

2 | Когда они равны?



Пауль Клее
«Шоюзи», 1922

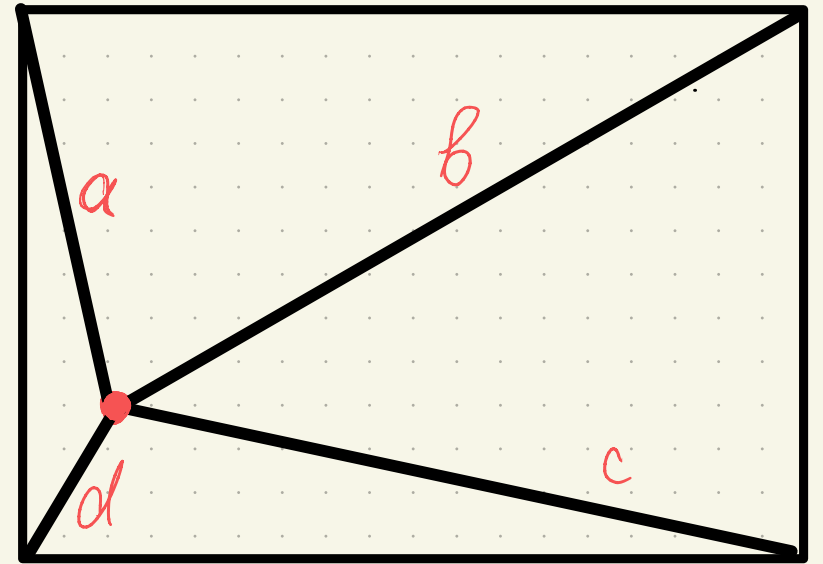
Разминка прямоугольная

Дан прямоугольник

Найдите геометрическое место точек

таких что

$$a + c = b + d$$



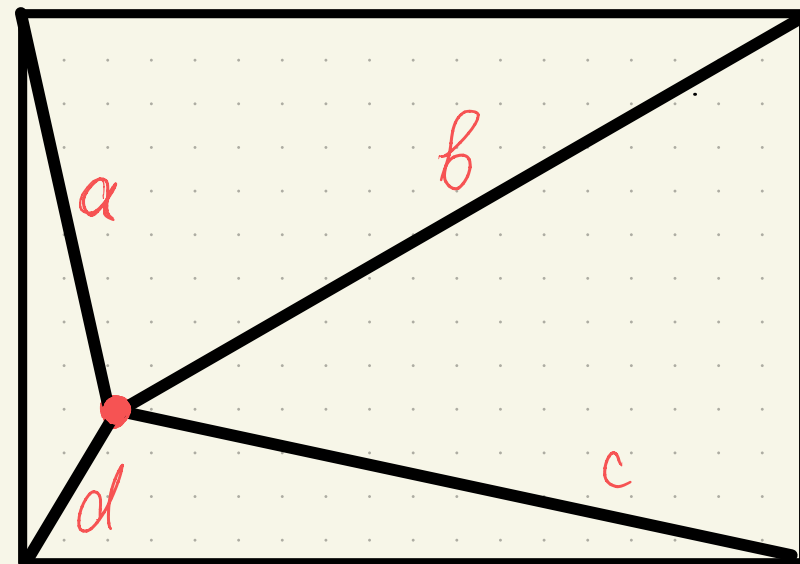
Разминка прямоугольная

Дан прямоугольник

Найдите геометрическое место точек

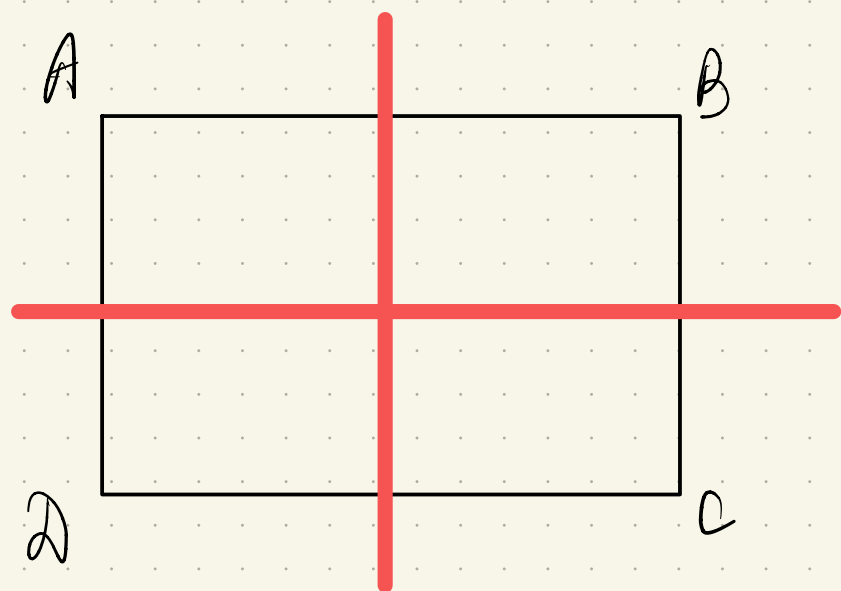
таких что

$$a + c = b + d$$

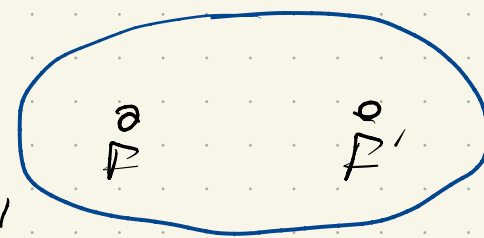


Решение:

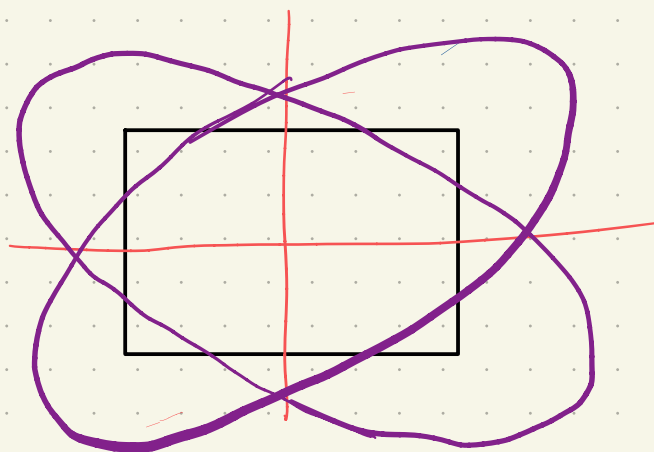
1. По симметрии,
равенство выполнено
на двух осях
симметрии



2. Сумма расстояний до F, F'
постоянна на точках
эллипса с фокусами F и F'
(внутри она меньше, снаружи — больше)



