10

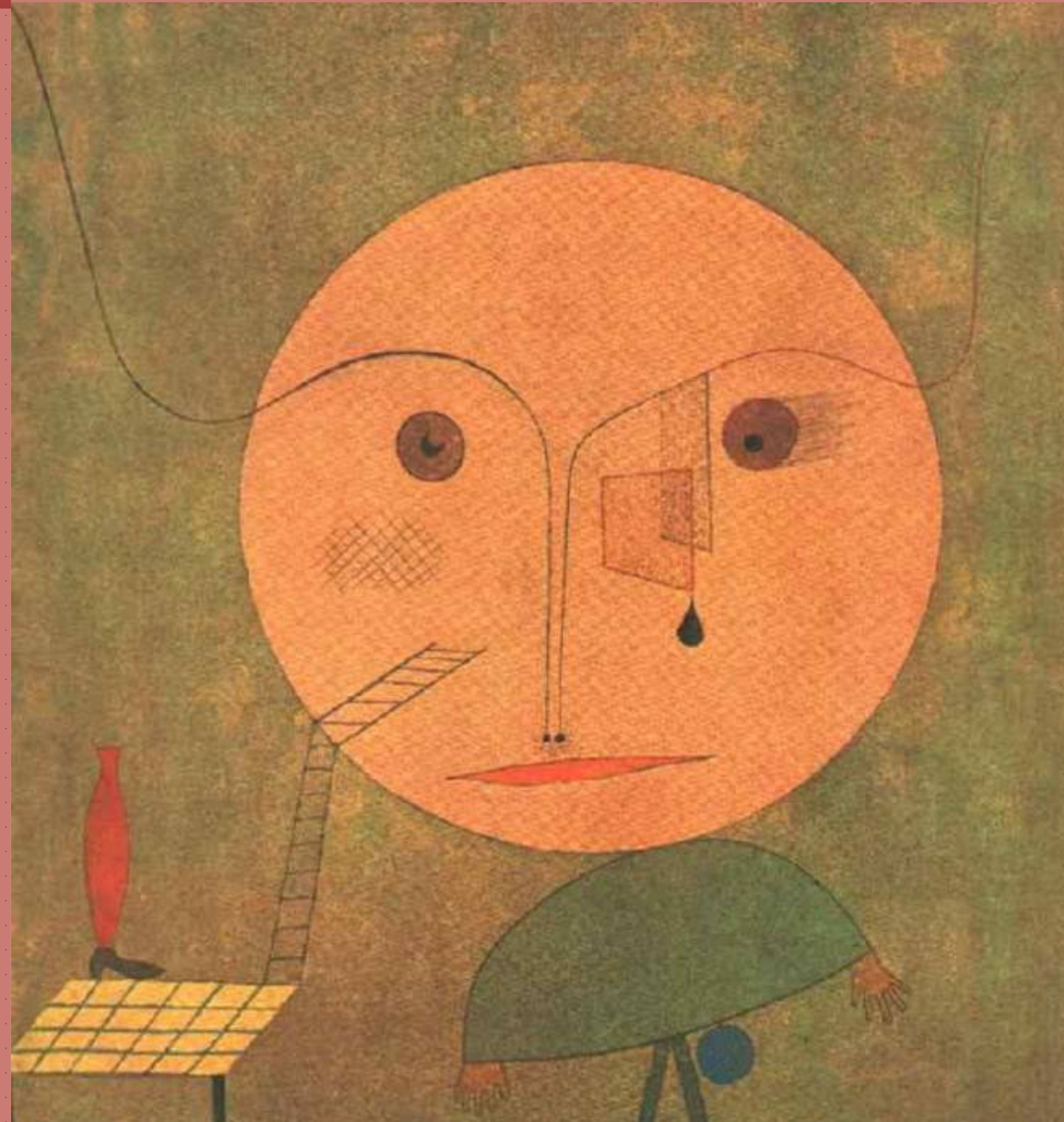
Круглые задачи

Пауль Клее

Senecio. (1922)

10

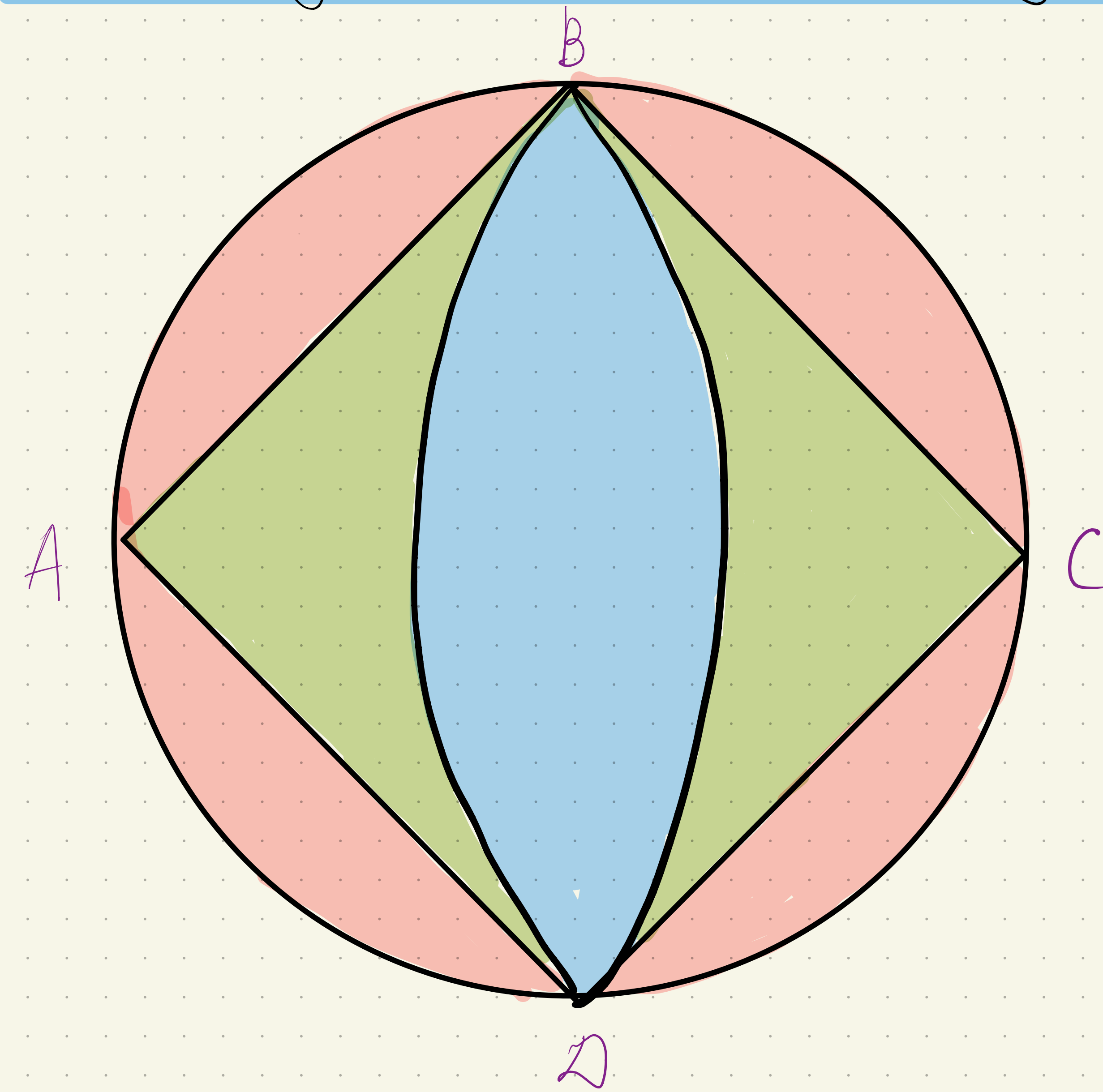
Круглые задачи



Пауль Клее
Ошибка на зелёном фоне. (1930)

Разминка: В круг радиуса 1 вписан квадрат ABCD. Через точки B и D проведены дуги окружностей с центрами A и C.

