

# Построения циркулем и линейкой на сфере



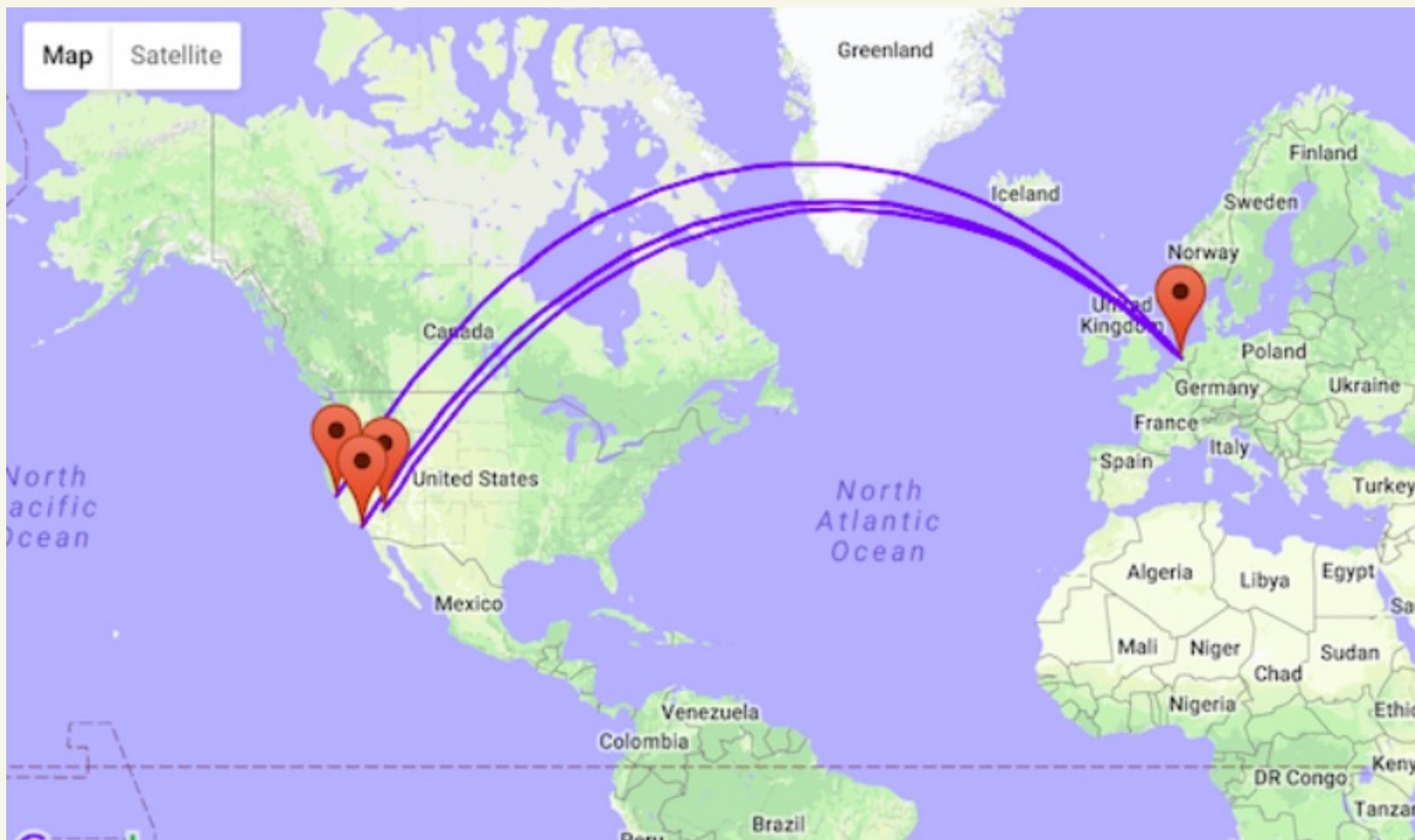
Альбрехт Дюрер (?)  
"Астроном", 1500, гравюра.





