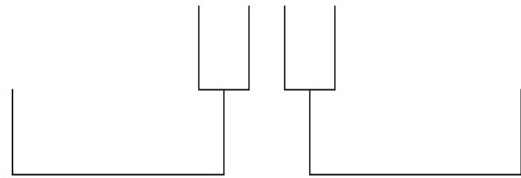


Э | ЧИСЛА КАТАЛАНА

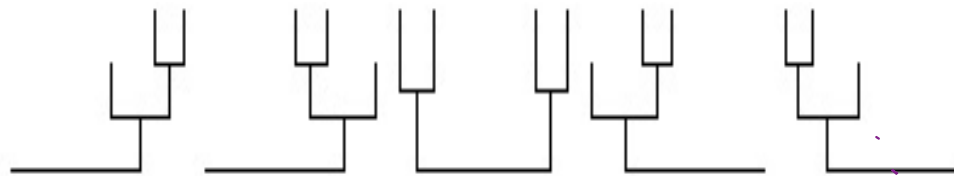
1



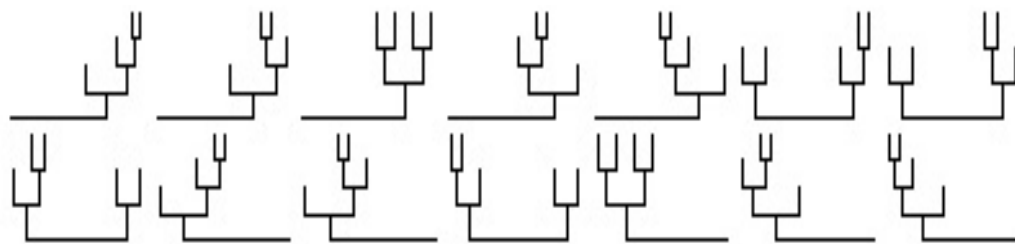
2



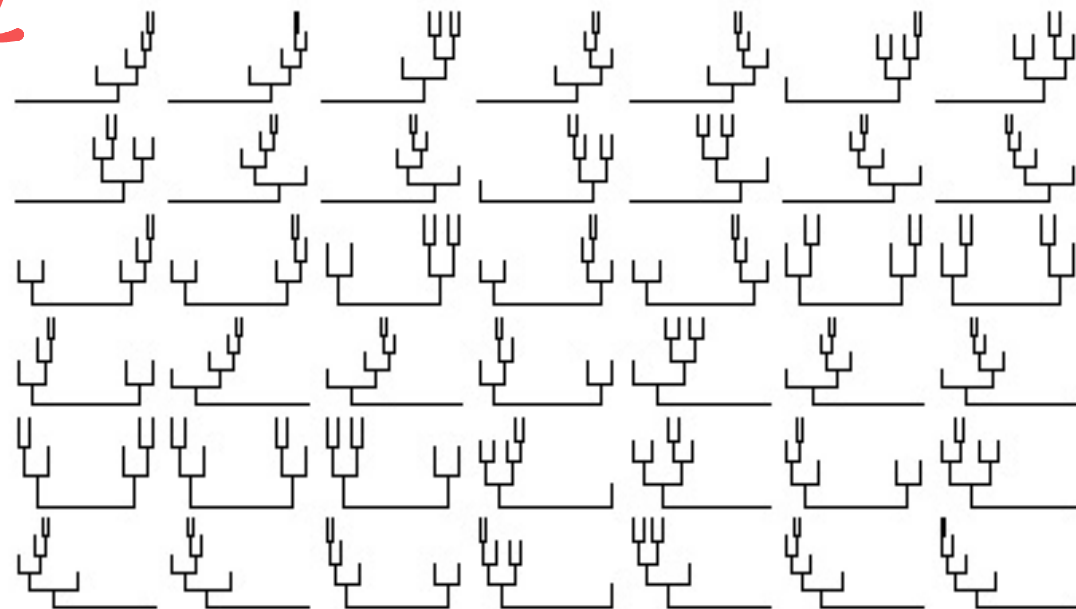
5



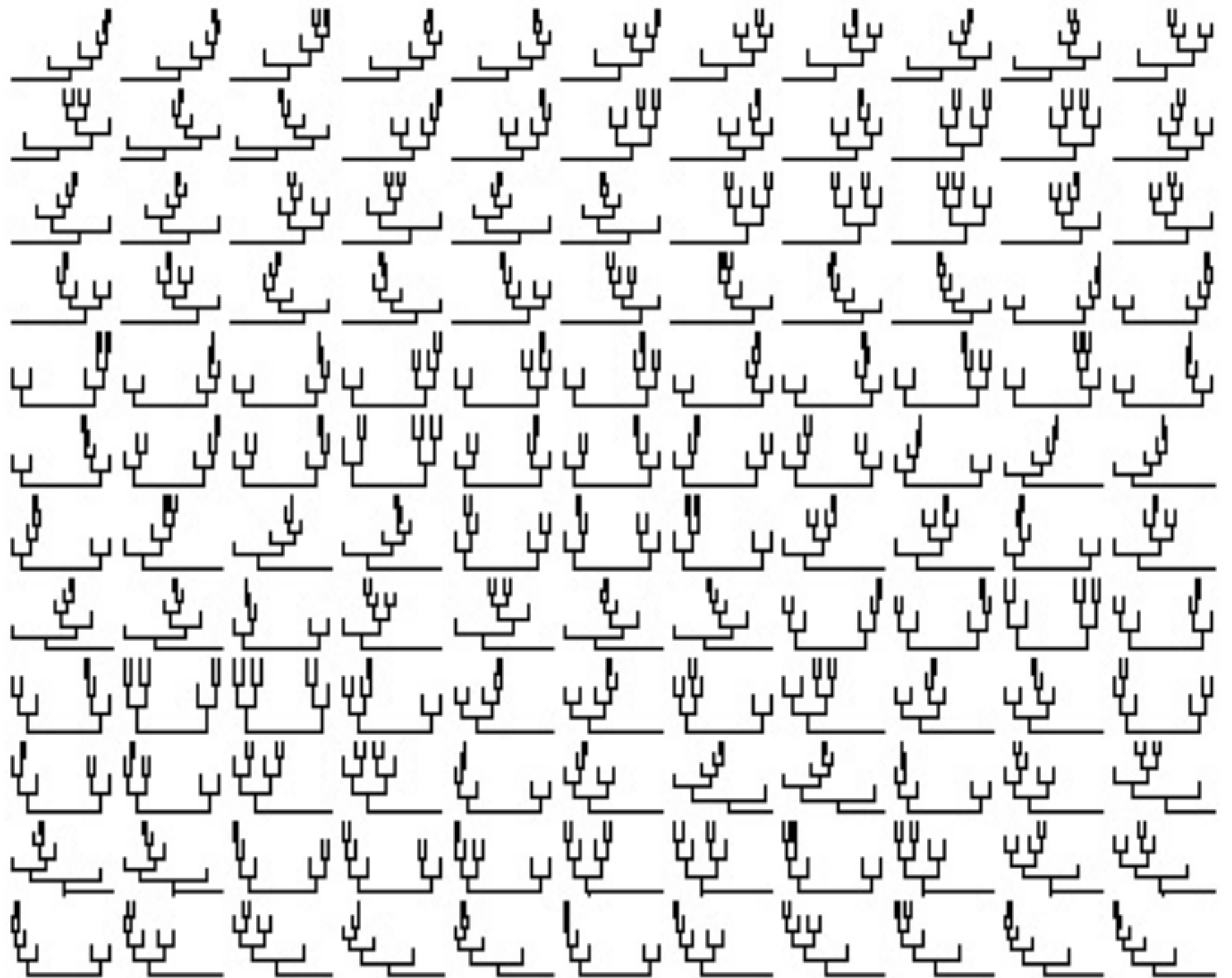
14



42



132



Разминка 1, перестановочная:

Сколько способами можно расставить
по n местам?
 n чисел $(1, 2, 3, \dots, n)$

$\square \square \dots \square$

Разминка 1, перестановочная:

Сколько способами можно расставить
 n чисел $(1, 2, 3, \dots, n)$ по n местам?

$\square \square \dots \square$

Решение:

n факториал

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

на последнее

на $(n-1)$ -е

$(n-2)$... на 3-е

$(n-1)$ оставшееся число претендует на второе

n разных чисел можно поставить на первое место

Разминка 2, многоугольная!

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Сколько способов выбрать

2 вершины из вершин n -угольника?

3 вершины?

k вершин?

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}$$

Разминка 2, многоугольная!

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Сколько способов выбрать

2 вершины из вершин n -угольника?