- Какая площадь больше — красная, синяя или зелёная?
- Найдите эти площади



Решение: $r = 1$, $R = \sqrt{2}$

$S = \pi r^2 = \pi$ $\qquad$ $S = \pi R^2 = 2\pi$

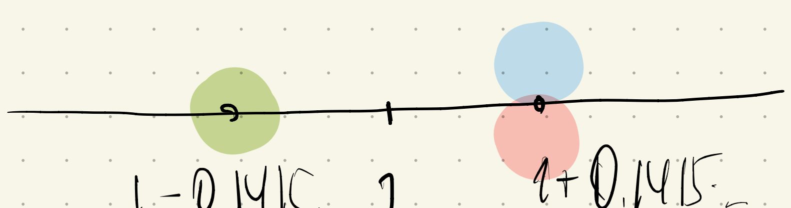
$$\boxed{S = 2 \cdot \text{сегмент}\left(\tfrac{1}{4}\right) \text{ в} = 2 \cdot 2\, \text{сегмент}\left(\tfrac{1}{4}\right) \text{ в} = S_{4 \cdot}}$$

$$S = S - S = \pi - 2 \approx 1{,}1415$$

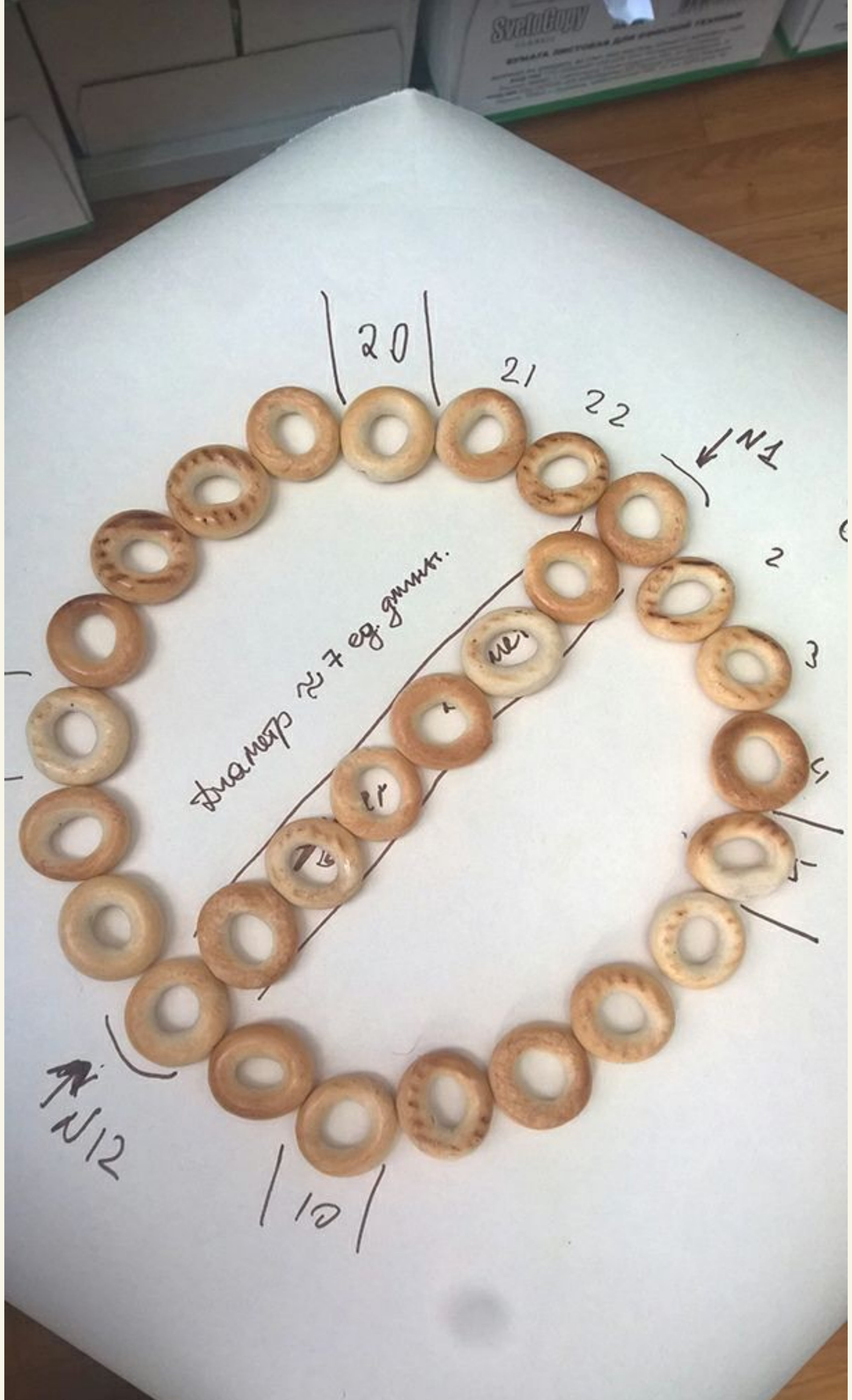
$$S = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} S - \frac{1}{2} S\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 2\pi - \frac{1}{2} \cdot 2\right) = \pi - 2 = 1{,}1415$$

$$S = S - S = 2 - (\pi - 2) = 4 - \pi = 0{,}8585$$

Ответ:



1 Что изображено на картинке?



Идея Жени Кац

1 Что изображено на картинке?

22 : 7 = 3.14285

Почему диаметр ≈ 7 единиц длины? (а не 6 и не 8)

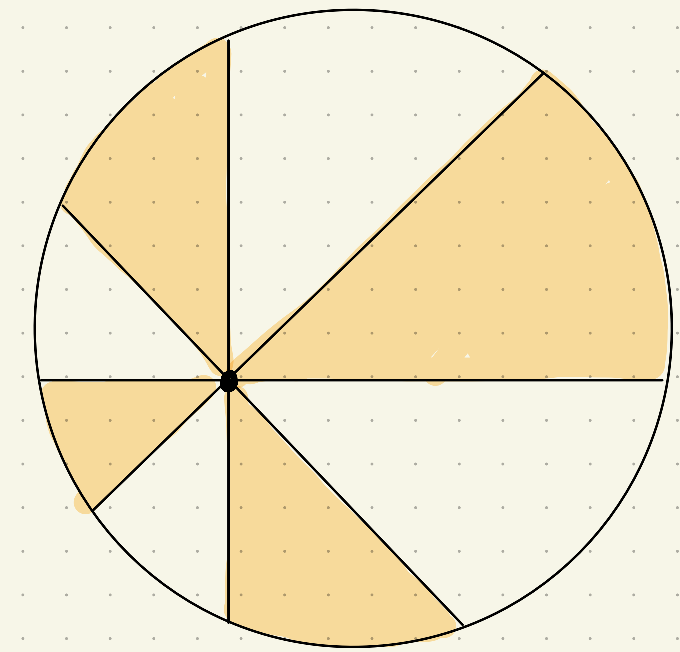
Идея Жени Кац

1 Что изображено на картинке?

МЕМ из интернета:

2. Теорема о пицце:

Если все углы равны (т.е равны $\frac{\pi}{4}$), то белая площадь равна жёлтой

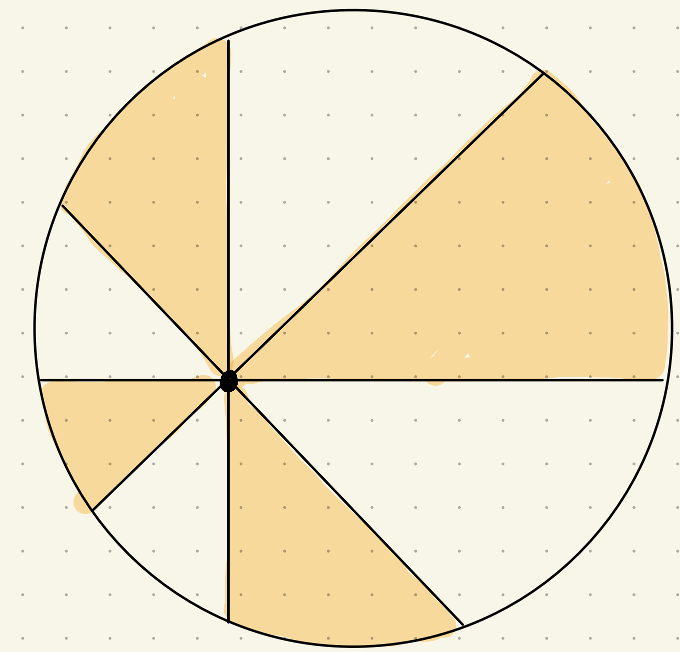


(а) Докажите хотя бы для одной точки

(в) Предположив, что один из разрезов вертикальный, докажите для какого-нибудь бесконечного семейства точек.