3. Нарисуем эллипс с фокусами A, C
и такой же эллипс с фокусами B, D



— Пересекутся на
осях симметрии $\Rightarrow$

$$a + c < b + d$$

$$a + c > b + d$$

A B

D C

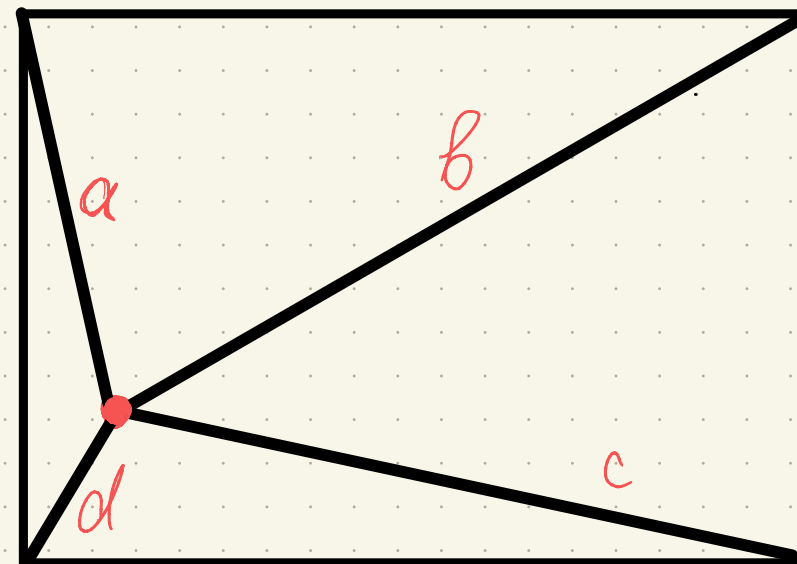
$$a + c > b + d$$

$$a + c < b + d$$

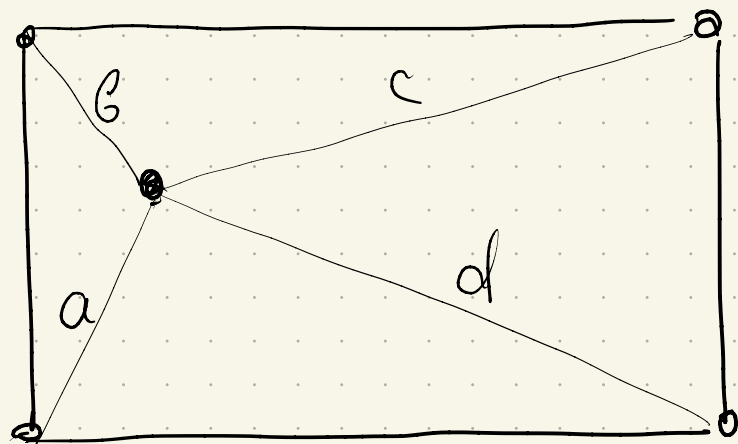
1

Нарисуйте геометрическое место точек
таких что

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

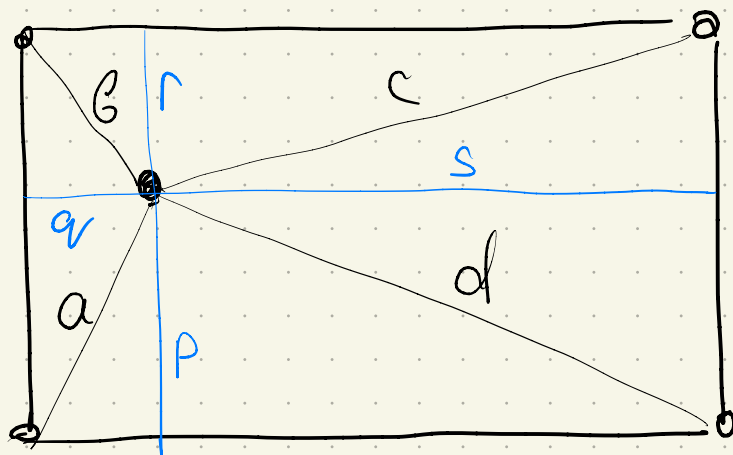


① Докажите теорему:
Теорема о британском флаге:



$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Решение



$$a^2 = p^2 + q^2$$

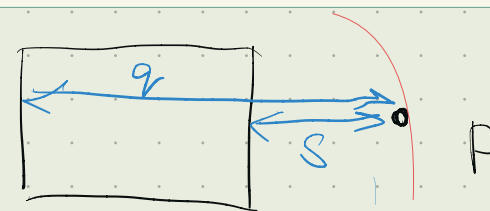
$$c^2 = r^2 + s^2$$

$$b^2 = r^2 + q^2$$

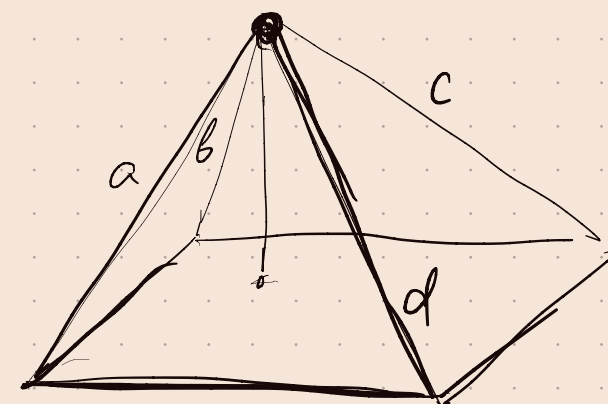
$$d^2 = s^2 + p^2$$

$$a^2 + c^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = b^2 + d^2$$

Замечание: решение работает даже для точек, лежащих вне прямоугольника:

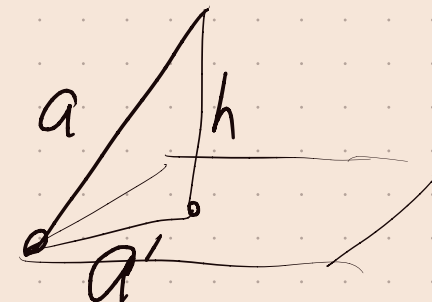


Трёхмерное обобщение:



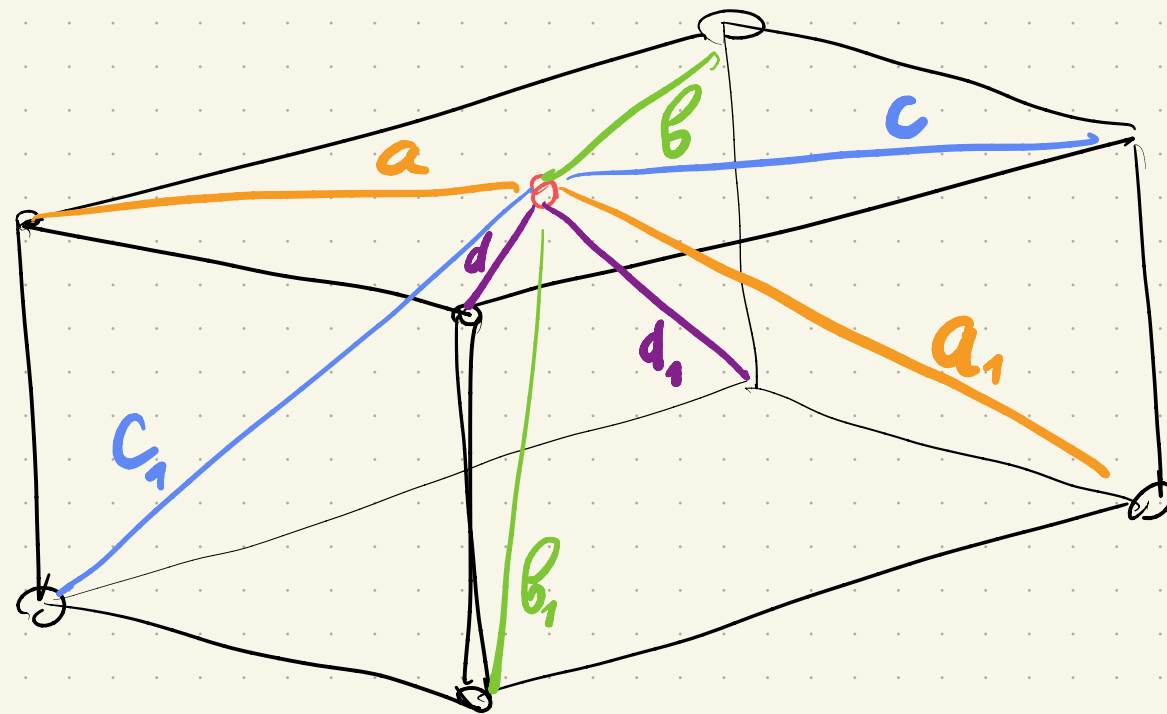
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Док-во:



$$a^2 = a'^2 + h^2$$

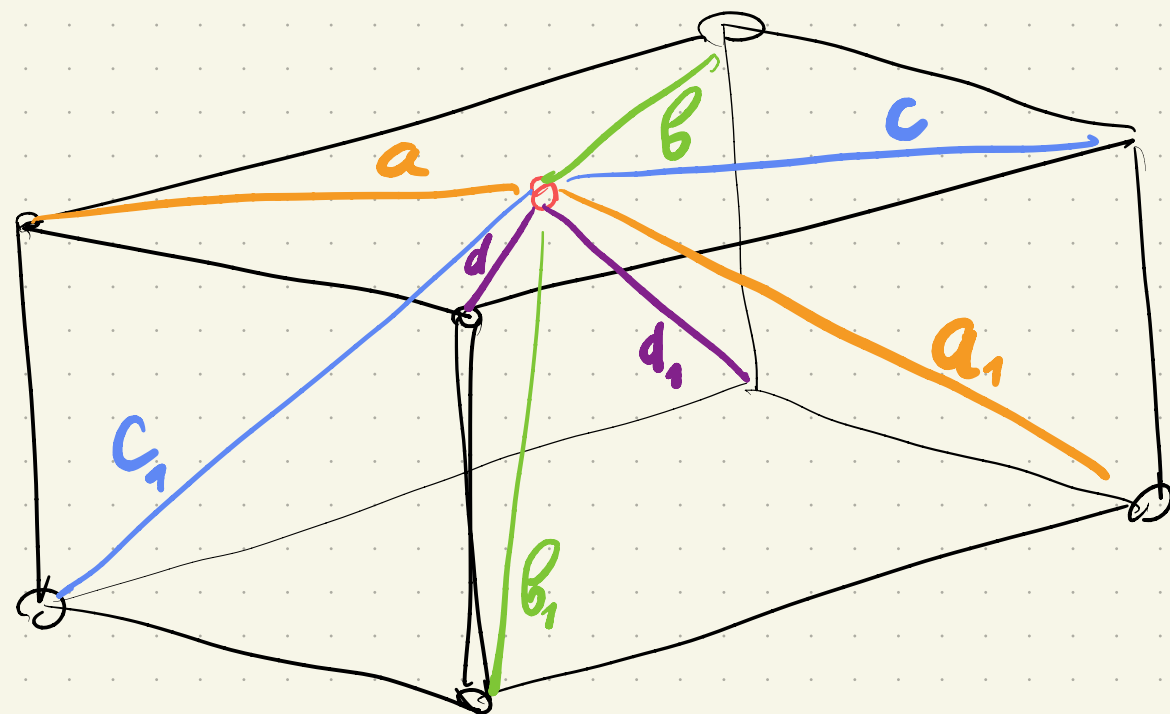
2 Докажите ещё одно трёхмерное обобщение:



$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = d + d_1^2$$

прямоугольный параллелепипед

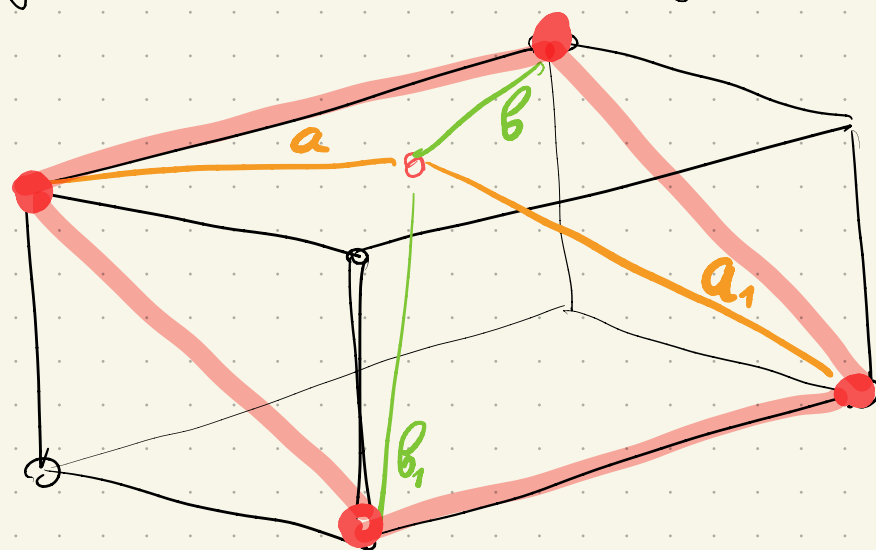
2 Докажите ещё одно трёхмерное обобщение:



$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = d^2 + d_1^2$$

прямоугольный параллелепипед

Решение: следует из предыдущего обобщения,

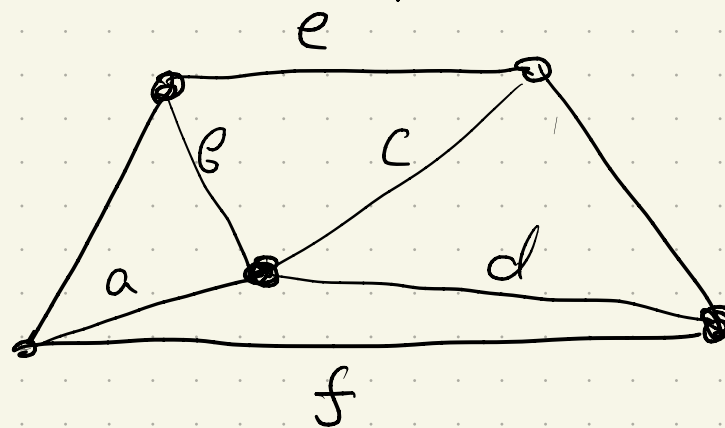


т.к. a, a_1, b, b_1 —

приходят в вершины
прямоугольника.

③ Дана равнобокая трапеция.

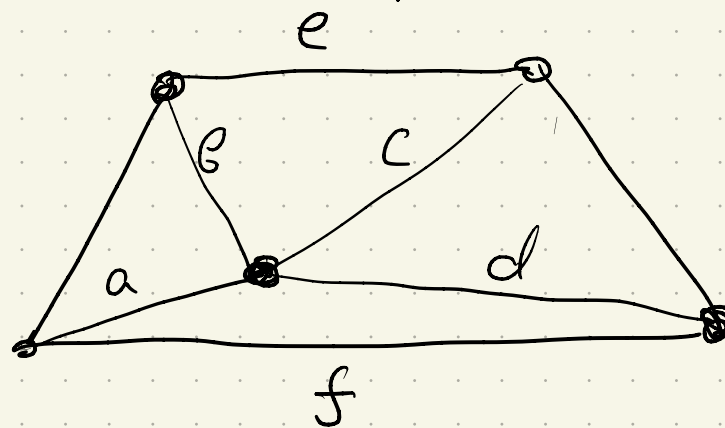
Докажите:



$$a^2 \cdot e + c^2 \cdot f = d^2 \cdot e + b^2 \cdot f$$

③ Дана равнобокая трапеция.

Докажите:



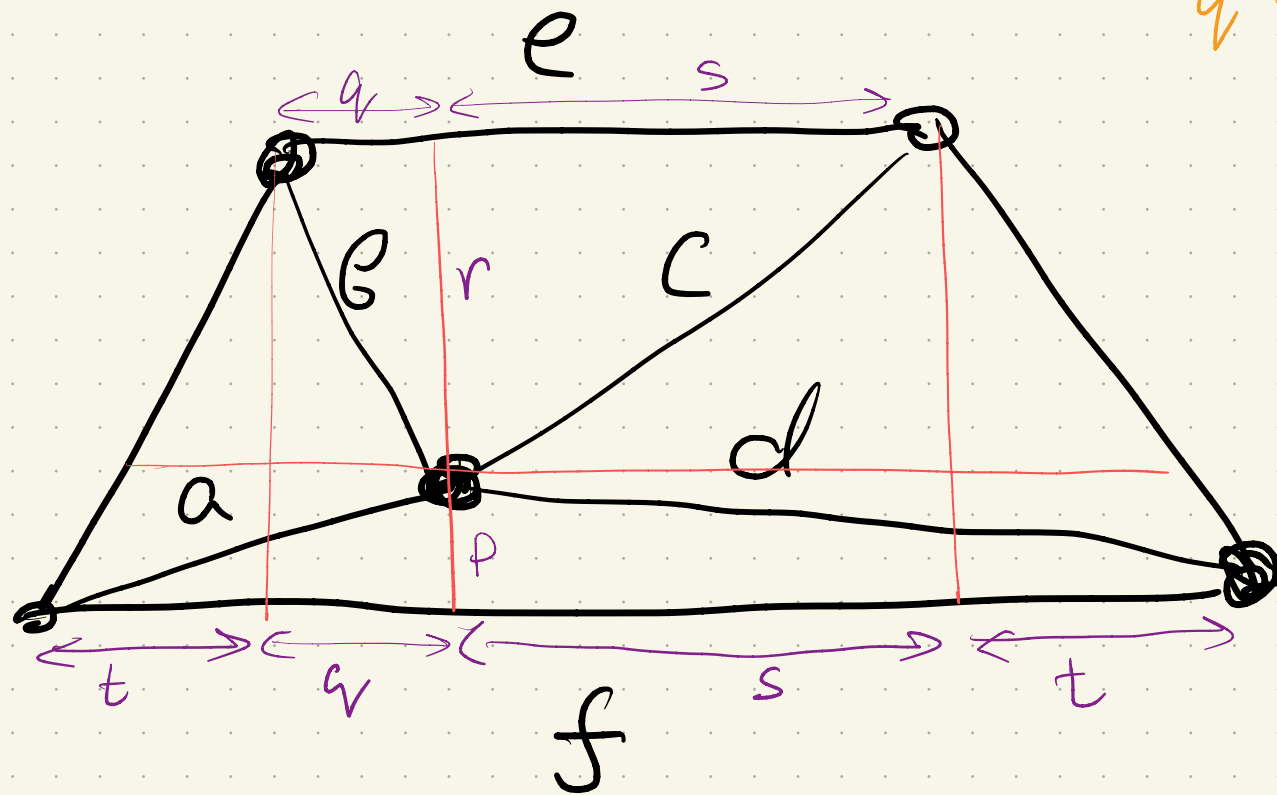
$$a^2 \cdot e + c^2 \cdot f = d^2 \cdot e + b^2 \cdot f$$