3 вершины:

k вершин:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}$$

выбрать
1-ую вершину $\swarrow$ 2-ую $\searrow$ k -тую $\downarrow$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} =$$

$$\frac{n!}{k! (n-k)!}$$

способов упорядочить
 k точек

Число $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$

называется

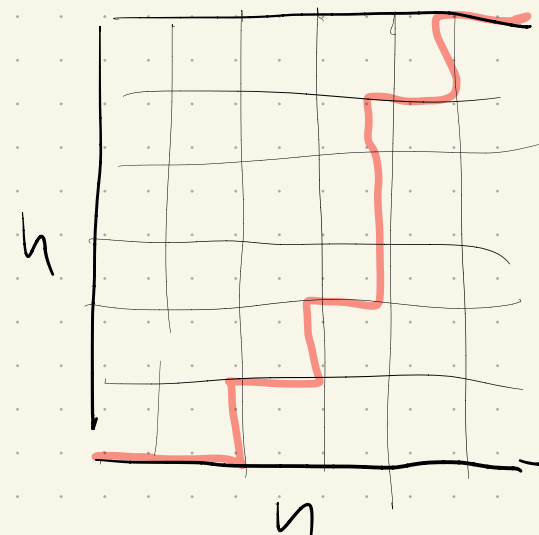
числом сочетаний из n по k

Разминка 3, квадратная:

В квадрате $n \times n$, сколько ^{кратчайших} путей по клеточкам из левого нижнего угла в правый верхний?

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

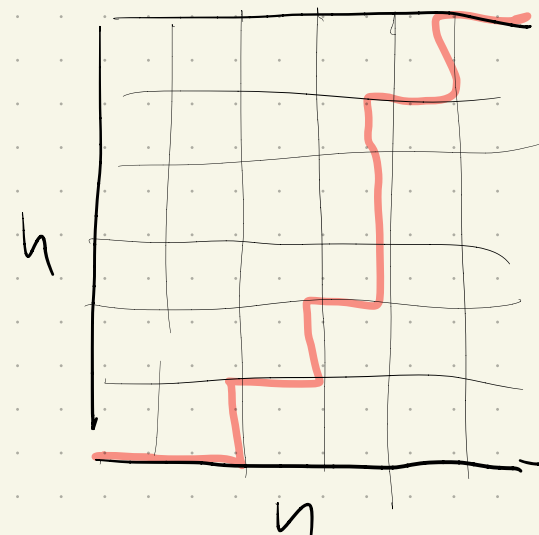


Разминка 3, квадратная:

В квадрате $n \times n$, сколько ^{кратчайших} путей по клеточкам из левого нижнего угла в правый верхний?

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$



Решение

Всего $2n$ шагов,

из них n вверх, n вправо

Выборать путь = выбрать, какие n шагов из $2n$ ведут вправо.

те всего $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! n!}$ способов

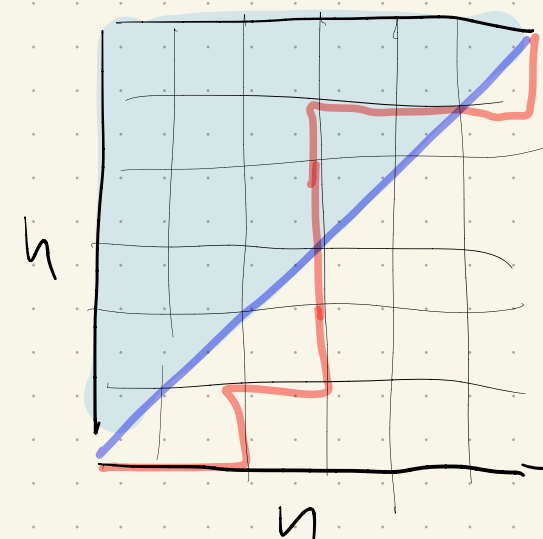
число сочетаний
из $2n$ по n

Разминка 4, прямоугольная:

В квадрате $n \times n$, сколько ^{кратчайших} путей по клеточкам из левого нижнего угла в правый верхний, с хотя бы одним шагом по верхнему треугольнику?

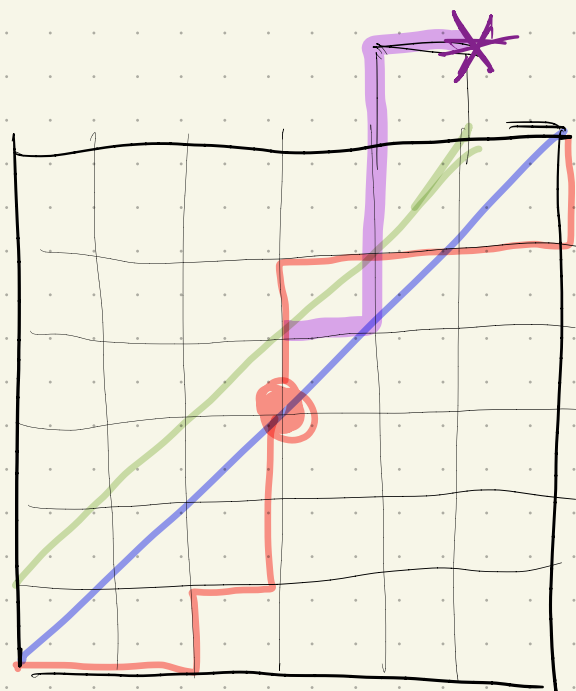
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