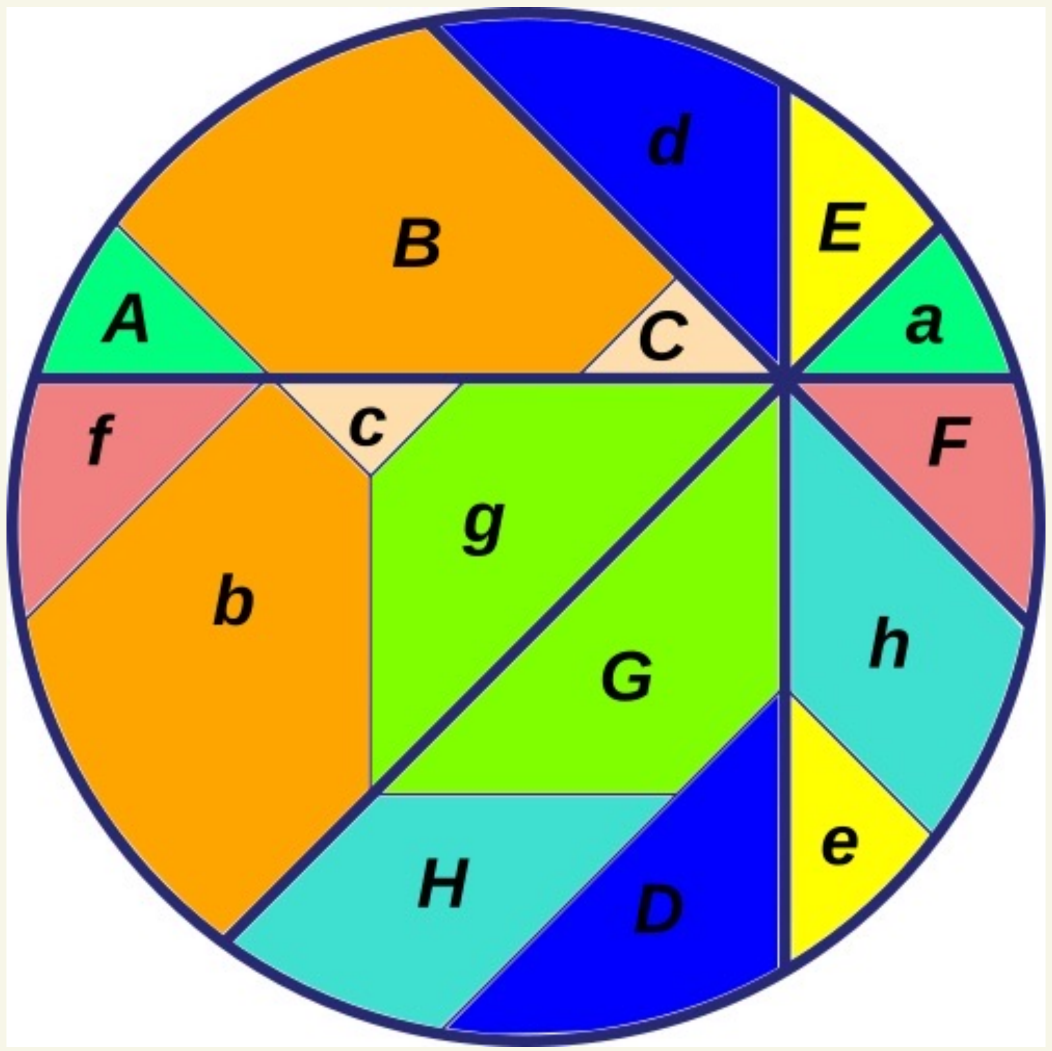
2 Теорема о пицце:

Если все углы равны (т.е. равны $\frac{\pi}{4}$), то белая площадь равна жёлтой



(a) Докажите хотя бы для одной точки

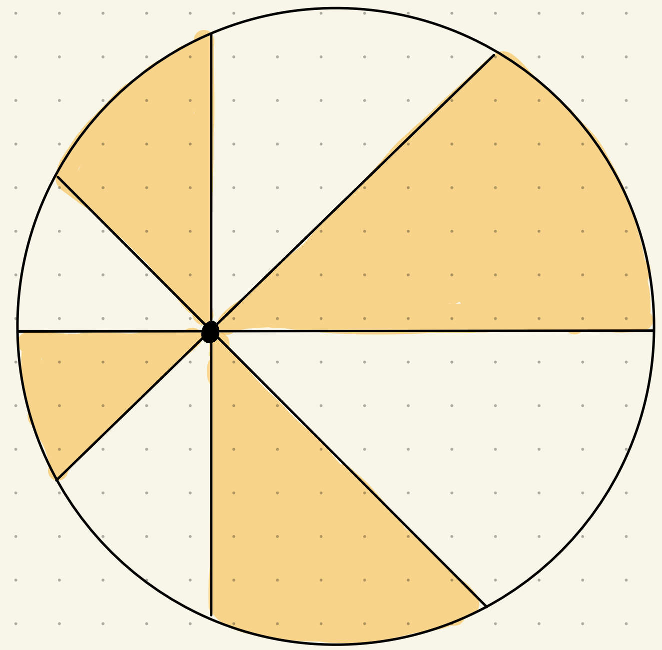
(в) Предположив, что один из разрезов вертикальный, докажите для какого-нибудь бесконечного семейства точек.



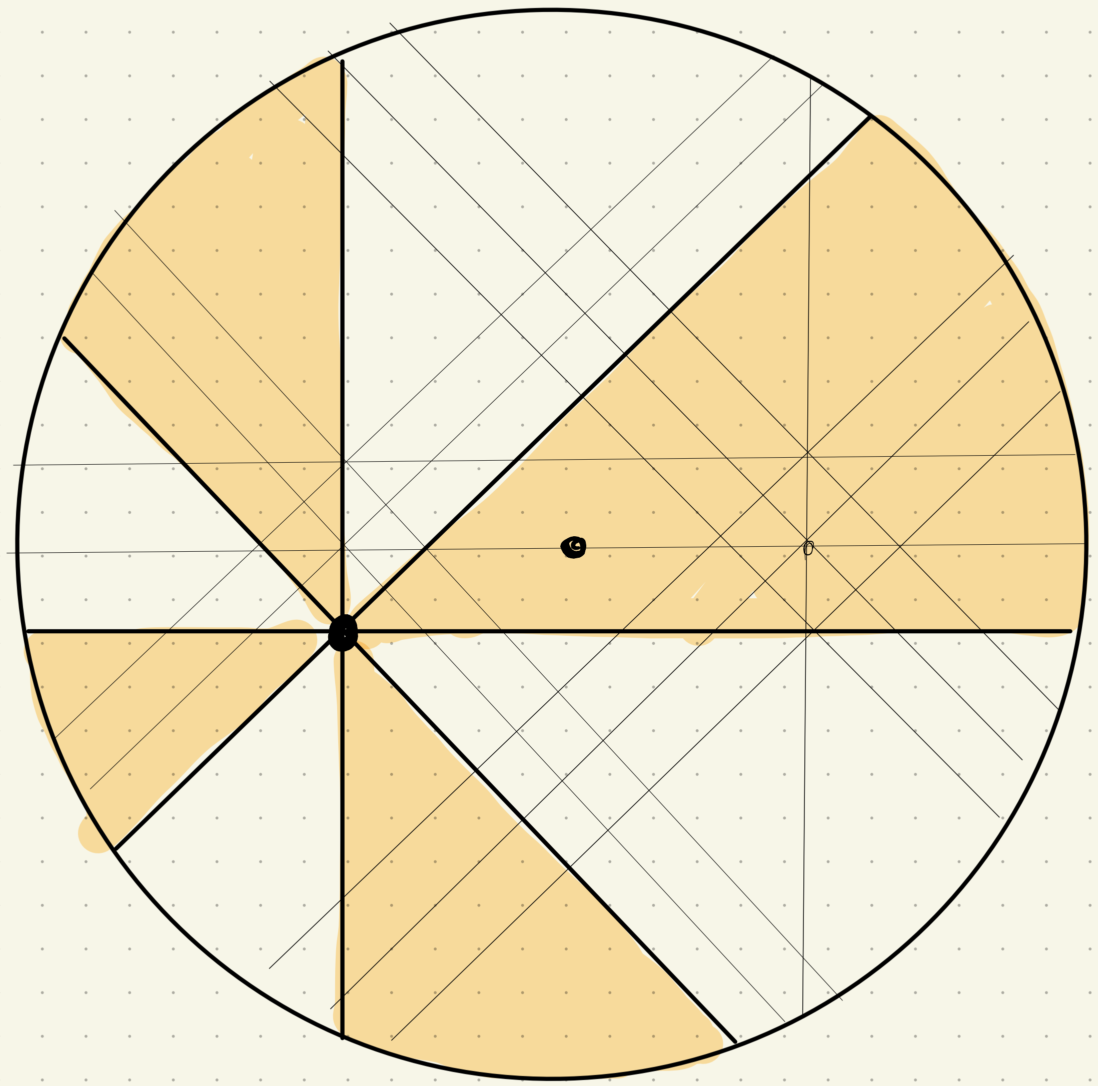
Доказательство без слов
L. Carter, S. Wagon, 1994

Решение:

