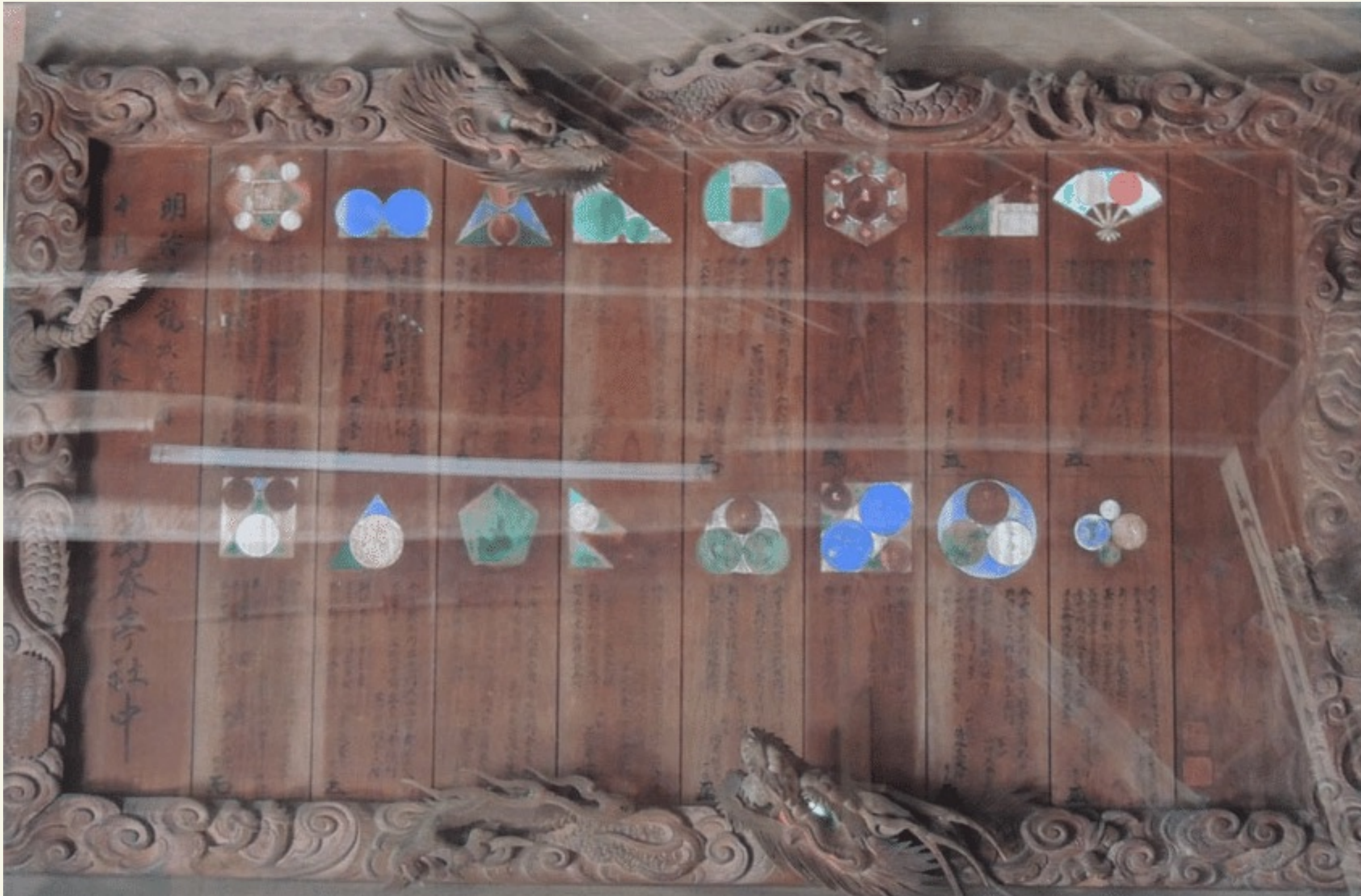
c. Найдите r, зная a

Ответ: $r = \frac{\sqrt{3}}{3} a$

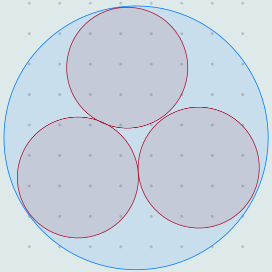
$$r = x - d$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{2}{6} \cdot \sqrt{3} a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