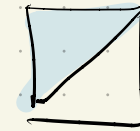
Подсказка: покажите, что $ux = \begin{pmatrix} 2n \\ n-1 \end{pmatrix}$

Замечание: $\binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)(n+1)!} = \binom{2n}{n+1}$



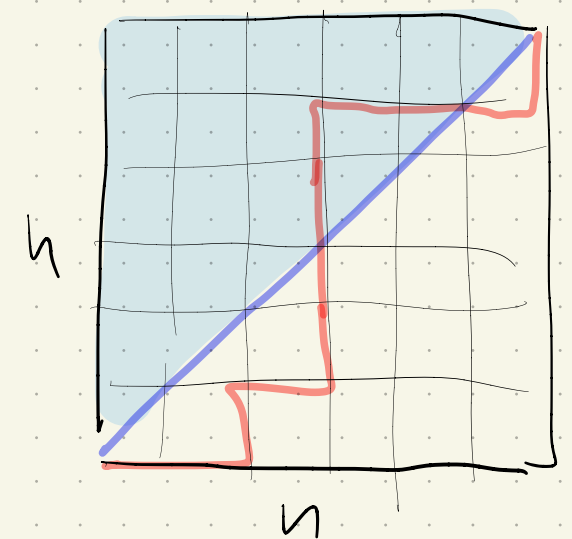
Разминка 4, прямоугольная:

В квадрате $n \times n$, сколько ^{кратчайших} путей по клеточкам из левого нижнего угла в правый верхний, с хотя бы одним шагом по верхнему треугольнику?



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

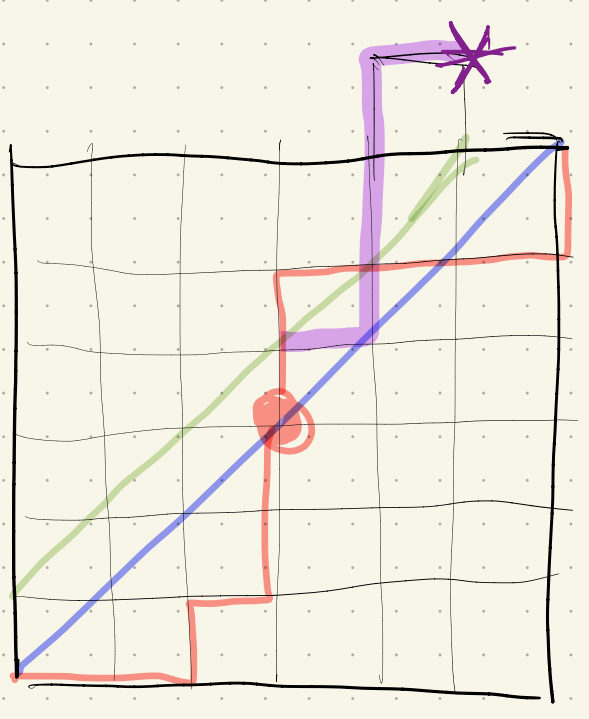
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Подсказка: докажите, что их $\binom{2n}{n-1}$

Замечание: $\binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n+1}$

Решение Рассмотрим первое пересечение главной диагонали, отразим продолжение пути от следующей диагонали.



Новый путь приходит в точку $(n-1, n+1)$
Таких путей из $(0,0)$ в $(n-1, n+1)$ столько же, сколько путей из $(0,0)$ в (n,n) , пересекающих диагональ
Сколько?

$$\binom{2n}{n-1}$$

← $n-1$ горизонтальных шагов из $2n$ шагов

Правильная скобочная структура:

$((()()))$

- # левых скобок = # правых скобок
- левая скобка всегда левее, чем парная ей правая

① Перечислите скобочные структуры
(a) с двумя левыми скобками (b) с тремя ...

Правильная скобочная структура:

$((()()))$

- # левых скобок = # правых скобок
- левая скобка всегда левее, чем парная ей правая

① Перечислите скобочные структуры
(a) с двумя левыми скобками (b) с тремя ...