Решение:

Хотим: $(a^2 - d^2) e = (b^2 - c^2) f$

$$\left[(t+q)^2 + \cancel{p^2} - (s+t)^2 - \cancel{p^2} \right] (q+s) \stackrel{?}{=} \left[\cancel{a^2} + \cancel{r^2} - \cancel{s^2} - \cancel{r^2} \right] (q+s+2t)$$

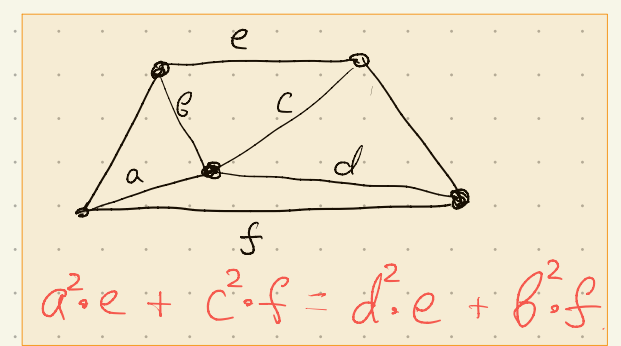
$q^2 - s^2 + 2t(q-s)$



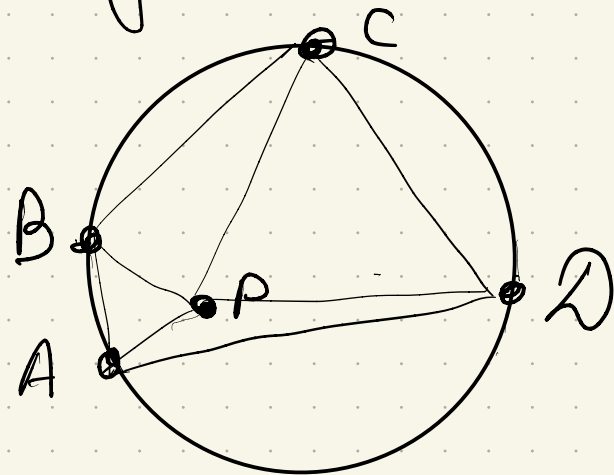
$$(q-s)(q+s+2t)(q+s) = [q^2 - s^2] (q+s+2t)$$

верно!

④ Британский ученый хотел
 обобщить теорему о британском флаге
 на случай любого вписанного четырёхугольника



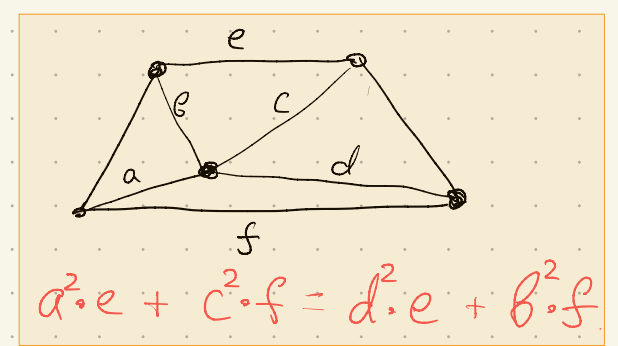
так:



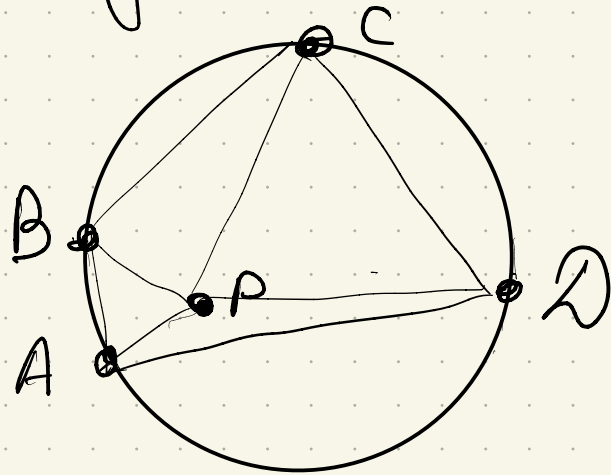
$$PA^2 \cdot BC \cdot CD + PC^2 \cdot AB \cdot AD \stackrel{?}{=} PB^2 \cdot AD \cdot DC + PD^2 \cdot AB \cdot BC$$

Верно ли такое обобщение?

④ Британский ученый хотел
 обобщить теорему о британском флаге
 на случай любого вписанного четырёхугольника



так:

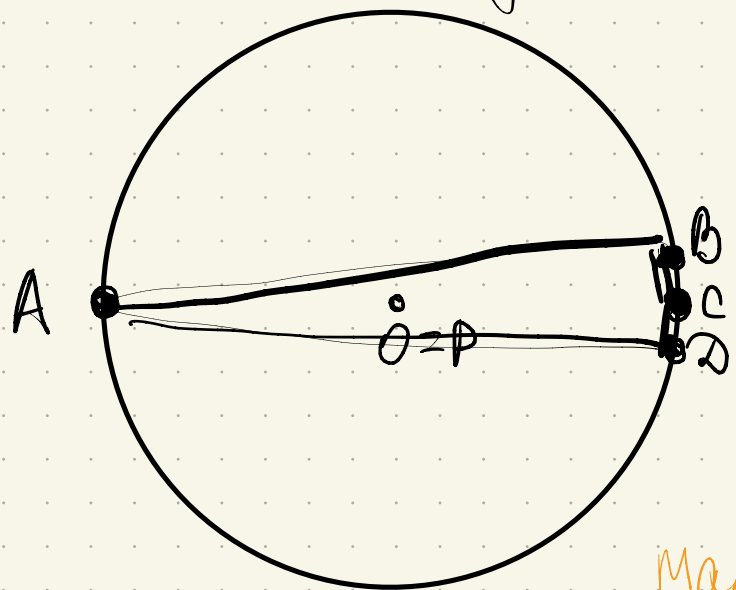


$$PA^2 \cdot BC \cdot CD + PC^2 \cdot AB \cdot AD \stackrel{?}{=} PB^2 \cdot AD \cdot DC + PD^2 \cdot AB \cdot BC$$

Верно ли такое обобщение?