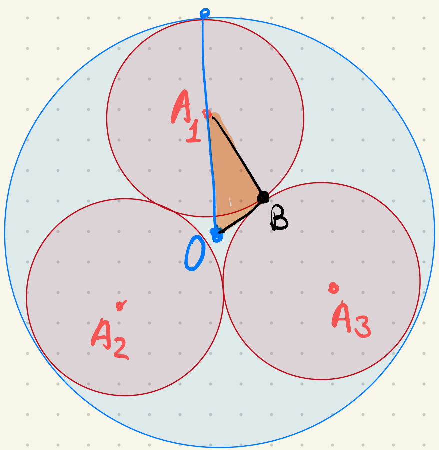


Сангаку из храма Katayamahiko, 1873 (Murahisagun Okayama)

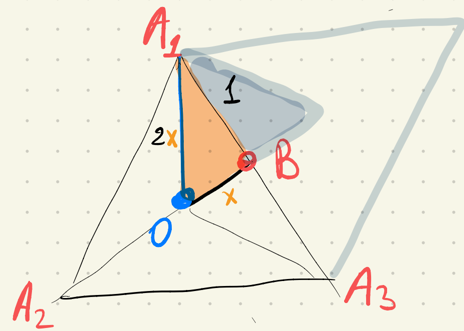


1. Радиус маленьких окружностей 1 см
Найдите радиус большой окружности

Решение:



Треугольник $A_1A_2A_3$ - равносторонний (из симметрии)



$$OA_1 = 2\,OB$$

(половина равностороннего треугольника)

Обозначим $x = OB$

По теореме Пифагора (для $\triangle OA_1B$)

$$(2x)^2 = x^2 + 1^2$$

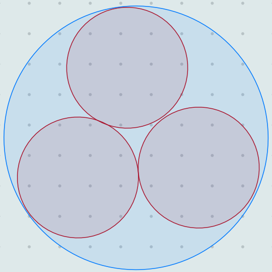
т.е

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3},$$

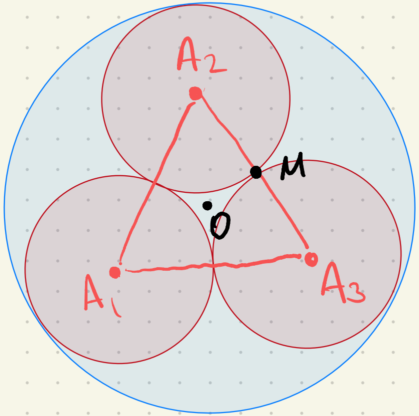
$$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

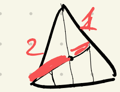
$$R = 1 + OA_1 = 1 + 2x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



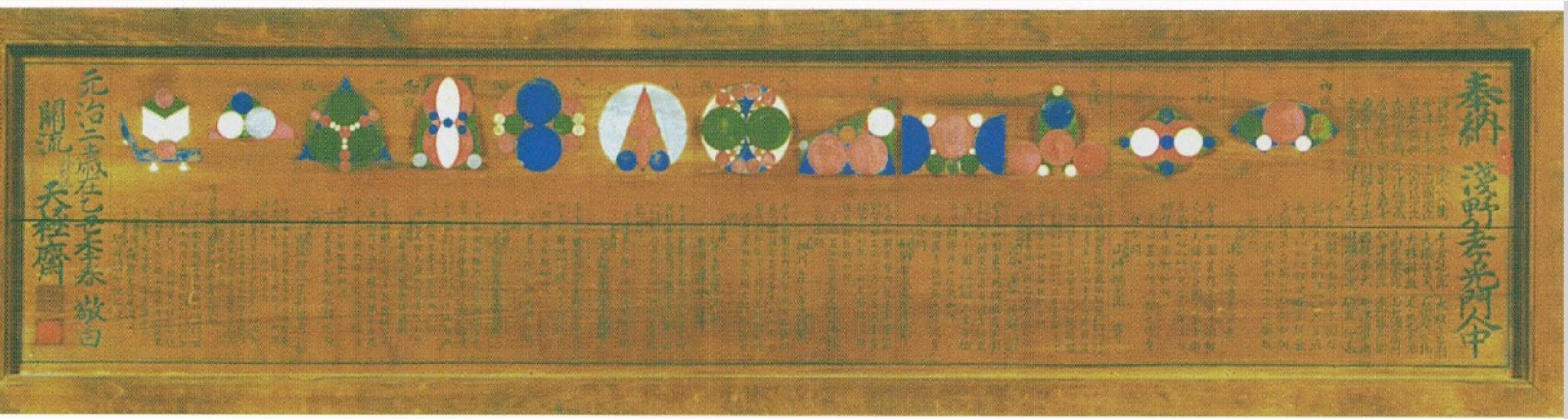
1. Радиус маленьких окружностей 1 см
Найдите радиус большой окружности