Решение:

2: $()()$
 $(())$

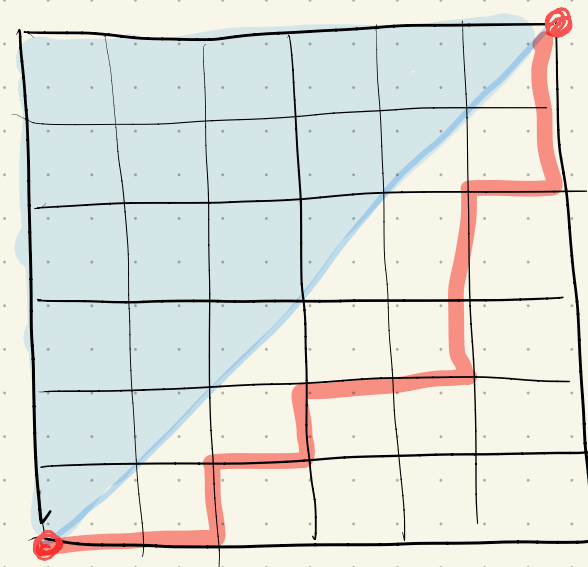
2

3: $()()()$
 $()(())$
 $(())()$
 $(()())$
 $((()))$

5

Лестница (пути Дика)

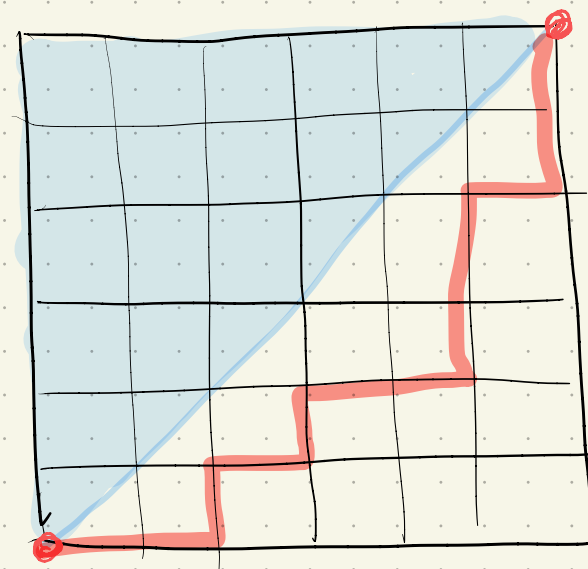
В квадрате $n \times n$, сколько есть путей по клеточкам из левого нижнего угла в правый верхний, не пересекающих диагональ?



② Докажите, что число путей Дика в квадрате $n \times n$ равно числу скобочных структур с n скобками

Лестница (пути Дика)

В квадрате $n \times n$, сколько есть путей по клеточкам из левого нижнего угла в правый верхний, не пересекающих диагональ?



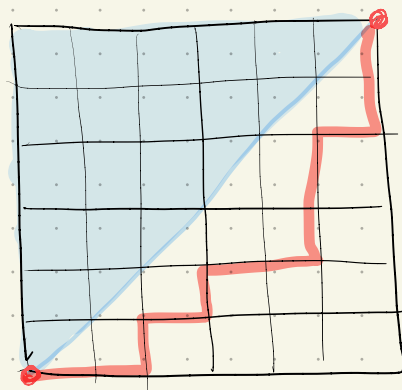
② Докажите, что число путей Дика в квадрате $n \times n$ равно числу скобочных структур с n скобками

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{" } \text{---} \text{"} = \text{" (" } \\ \text{" } \text{---} \text{"} = \text{") " } \end{array}$$

"правильная скобочная структура" =
"пути ниже диагонали"

Пример



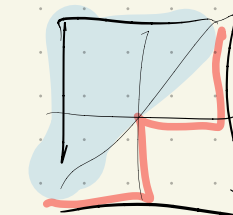
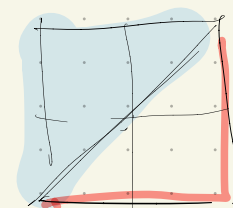
$$= ((())(())())$$

Обозначим $C_n = \#$ путей Дика в квадрате $n \times n$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5$$

③ Докажите, рекуррентную формулу:

$$C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$$



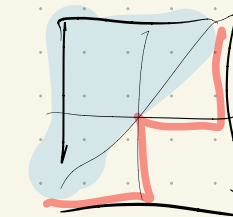
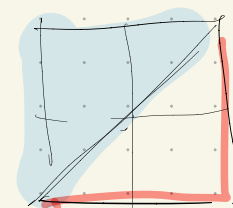
$$C_2 = 2$$

Обозначим $C_n = \#$ путей Дика в квадрате $n \times n$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5$$