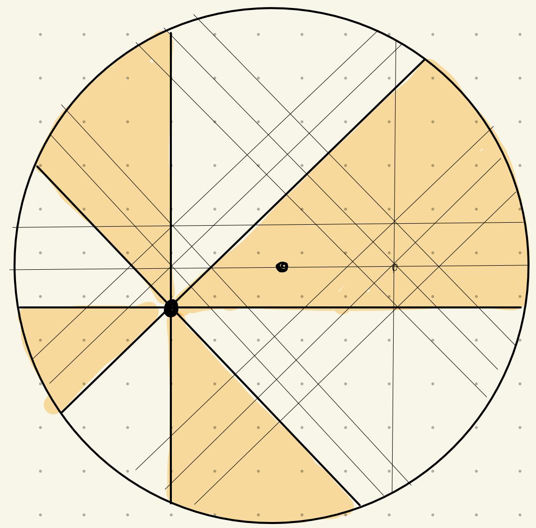
все точки на вертикальном (или горизонтальном) диаметре:



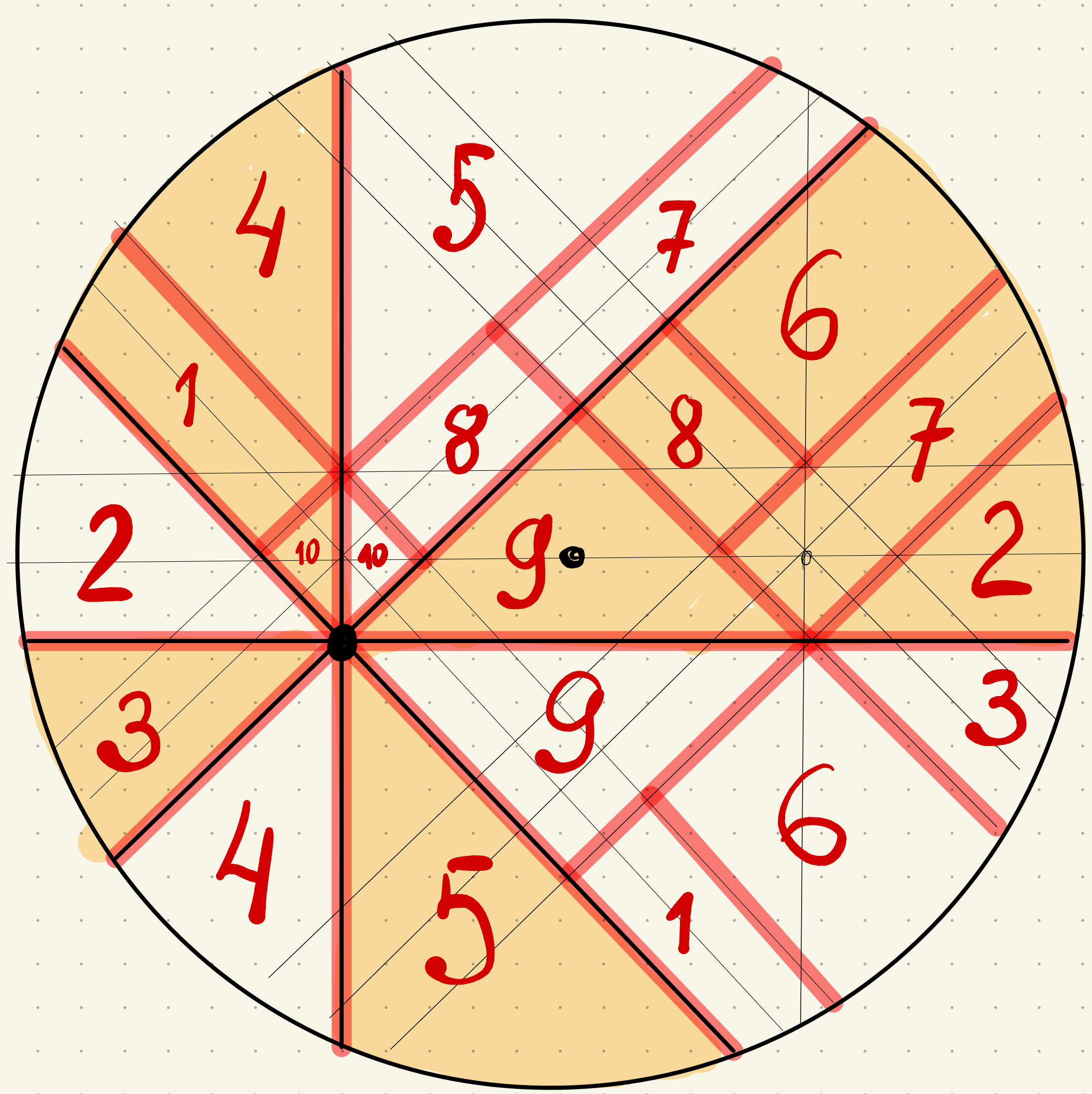
2c Воспользуйтесь симметриями картинки для доказательства теоремы:

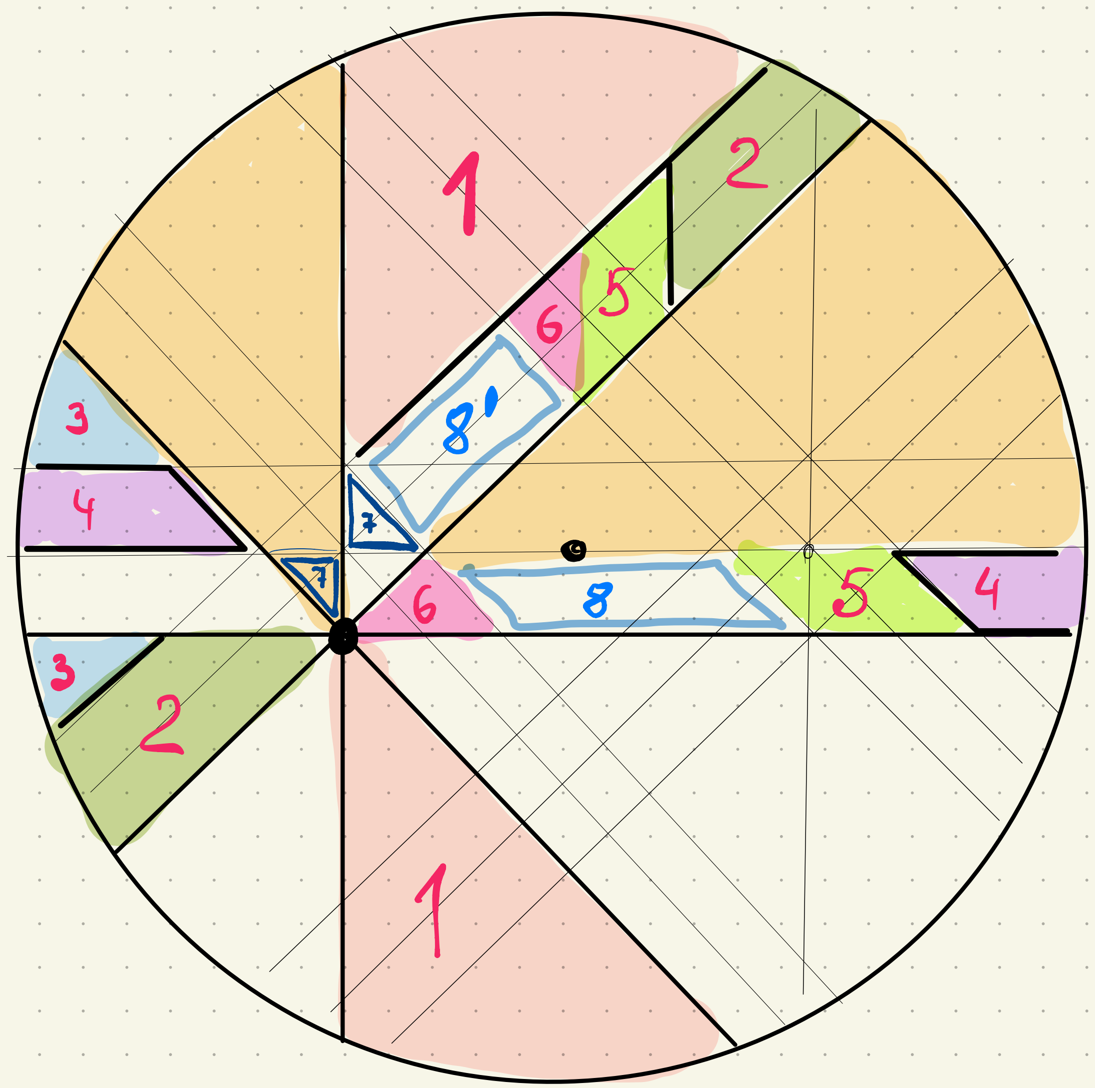


2c Воспользуйтесь симметриями картинки для доказательства теоремы:



Решение:





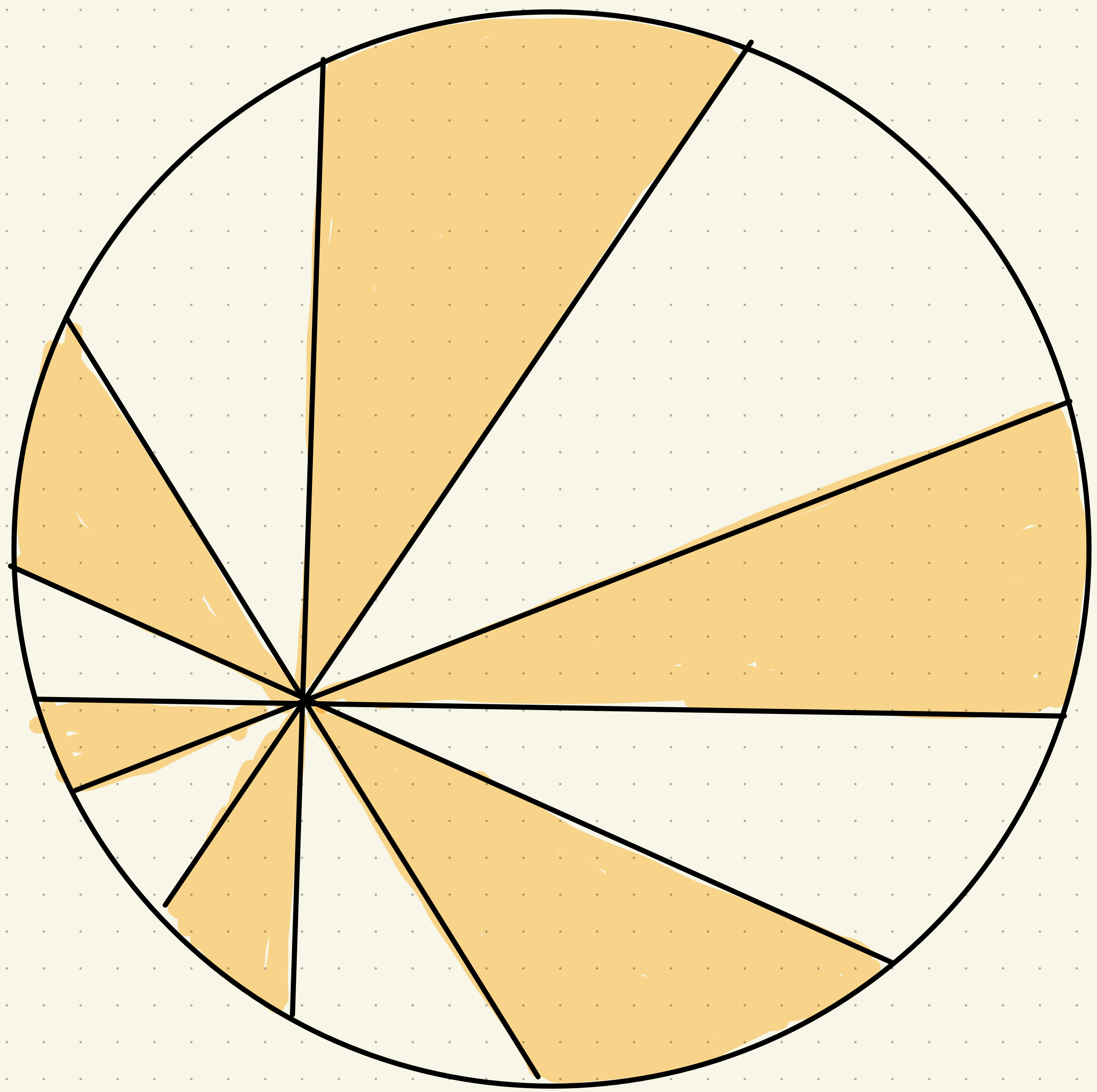
Решение, придуманное участниками на занятии: для каждой белой области есть симметричная ей желтая

Другое решение: переложим кусочки желтого так, чтобы они заполнили верхние полкруга.

Более общая версия теоремы о пицце!

Пицца разрезана прямыми на 4 n секторов, n ≥ 2 с одинаковыми углами. Тогда площади равны.

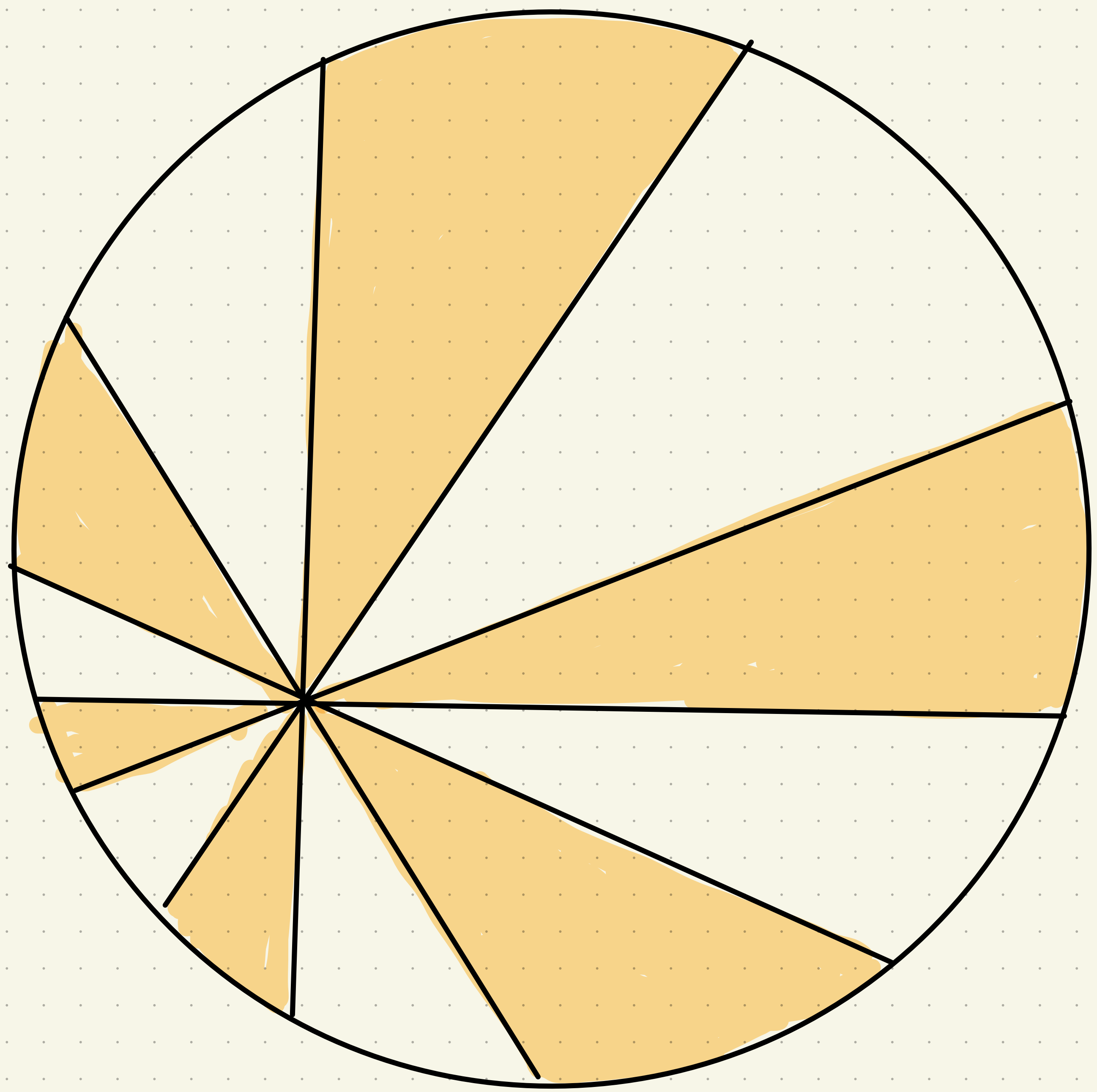
(Goldberg; Carter & Wagon; Frederickson)



3a Покажете, что существует n такое, что для 2n кусков теорема не верна.

Более общая версия теоремы о пицце:

Пицца разрезана прямыми на 4n секторов, $n \geq 2$ с одинаковыми углами. Тогда площади равны.