Другое решение:



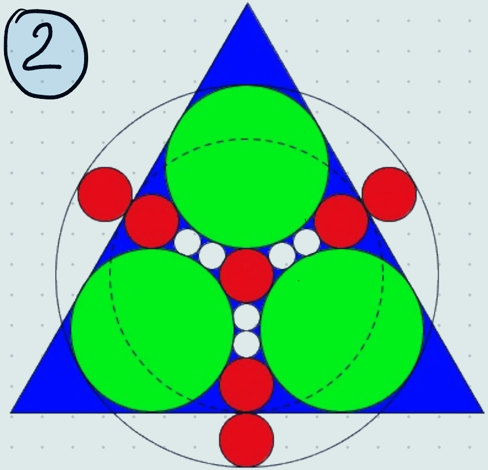
- Треугольник $A_1A_2A_3$ равносторонний, со стороной 2.
- Расстояние от его центра до стороны
  $OM = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (2·d из разминки)
- $OA_1 = 2 \cdot OM = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (медианы делят друг друга 2:1 )

- $R = 1 + OA_1 = 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}$



Сангаку из храма Meiseirinji, 1865 (Ogaki, Gifu)

2

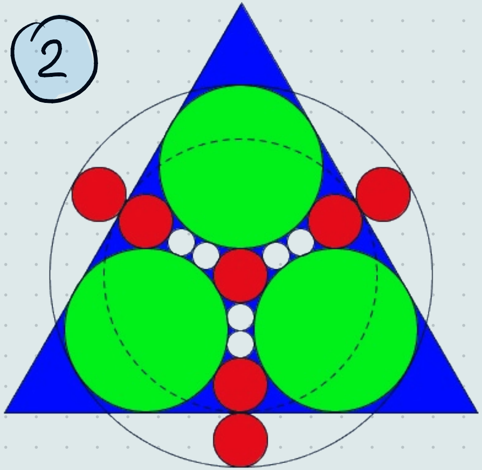


В синем равностороннем треугольнике три зеленых окружности радиуса a четыре красных окружности радуса в и шесть БЕЛЫХ окужностей радиуса c. Радиус наружной окружности R, а пунктирной – r. Найти c, как выражение от r.

Задача придумана 15-летним мальчиком

Сколько окружностей на картинке?

②



Дано: a, b, c, R, r

Найти $c(r)$.

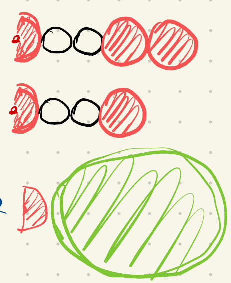
Решение:

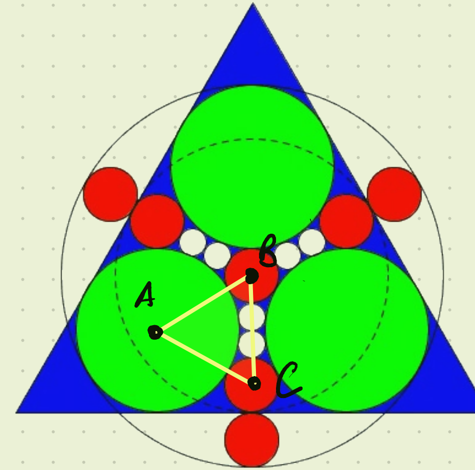
$$
\begin{cases}
(1)\ R = 5b + 4c \\
(2)\ r = 3b + 4c \\
(3)\ R = b + 2a \\
(4)\ a + b = 2b + 4c
\end{cases}
$$