Решение **НЕТ!**

Пусть $P=O$ - центр окружности,
 а четырёхугольник узкий:



$$AB = AD \approx 2$$

$BC = CD$ - очень малы

Тогда надо проверить:

$$BC \cdot CD + AB \cdot AD \stackrel{?}{=} AD \cdot DC + AB \cdot BC$$

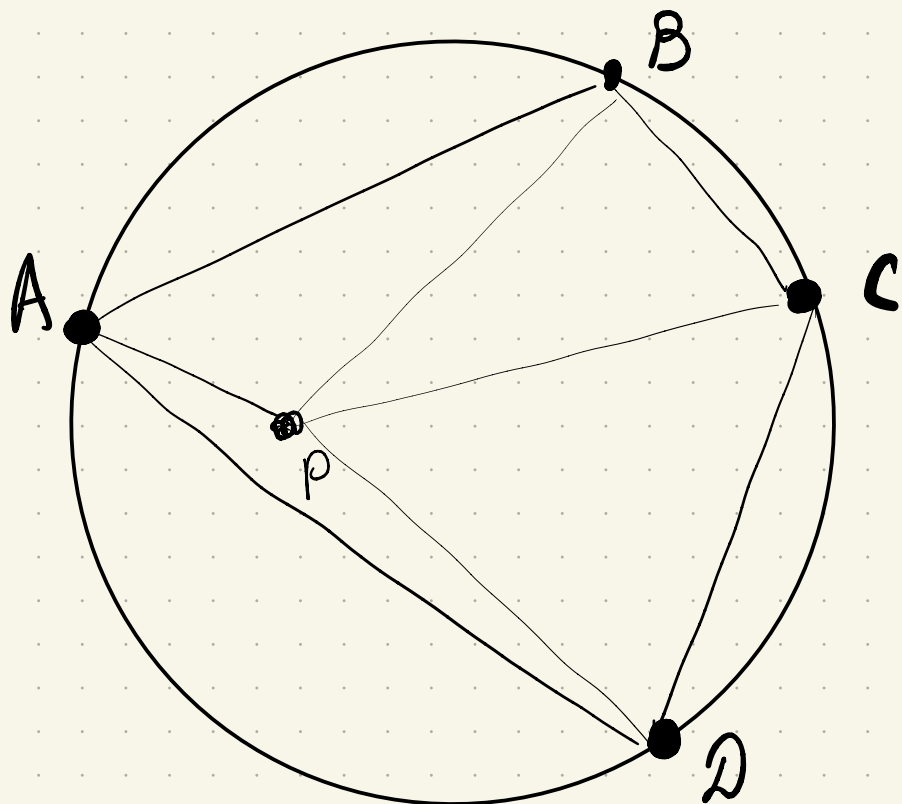
$$\text{мало} \cdot \text{мало} + 2 \cdot 2 \neq 2 \cdot \text{мало} + 2 \cdot \text{мало}$$

Как исправить,
 чтобы было верно?

(и было легко доказать
 для случая $P=O$)

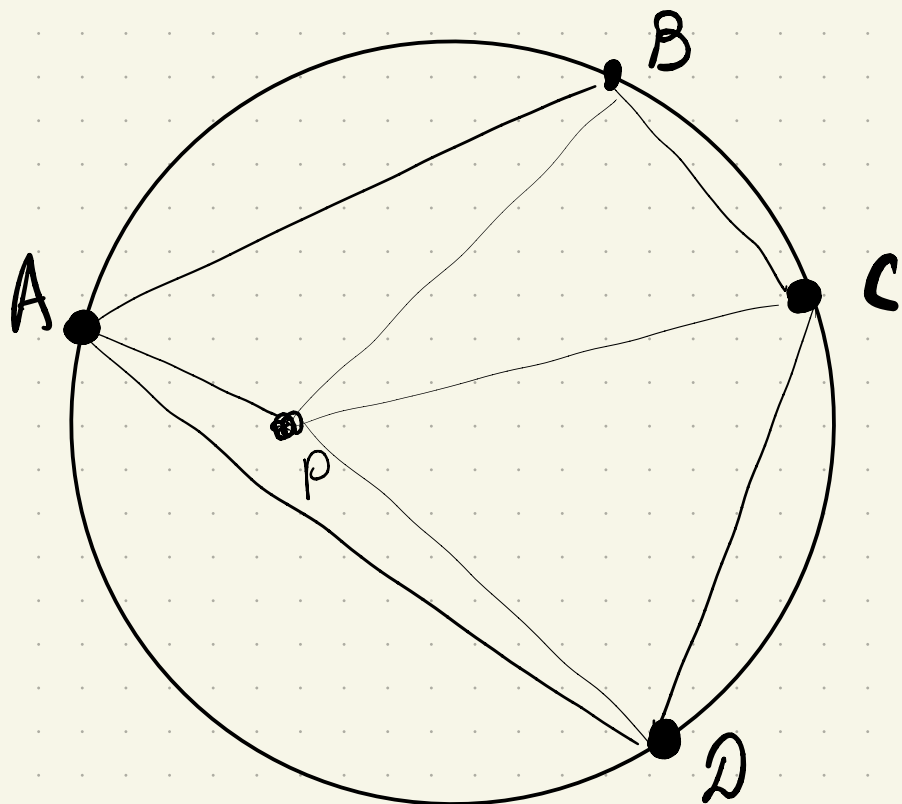
Теорема (Feuerbach-Luchterhand)

[≈1827, ≈1842]



$$\begin{aligned} AP^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + CP^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA &= \\ &= BP^2 \cdot AD \cdot DC \cdot CA + DP^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA \end{aligned}$$

Теорема (Feuerbach - Luchterhand)

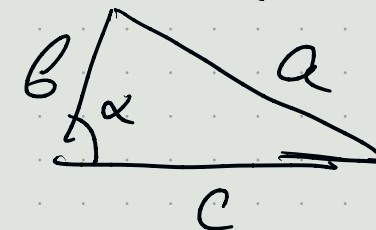


$$AP^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + CP^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA =$$

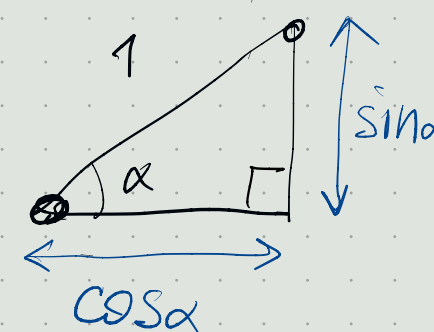
$$= BP^2 \cdot AD \cdot DC \cdot CA + DP^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$$

$$AP^2 \cdot S_{BCD} + CP^2 \cdot S_{ABD} = BP^2 \cdot S_{ACD} + DP^2 \cdot S_{ABC}$$

Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

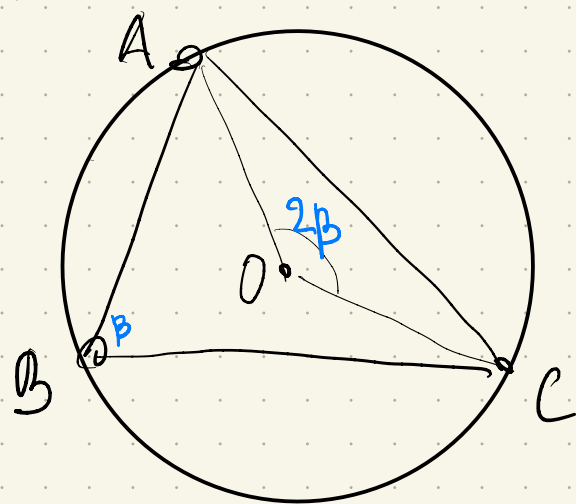


5) Докажите, что если S_{ABC} — площадь $\triangle ABC$, а R — радиус

то

$$AB \cdot BC \cdot CA = 4R S_{ABC}$$

Решение:



$$AC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\beta$$

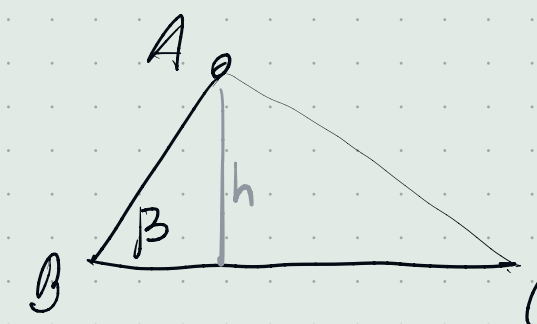
(т. косинусов для $\triangle OAC$)

$$= 2R^2 (1 - \cos 2\beta)$$

$$= 2R^2 (1 - (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta))$$

$$= 4R^2 \sin^2 \beta$$

$$\Rightarrow AC = 2R \sin \beta \Rightarrow$$

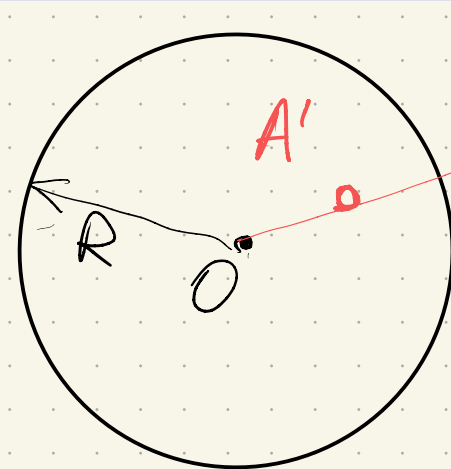


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \beta$$

$$4R \cdot S_{ABC} = \frac{2R \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{AB \cdot BC \cdot AC} =$$