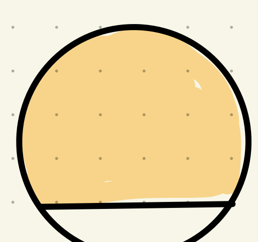


(Goldberg; Carter & Wagon; Frederickson)

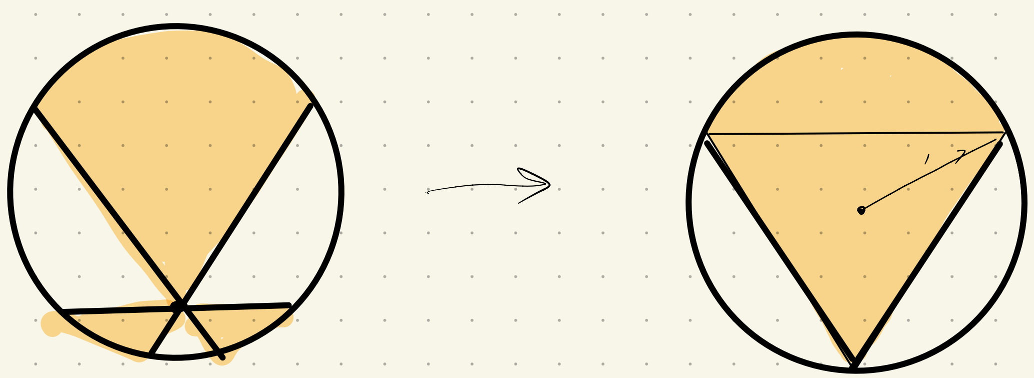
3а Покажите, что существует n такое, что для 2n кусков теорема не верна.

Решение:

n=1



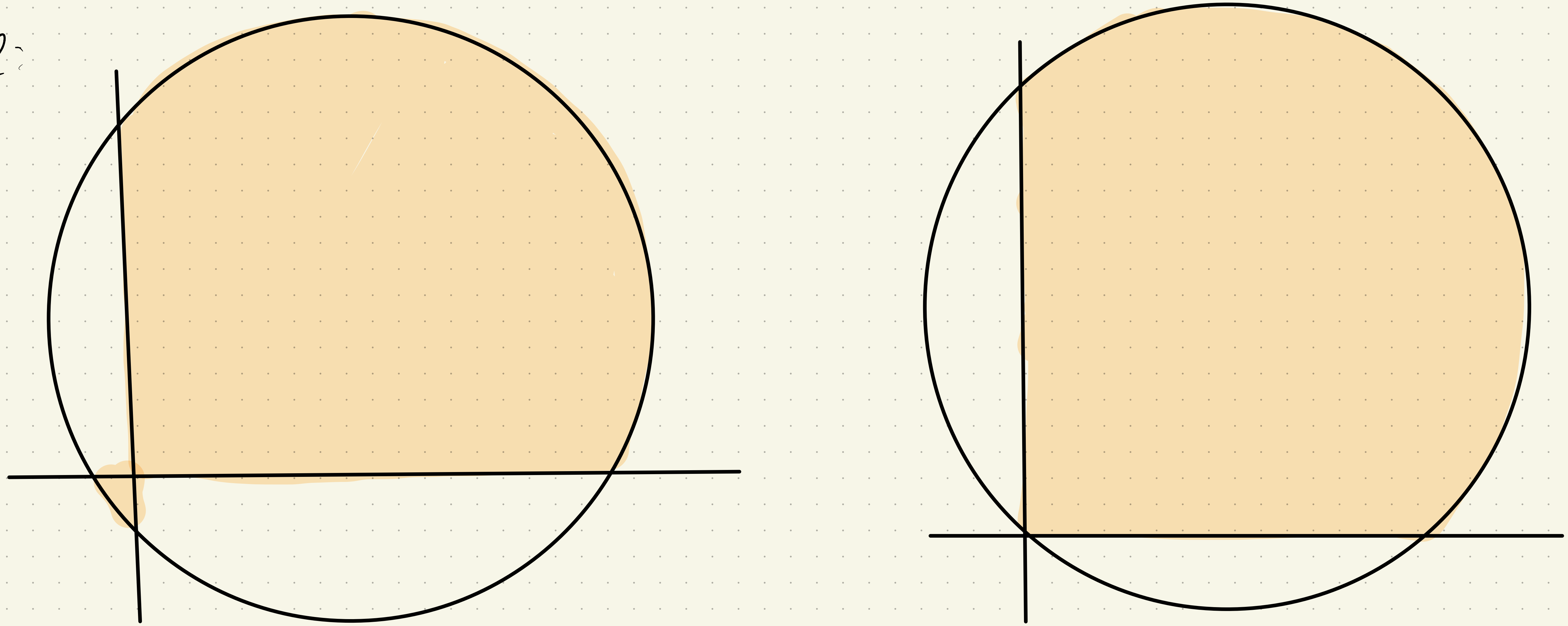
n=3



3в Верна ли теорема о пицце для 4х кусков? (т.е для $4n$, при $n=1$)

36 Верна ли теорема о пицце для 4х кусков? (т.е для 4n, при n=1)

Решение:



НЕТ!

Если радиус $R=1$, то $S_{\bigcirc} = \pi$, $S_{\square} = 2$

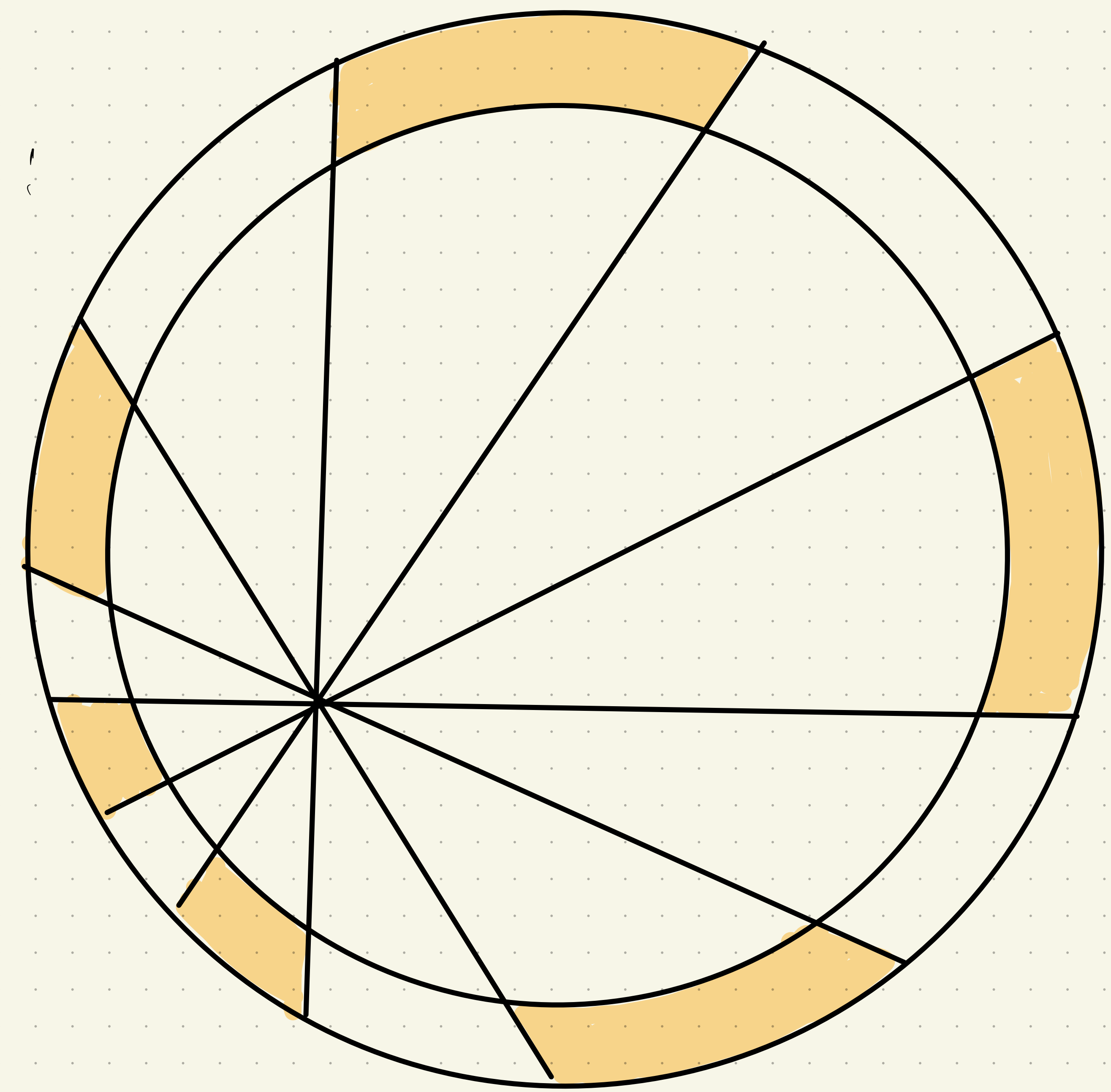
$2 \cdot S_{(} = \frac{1}{2}(S_{\bigcirc} - S_{\square}) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57$ $\qquad S_{D} = S_{\square} + 2 S_{(} = \frac{\pi}{2} + 1 \approx 2.57$

Т.е $S_{D} / 2S_{(} > 4$!