$R =$

$r =$

$R =$





ABC – равносторонний

т.к $\angle ABC = 60°$,

а $\angle ACB = \angle ABC = 60°$

и $\angle BAC = 180° - 2\cdot 60° = 60°$

4: $a = b + 4c$

3: $R = b + 2a = b + 2(b + 4c) = 3b + 8c$

1: $= 5b + 4c$

$2b = 4c$, т.е $b = 2c$,

(2) $r = 3b + 4c = 3\cdot 2c + 4c = 10c$

$r = 10c$, $b = 2c$, $a = 6c$

$R = 14c$

Ответ: $c = \frac{1}{10} r$

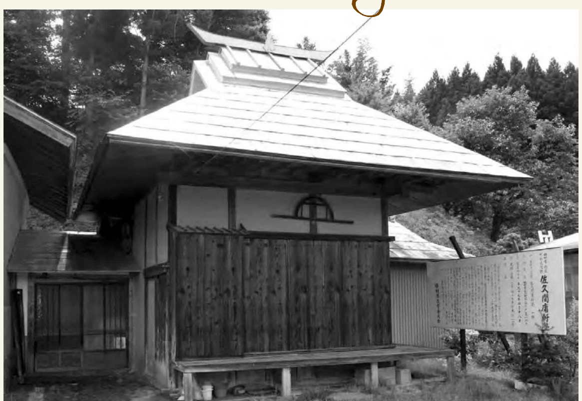
Самая большая известная табличка сангаку, 620 см × 140 см

- из храма Abe no Monjyuin (префектура Fukushima) повешена учениками Sakuma Yōken в 1877

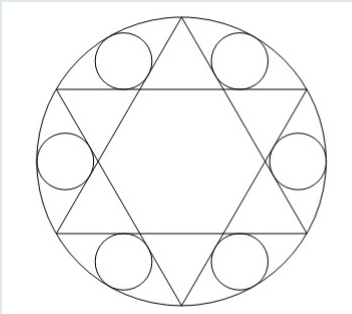
плохо сохранилась - висела на улице

математик и собиратель сангаку,

основал свою школу (и учил в ней 2144 человек на протяжении 50 лет)

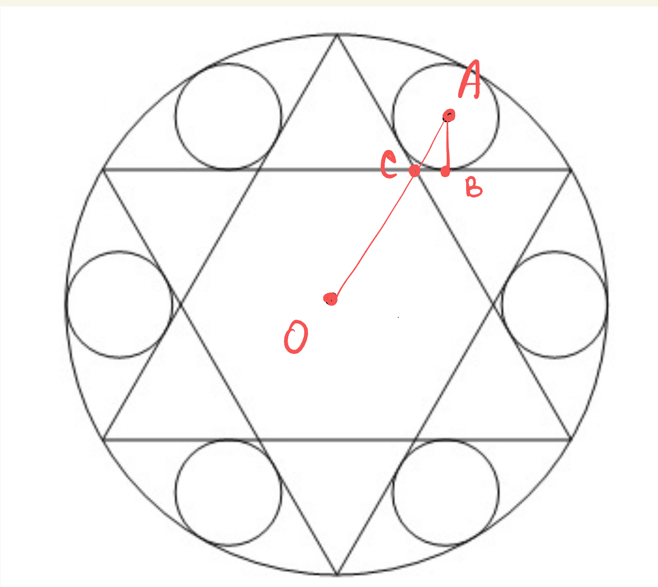


3



Стороны вписаных равносторонних треугольников равны $3a$.
Найти радиус маленьких окружностей как $r(a)$.

Решение:



Из $\triangle ABC$ →

$AB = r$ $\quad AC = 2x$ $\quad CB = x$

$x^2 + r^2 = (2x)^2$

$r^2 = 3x^2$

$x^2 = \frac{r^2}{3}$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} r$

$$R = a + 2x + r = a + \frac{2}{\sqrt{3}} r + r = a + r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

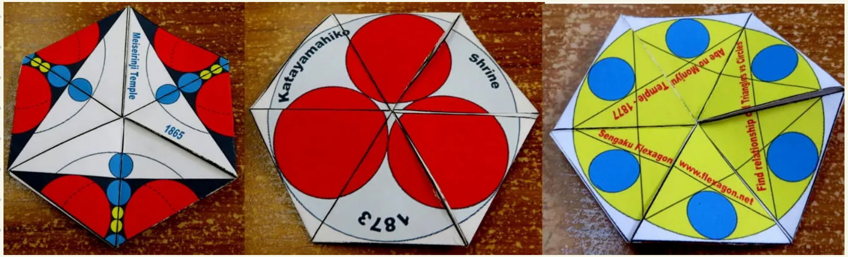
$$\boxed{R = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3a\right) = \sqrt{3}a}$$ ← Из большого треугольника

$$\sqrt{3}a = a + r\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(\sqrt{3}-1)a = r\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