Для доказательства теоремы вспомним:

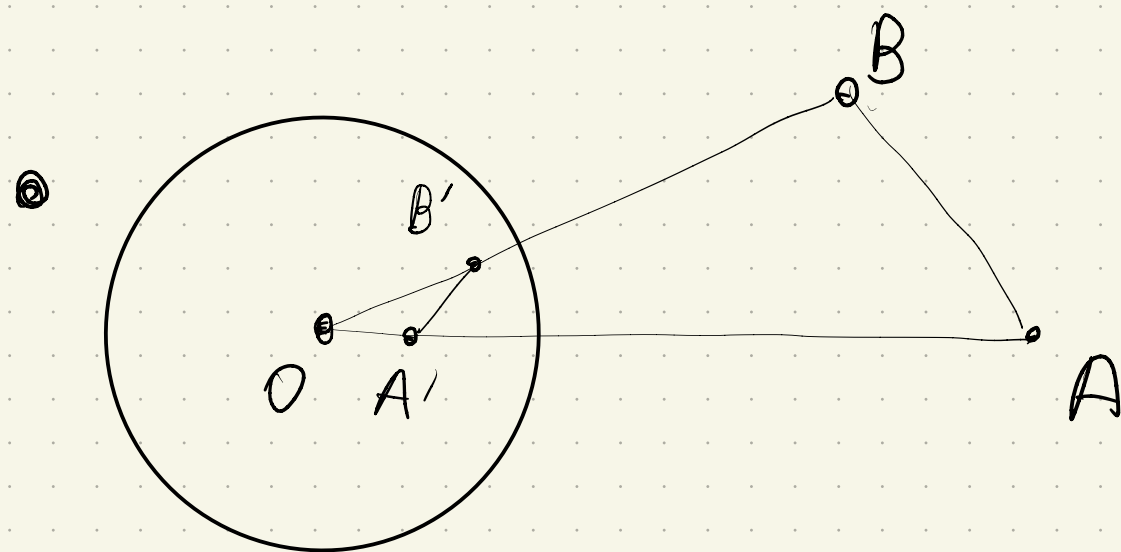
• Инверсия:



$$OA \cdot OA' = R^2$$

(отражение
относительно
окружности)

• Инверсия переводит прямые и окружности
в прямые и окружности



$\triangle AOB$ подобен $\triangle B'O A'$

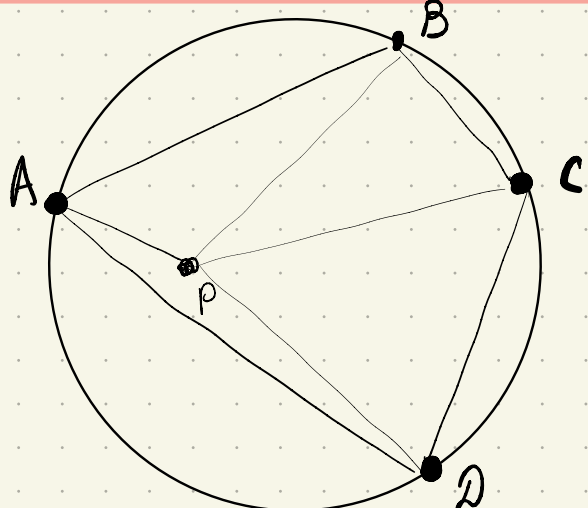
Действительно:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \Rightarrow$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

• $\angle O$ - общий

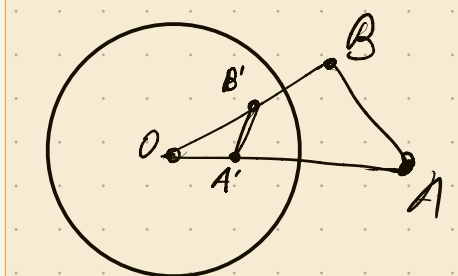
• Т.е. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'}$, т.е. $AB = A'B' \cdot \frac{OA}{OB'}$



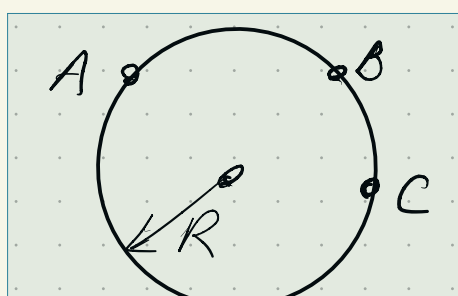
Теорема (Feuerbach - Luchterhand)

$$AP^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + CP^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA =$$

$$= BP^2 \cdot AD \cdot DC \cdot CA + DP^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$$



$$AB = A'B' \cdot \frac{OA}{OB'}$$

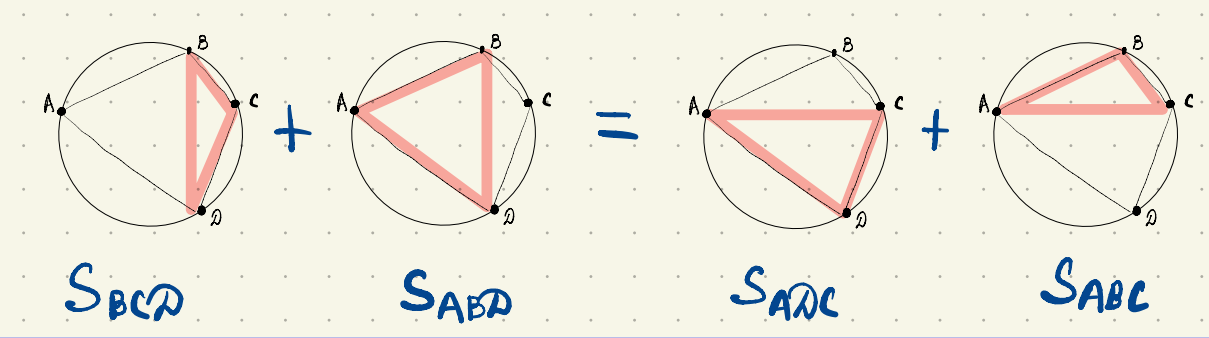


$$4R S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot CA$$

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{R^2}$$

Доказательство:

1. Если P - центр окружности, то теорема верна: она тогда эквивалентна



2. Иначе, сделаем инверсию I относительно любой окружности с центром P.

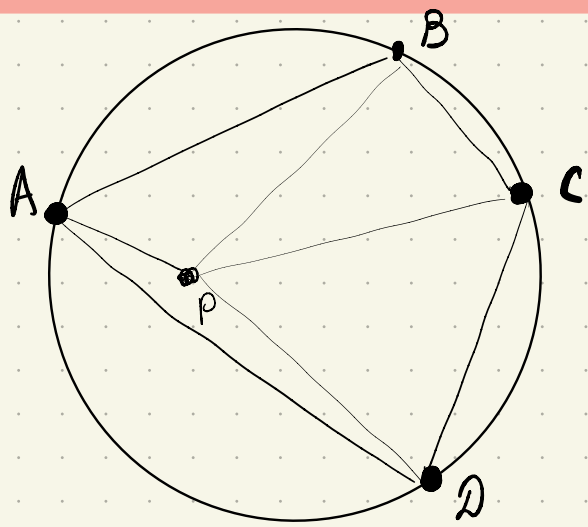
Обозначим:
 $I(A) = A', \dots, I(D) = D'$

Для $A'B'C'D'$ верно $BC' \cdot C'D' \cdot D'B' + A'B' \cdot BD' \cdot DA' = AD' \cdot DC' \cdot CA' + AB' \cdot BC' \cdot CA'$

Заменим $A'B' = AB \cdot \frac{PA \cdot PB'}{PA'}$, $BC' = \dots$, получим [для каждого из четырёх слагаемых]

$$BC' \cdot C'D' \cdot D'B' = BC \cdot CD \cdot DB \cdot \frac{PA' \cdot PB' \cdot PC' \cdot PD'}{PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD} \cdot \frac{PA}{PA'} = BC \cdot CD \cdot DB \cdot \frac{PA' \cdot PB' \cdot PC' \cdot PD'}{PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD} \cdot \frac{PA^2}{R^2}$$

сократив общий множитель, получим утверждение теоремы.