③ Докажите, рекуррентную формулу:

$$C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$$



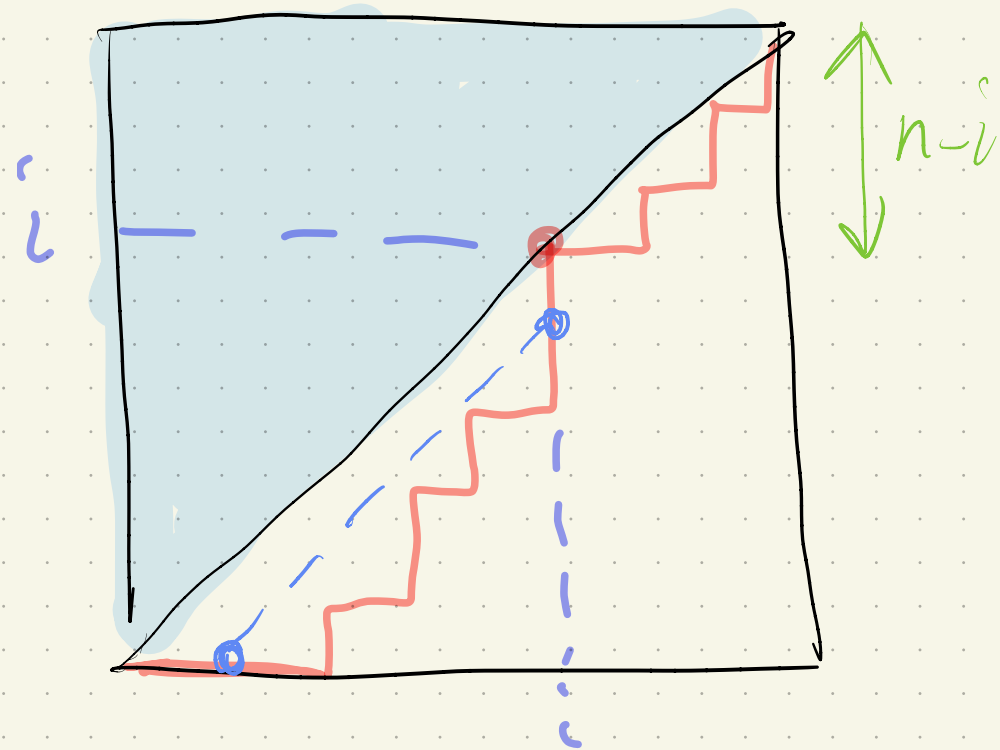
$C_2 = 2$

Решение Пусть i - первая точка (при движении вверх),
где путь касается диагонали

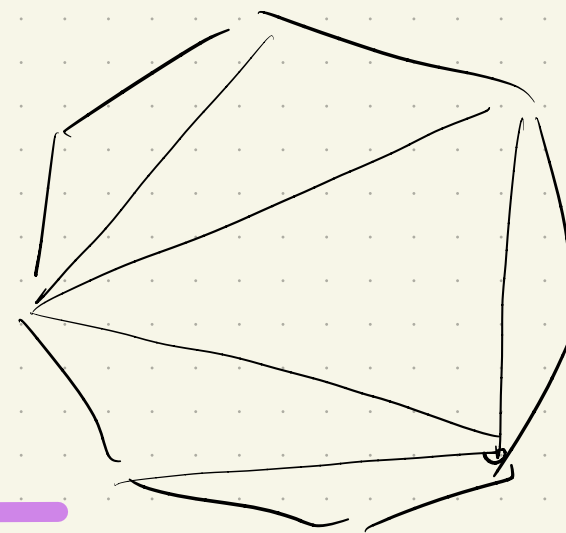
Выше этой точки - C_{n-i}
способов идти до конца

Ниже этой точки -

пути Дика длины $i-1$
(так не пересекает следующую диагональ).

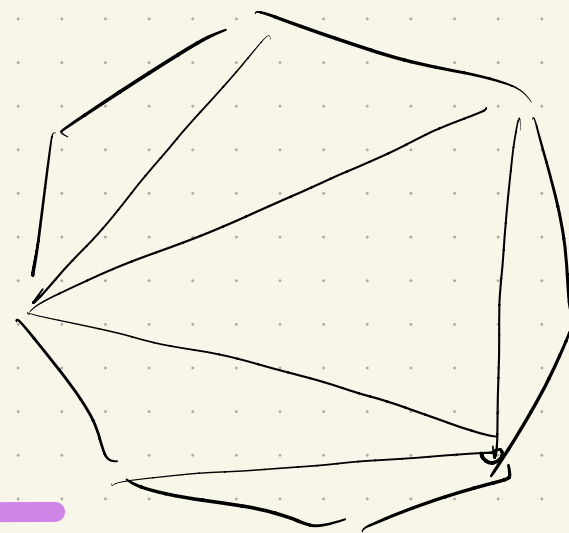


Триангуляция — это
разбиение многоугольника
на треугольники.