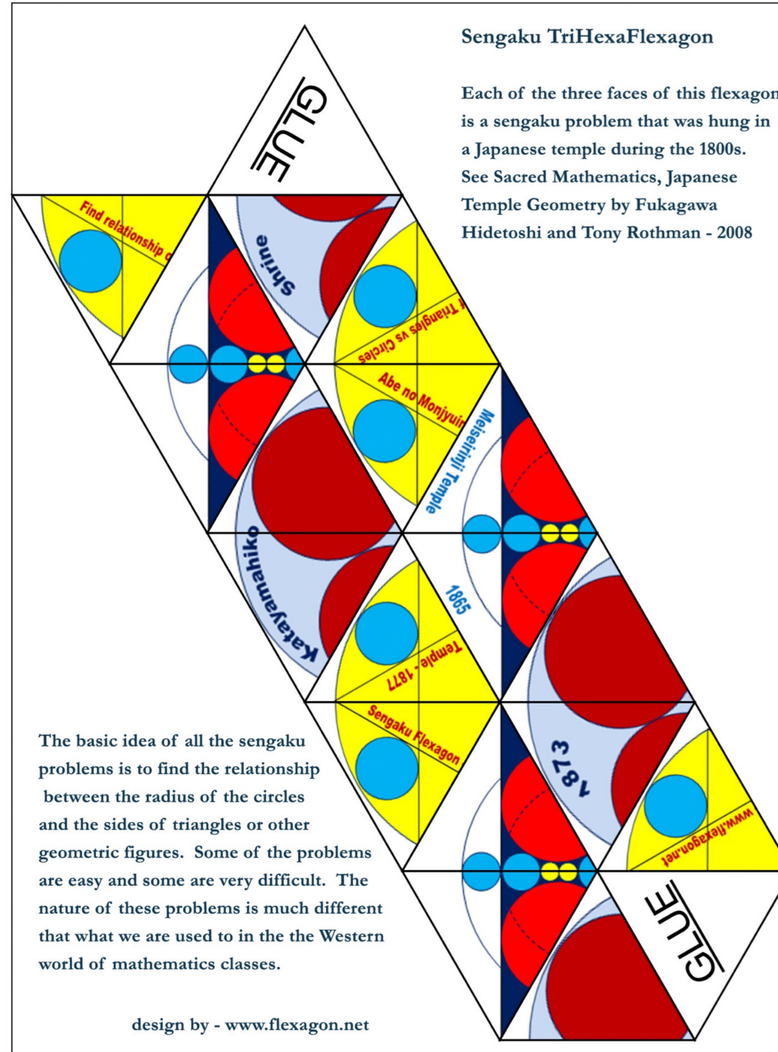
Ответ:

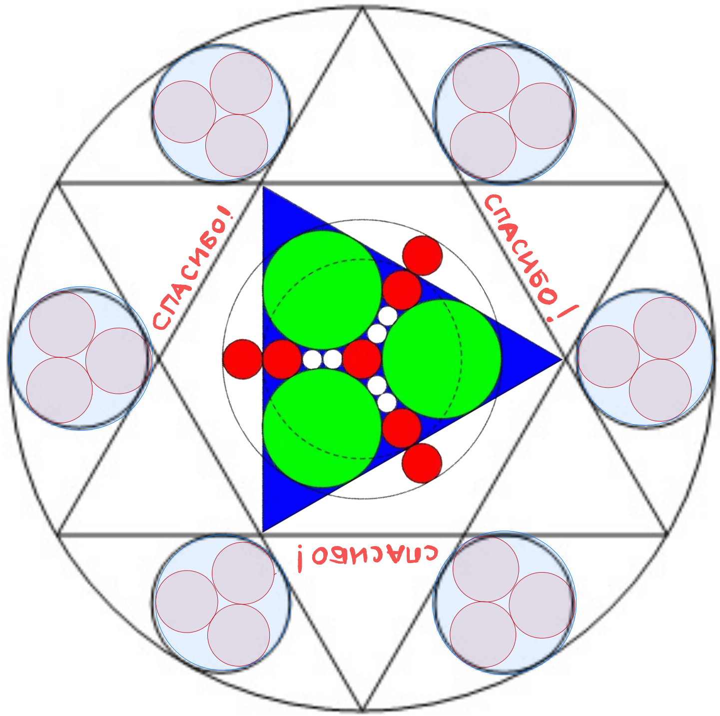
$$r = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{3}} = (9 - 5\sqrt{3})a$$



Сангаку – Флексагон

flexagon.net/flexagons/TriHexSangakuTemplate.jpg




спасибо!
спасибо!
спасибо!