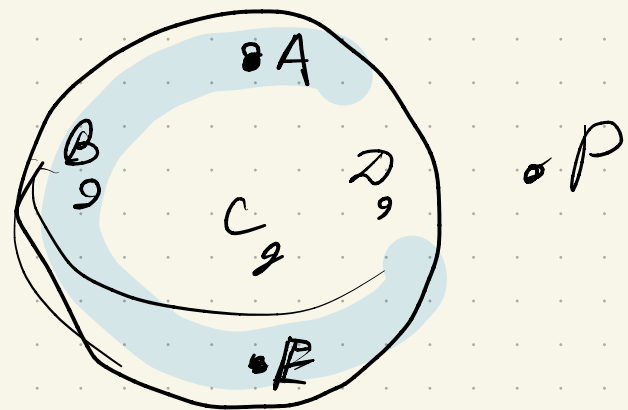


Теорема (Feuerbach - Luchterhand)

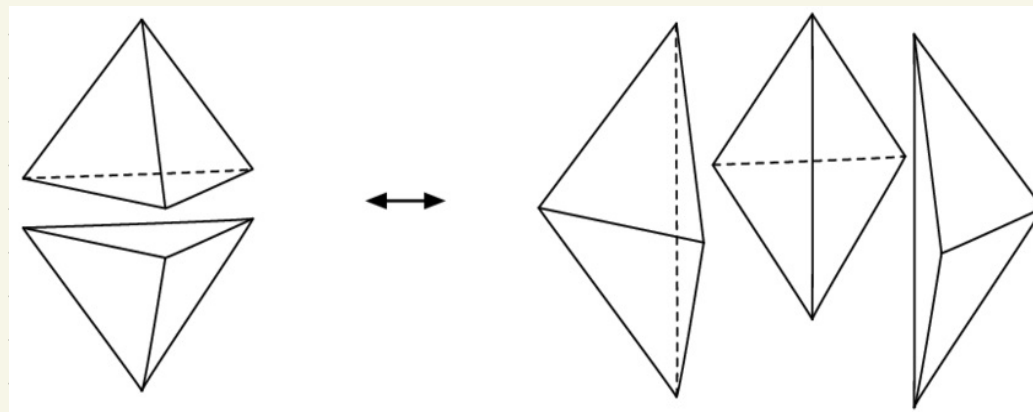
$$AP^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + CP^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA = \\ = BP^2 \cdot AD \cdot DC \cdot CA + DP^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$$

(или n-мерный)

Так же доказывается 3x-мерный аналог:

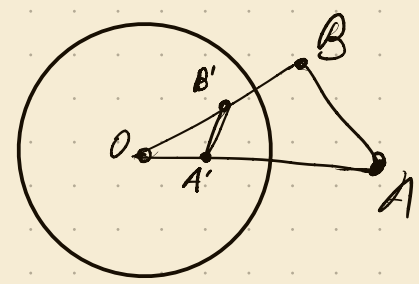


5 точек на сфере +
ещё одна

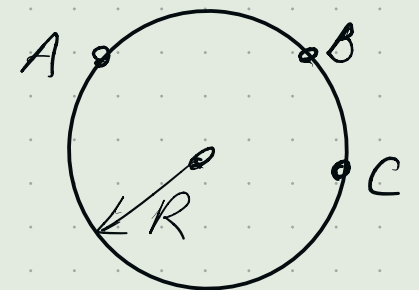


$$AP^2 \cdot Vol_{BCDE} + EP^2 \cdot Vol_{ABCD} = BP^2 \cdot Vol_{ACDE} + CP^2 \cdot Vol_{ABDE} + DP^2 \cdot Vol_{ABCE}$$

(Luchterhand, 1841)



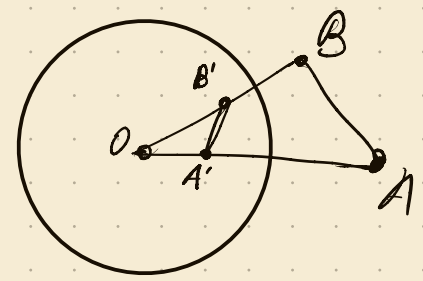
$$AB = A'B' \cdot \frac{OA}{OB'}$$



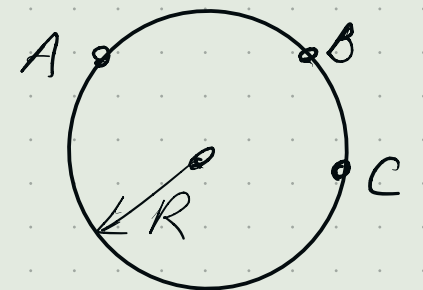
$$4R S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot CA$$

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{R^2}$$

Wenn fünf Punkte auf der Oberfläche einer Kugel gelegen sind, so haben die fünf Pyramiden, welche durch je vier der Punkte bestimmt werden, die Eigenschaft, daß, wenn man den Inhalt jeder solcher Pyramide mit dem Quadrate der Entfernung des jedesmal übrig bleibenden fünften Punktes von einem beliebigen sechsten multiplicirt, die Summe von dreien dieser Producte gleich der Summe der beiden andern ist.



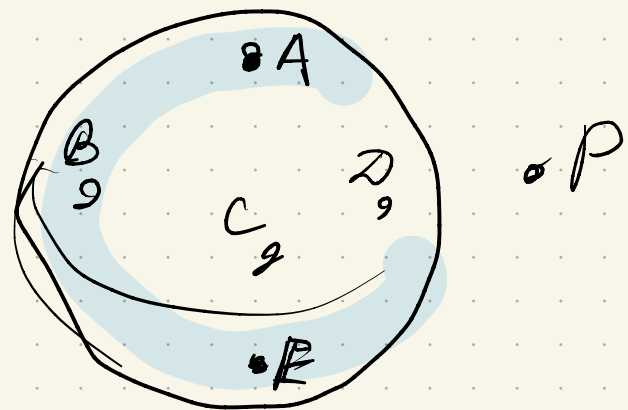
$$AB = A'B' \cdot \frac{OA}{OB'}$$



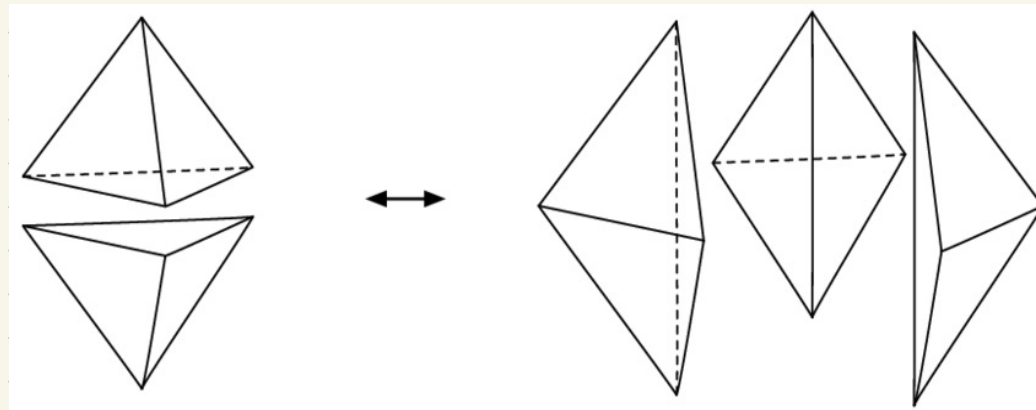
$$4R S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot CA$$

$$\frac{1}{OA'} = \frac{OA}{R^2}$$

Так же доказывается 3х-мерный аналог:

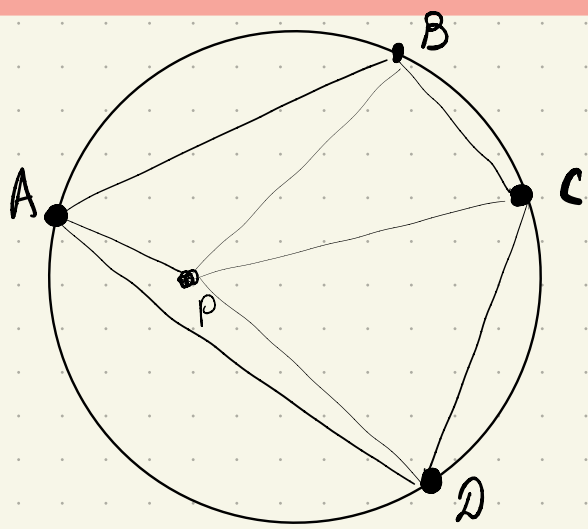


5 точек на сфере +
ещё одна



$$AP^2 \cdot \text{Vol}_{BCDE} + EP^2 \cdot \text{Vol}_{ABCD} = BP^2 \cdot \text{Vol}_{ACDE} + CP^2 \cdot \text{Vol}_{ABDE} + DP^2 \cdot \text{Vol}_{ABCE}$$