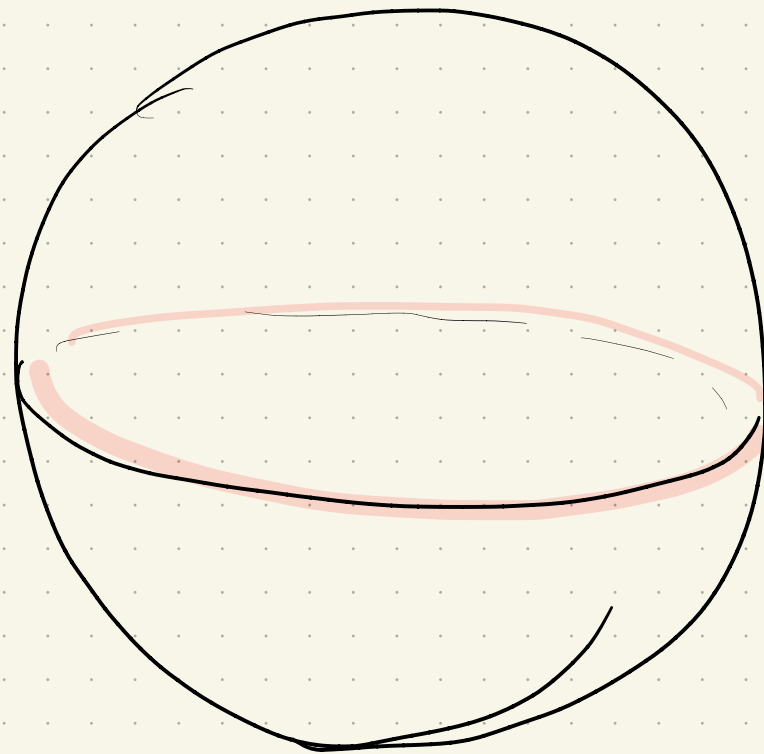
# Разминка самолётная

Почему самолёт из Европы в Америку летит над Гренландией?

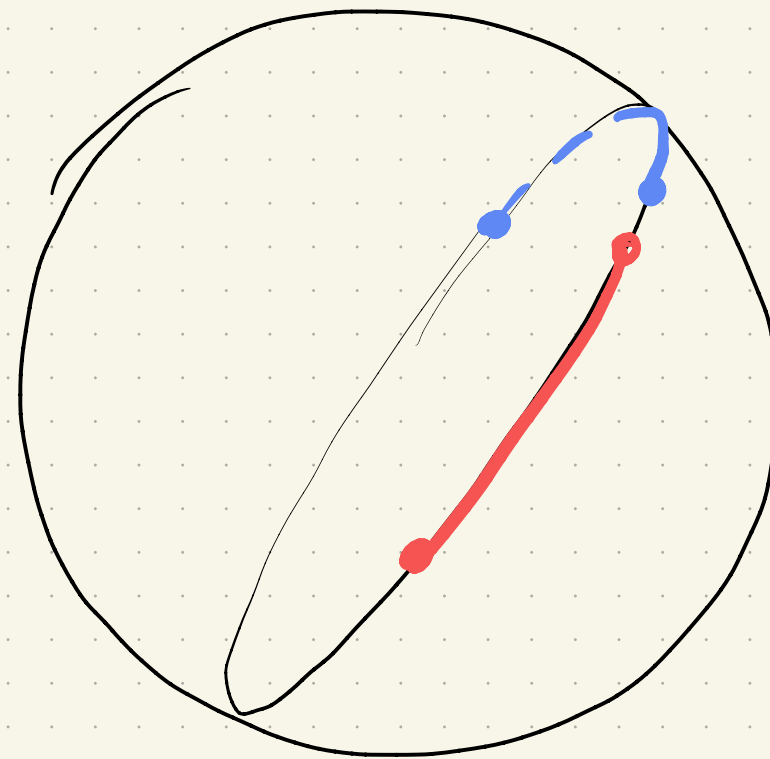




Кратчайшие пути по сфере:



экватор

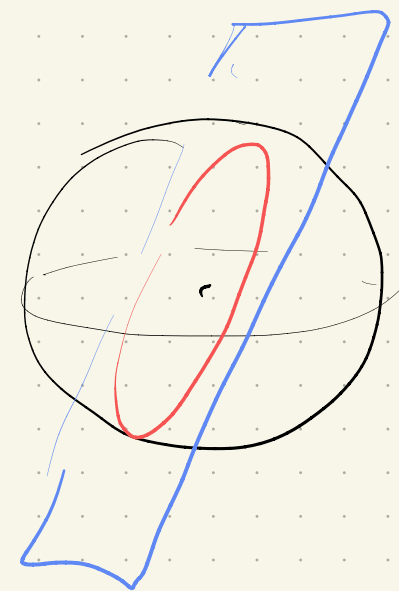


и любые его повороты

это

большие окружности

=



сечения сферы  
плоскостями,  
проходящими  
через центр.

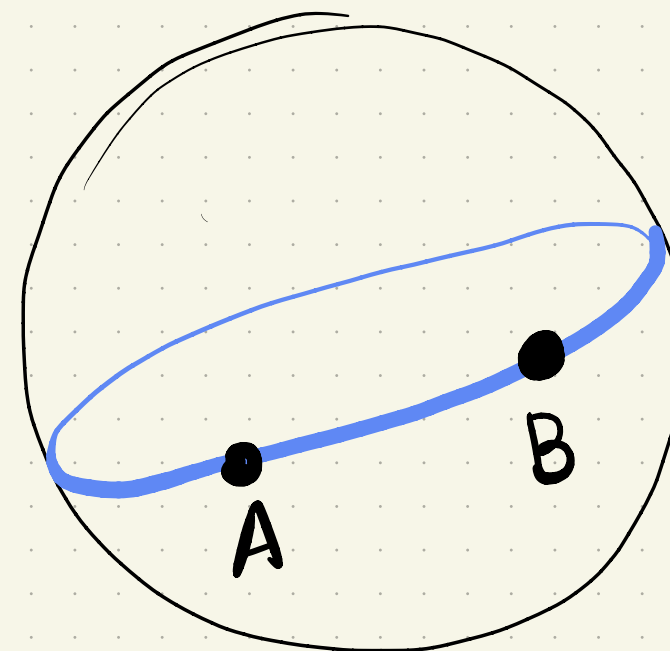
Мы их будем называть

сферическими прямыми



# Сферическая линейка:

проводит "сферическую прямую",  
т.е. большую окружность  
через заданные две точки