Докажите следствие

(теорему о корочке пиццы):

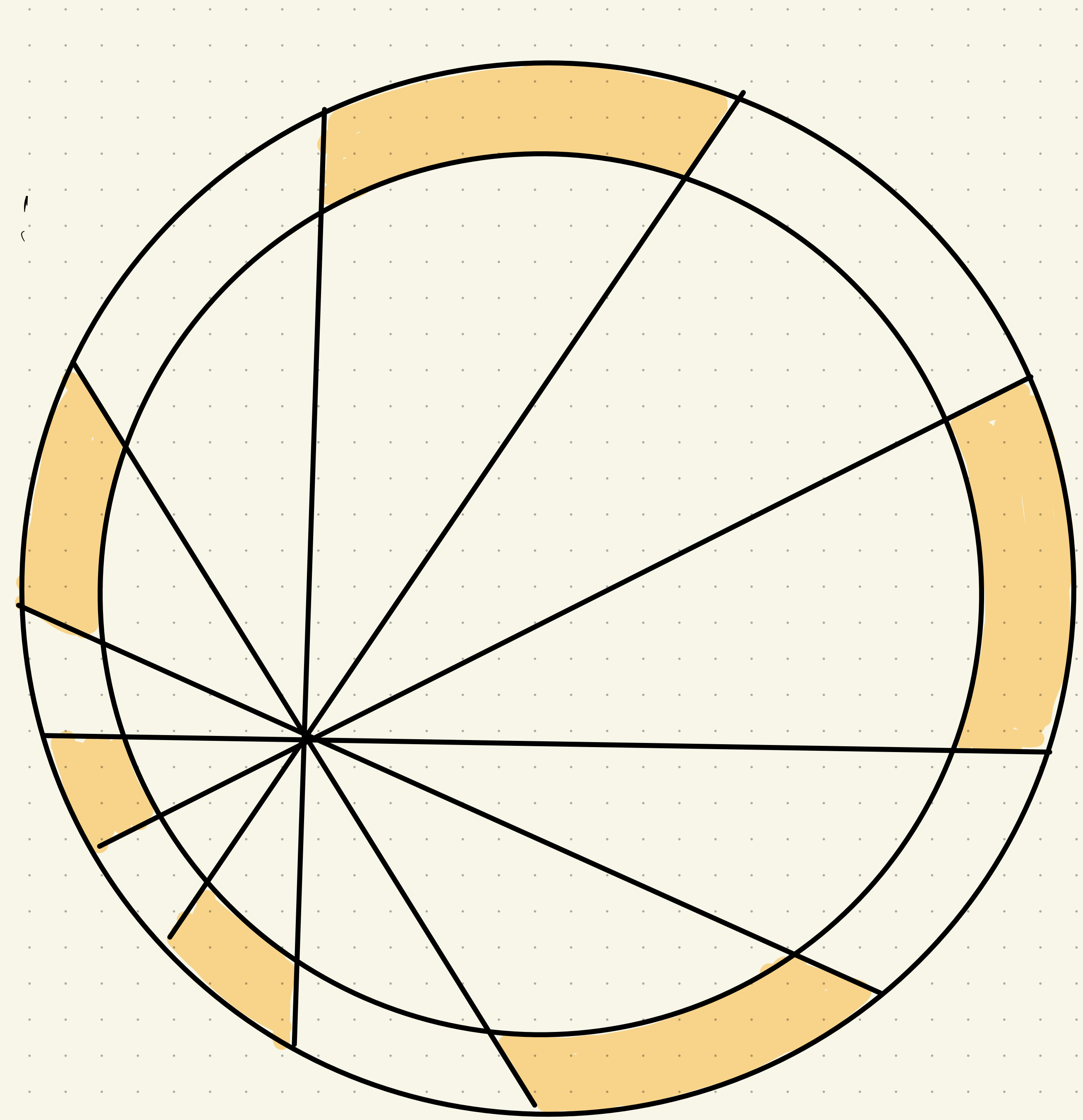
4 Площадь белых частей корочки равна площади желтых частей



Докажите следствие

(теорему о корочке пиццы):

(4) Площадь белых частей корочки равна площади желтых частей

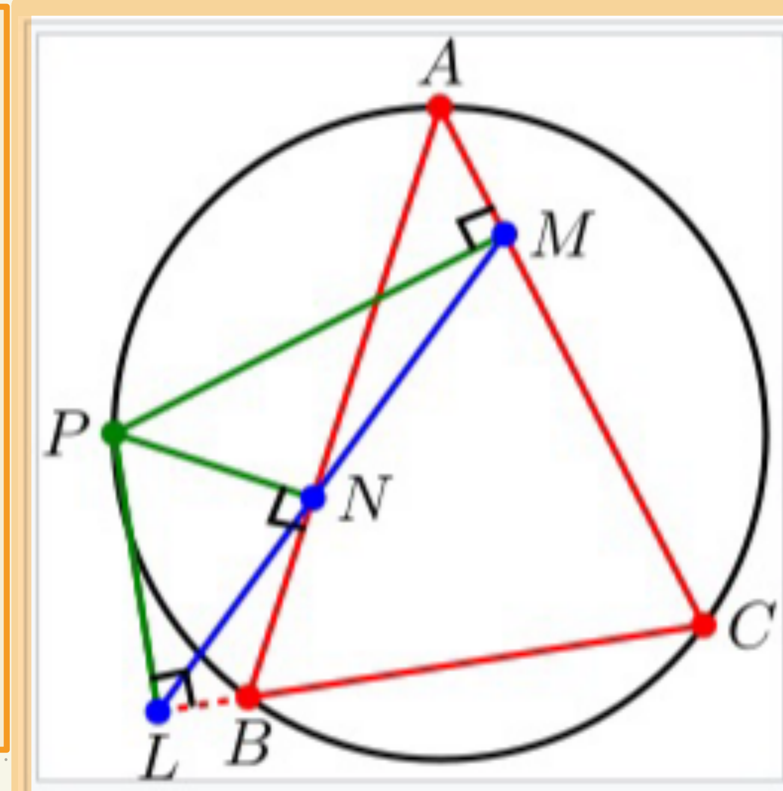


Решение:

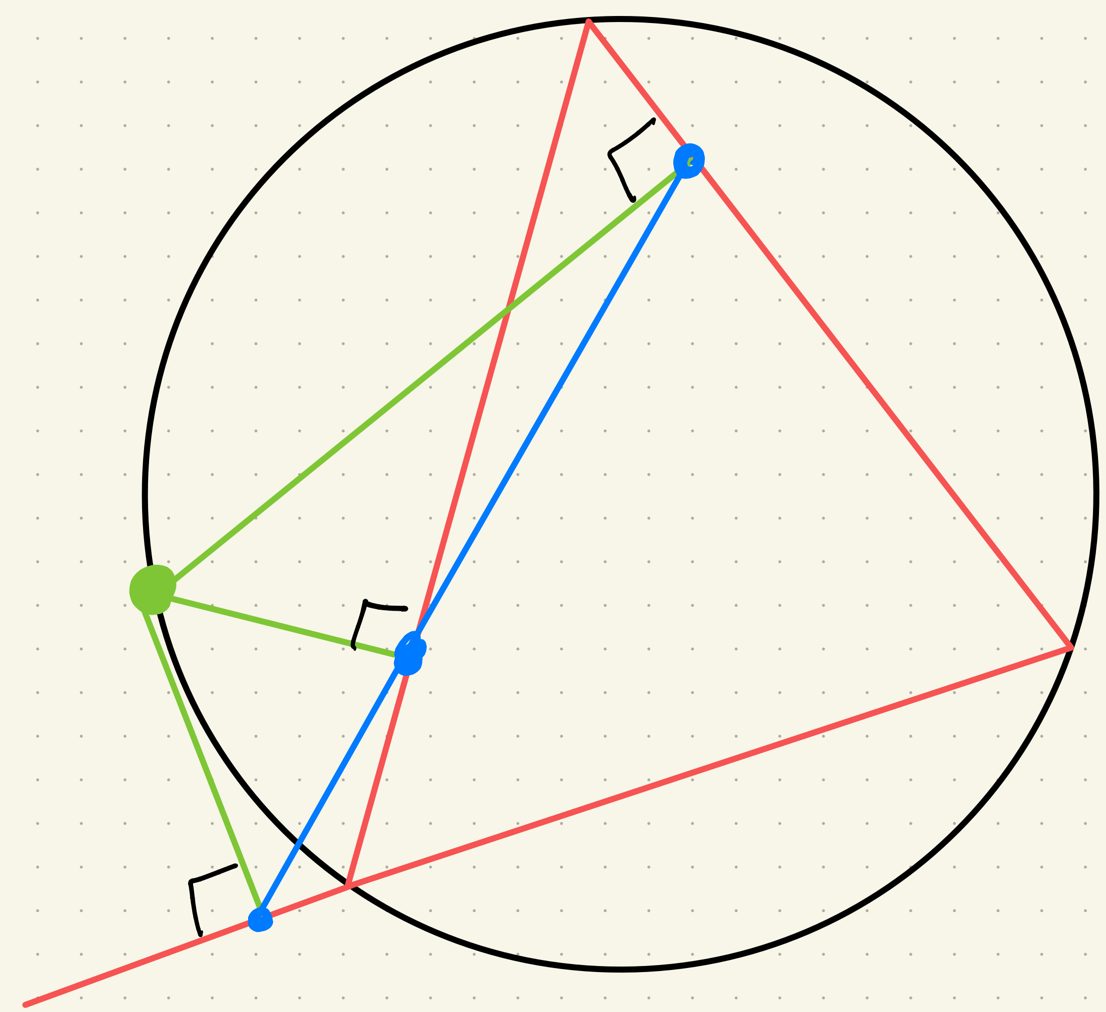
Применим теорему о пицце к внешнему и внутреннему кругам.