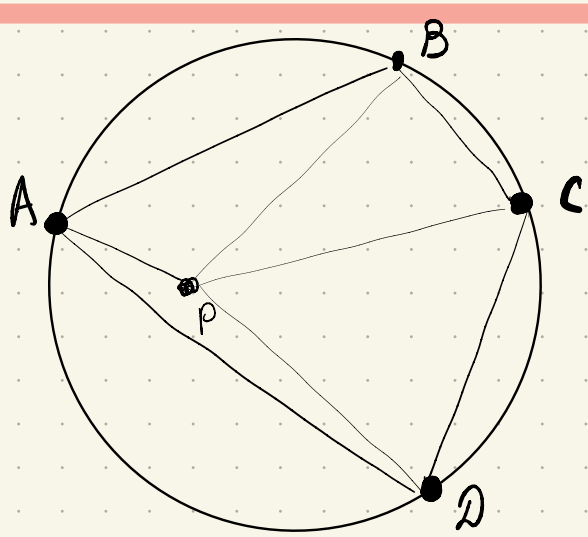
(Lüchterhand, 1841)



Теорема (Feuerbach-Luchterhand)

$$AP^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + CP^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA = \\ = BP^2 \cdot AD \cdot DC \cdot CA + DP^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$$

⑥ Верна ли теорема для четырёхугольников, не являющихся вписанными?

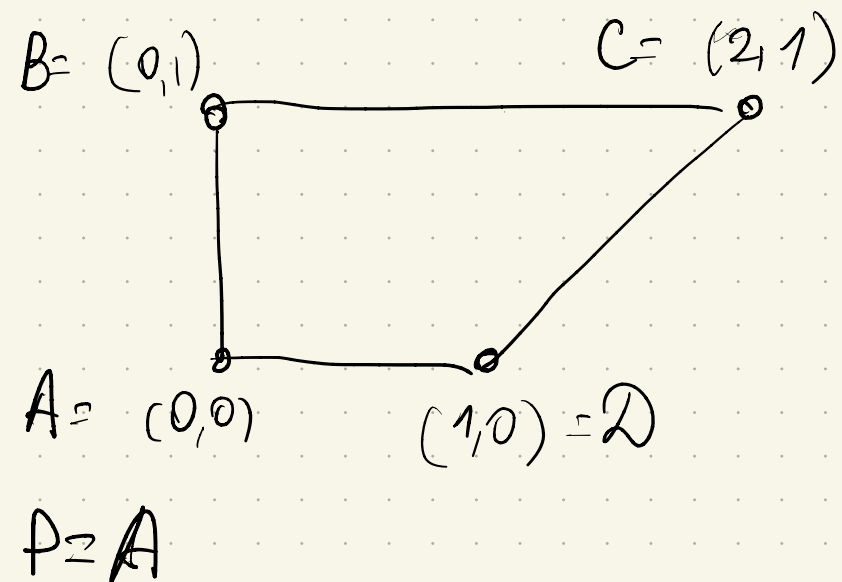


Теорема (Feuerbach - Luchterhand)

$$AP^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + CP^2 \cdot AB \cdot BD \cdot DA = \\ = BP^2 \cdot AD \cdot DC \cdot CA + DP^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$$

⑥ Верна ли теорема для четырёхугольников, не являющихся вписанными?

Решение:



$$0 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + 5 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = ?$$

$$\stackrel{?}{=} 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}$$

$$5\sqrt{2} \stackrel{?}{=} \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} (1 + \sqrt{2})$$

$$\sqrt{5} \stackrel{?}{=} (1 + \sqrt{2})$$

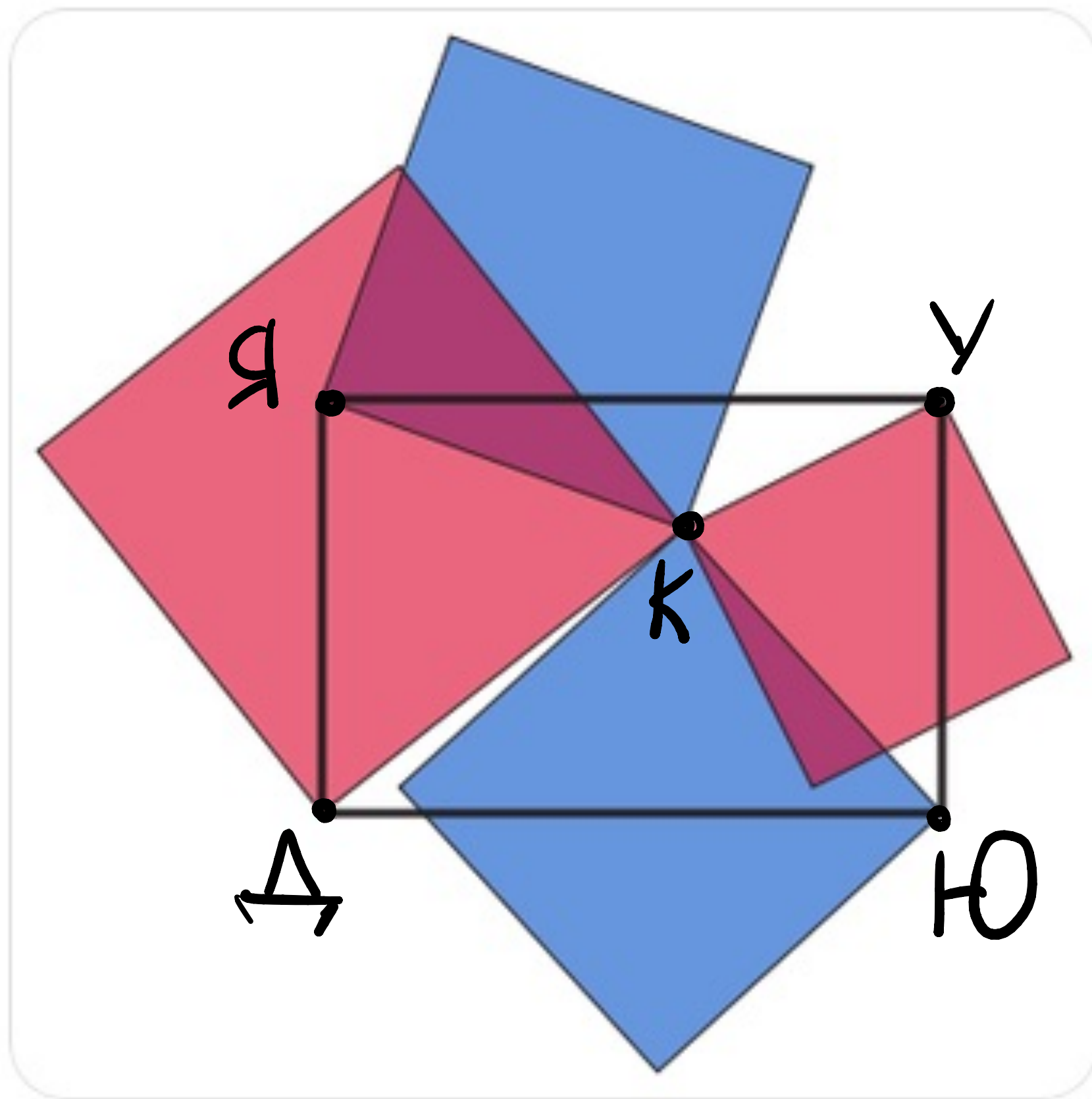
$$5 \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 2\sqrt{2}$$

$$2 \stackrel{?}{=} 2\sqrt{2}$$

$$1 \neq \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$

НЕТ, НЕ верна



$$K\varphi^2 + K\Theta^2 = K\Delta^2 + K\Upsilon^2$$