③ Найдите число триангуляции
четырёхугольника:
пятиугольника:
шестиугольника!

Триангуляция — это
разбиение многоугольника
на треугольники.



③ Найдите число триангуляций

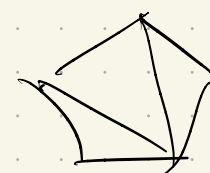
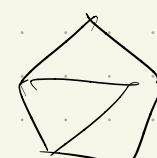
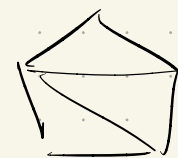
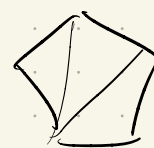
четырёхугольника :

2



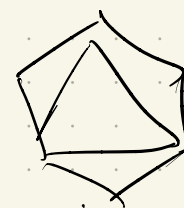
пятиугольника :

5

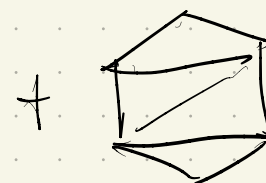


шестиугольника :

14

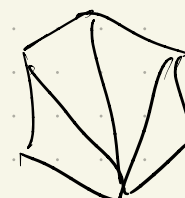


2



2, 3

+



6

= 14

4 Пусть T_n — число треугольников $(n+2)$ -угольника

Докажите, что

$$T_n = \sum_{i=1}^n T_{i-1} \cdot T_{n-i}$$

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = 1 \quad \triangle$$

$$T_2 = 2 \quad \square \quad \square$$

...

4 Пусть T_n — число триангуляций $(n+2)$ -угольника

Докажите, что
$$T_n = \sum_{i=1}^n T_{i-1} \cdot T_{n-i}$$

$$T_0 = 1$$

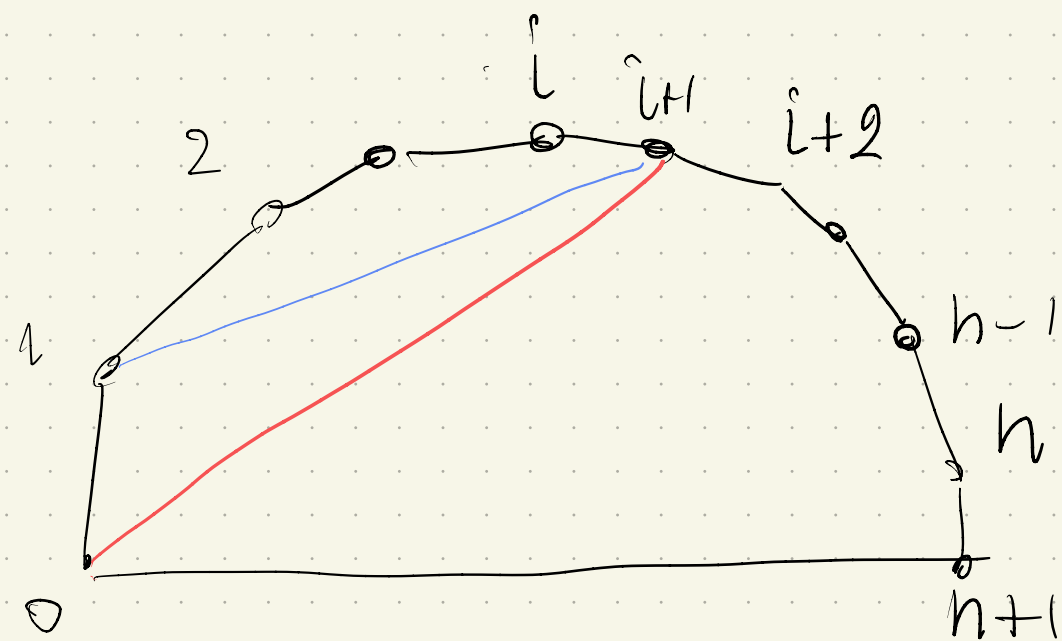
$$T_1 = 1 \quad \triangle$$

$$T_2 = 2 \quad \square \quad \square$$

Решение: Пусть $i+2$ — первая вершина, соединённая с 0

тогда слева — T_{i-1} триангуляций $(i+1)$ -угольника $[1, 2, \dots, i+1]$

а справа — T_{n-i} триангуляций $(n+2-i)$ -угольника $[0, i+1, i+2, \dots, n, n+1]$