Площадь корочки — разность площадей кругов.

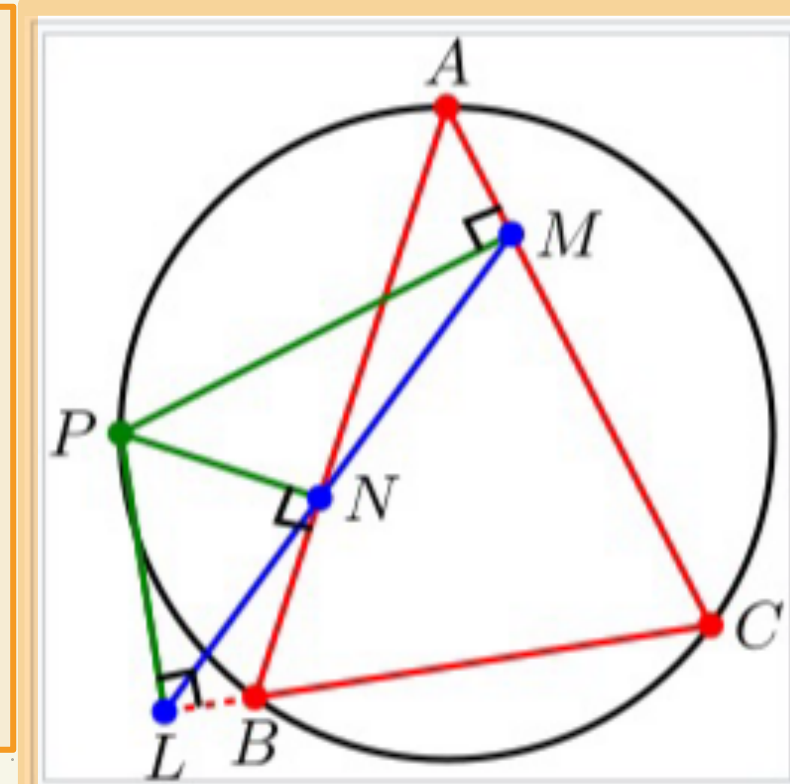
⑤ Пусть ABC – треугольник,
P – точка на его описанной окружности,
M, N, L – основания перпендикуляров,
опущенных из P на стороны ABC.
Тогда M, N, L лежат на одной прямой.



Прямая Симсона треугольника ABC



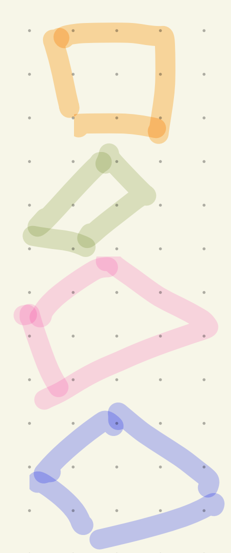
5 Пусть ABC – треугольник,
P – точка на его описанной окружности,
M, N, L – основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны ABC.
Тогда M, N, L лежат на одной прямой.



Прямая Симсона треугольника *ABC*

Решение:

- Найдите в чертеже 4 вписанных четырехугольника:
  $ABCP$, $NBLP$, $LCMP$, $AMNP$

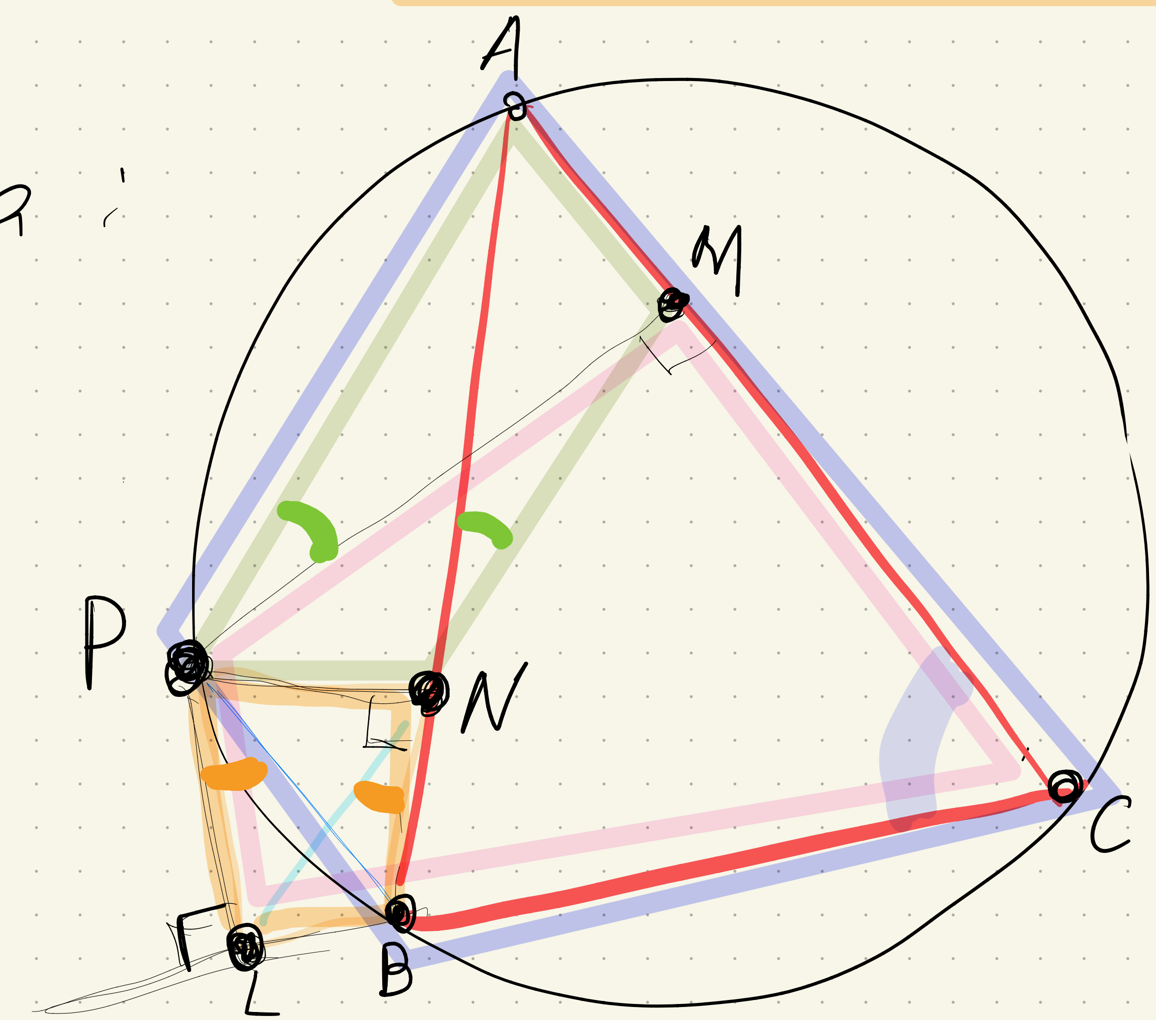


- $\angle LNB = \angle LPB$

  $\angle MNA = \angle MPA$

  $\angle BPM + \angle LPB = \pi - \angle C$

  $\angle BPM + \angle MPA = \pi - \angle C$



$\Rightarrow \angle LPB = \angle MPA \Rightarrow \angle LNB = \angle MNA \Rightarrow$ MN и NL – одна прямая


Спасибо!