Следствие: $T_n = C_n$

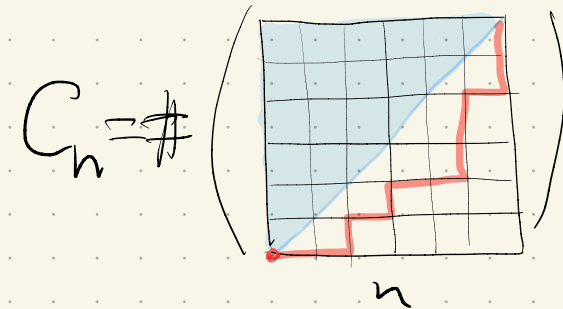
число триангуляций $(n+2)$ -угольника
= число путей Дика в квадрате $n \times n$

⑤ Докажите, что

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Подсказка: докажите и используйте, что

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

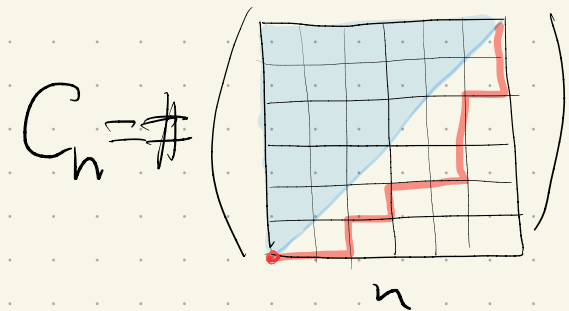
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

⑤ Докажите, что

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Подсказка: докажите и используйте, что

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

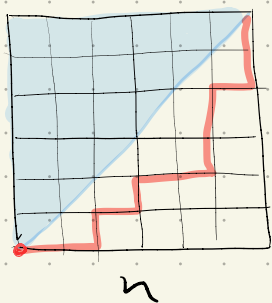
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Решение:

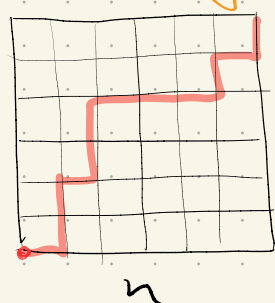
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad (\cancel{n+1} - \cancel{n}) = \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

↑
путей Дика



↑
все пути



↑
неправильные
пути

(заходящие в верхний
треугольник)

Числа

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

называются числами Каталана

$$C_n = \# \left(\begin{array}{c} \text{grid with } n \times n \text{ cells} \\ \text{blue shaded area} \\ \text{red path from } (0,0) \text{ to } (n,n) \end{array} \right)$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

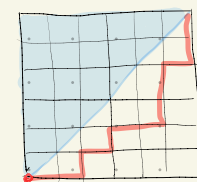
$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, \dots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

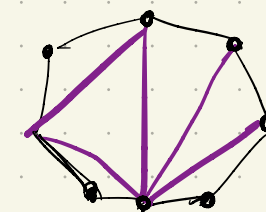
Мы доказали, что $C_n =$

$$C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$$

- # путей Дика в квадрате $n \times n$
- # скобочных структур из n пар скобок
- # триангуляций $(n+2)$ -угольника
- # фризов канвея-кохтера ширины $n-1$



(())(())(())(())



[см лето 2025!]

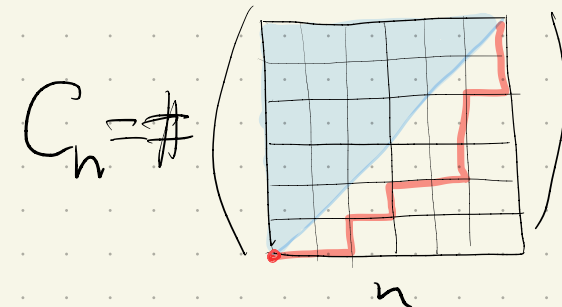
Есть > 70 эквивалентных определений – интерпретаций.
(см. список R. Stanley).



(1814–1894)

Числа Каталана

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



– упоминались в работе Ming Anto
(китайский учёный, ≈ (1692–1763))

– были известны ещё Эйлеру,
как число треугольников,
Эйлер вывел несколько формул.

Johann Andreas von Segner – получил рекуррентную формулу ↑
(1750е)

– называются в честь бельгийского
математика, который их использовал
для подсчёта всяких объектов.

← получил формулу
 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

Название закрепилось ≈ в 1970е,