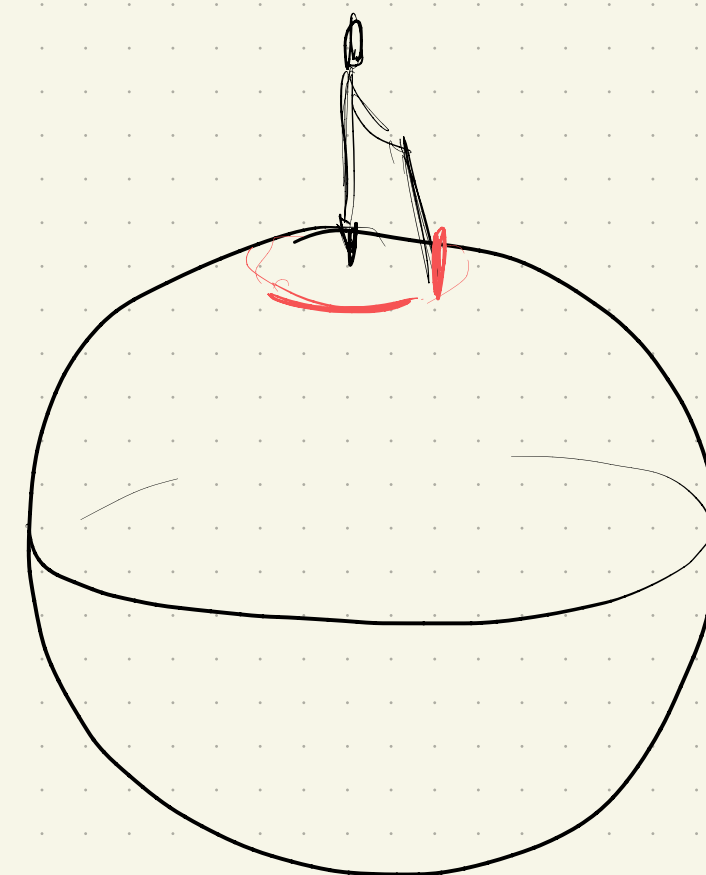


# Сферический циркуль:

рисует окружность

← точки на одинаковом  
расстоянии  
от центра

- с заданным центром и
- заданного радиуса





○ Какие простые построения на сфере можно сделать?

[как на плоскости]

(а)

— середина отрезка

— серединный перпендикуляр



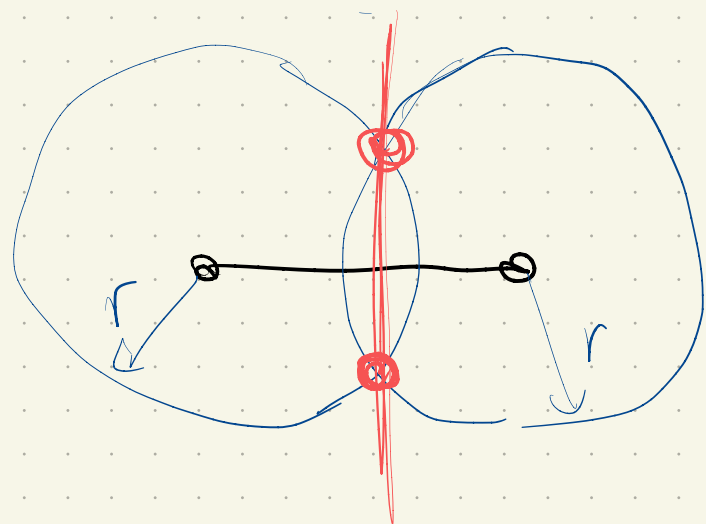
О Какие простые построения на сфере можно сделать?

[как на плоскости]

- (а)
- середина отрезка
  - серединный перпендикуляр

(б) — перпендикуляр  
к прямой  $l$   
через заданную точку  $A$

Решение:



Почему вышла  
середина и  $\perp$ ?  
(по симметрии)

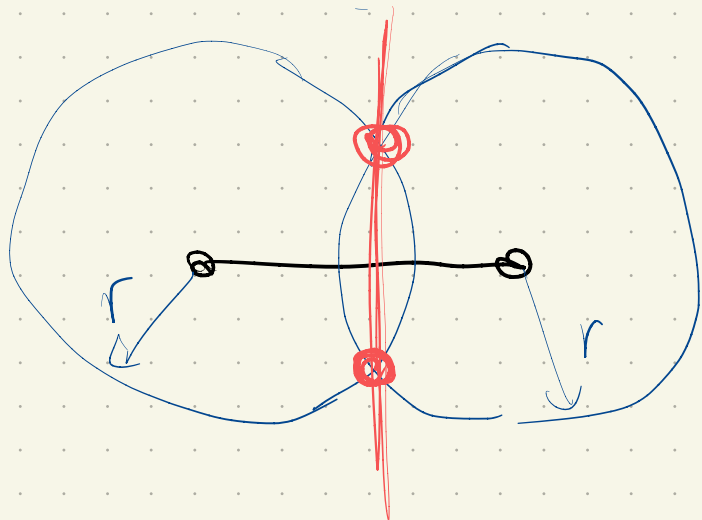


О Какие простые построения на сфере можно сделать?

[как на плоскости]

- (а)
- середина отрезка
  - серединный перпендикуляр

Решение:

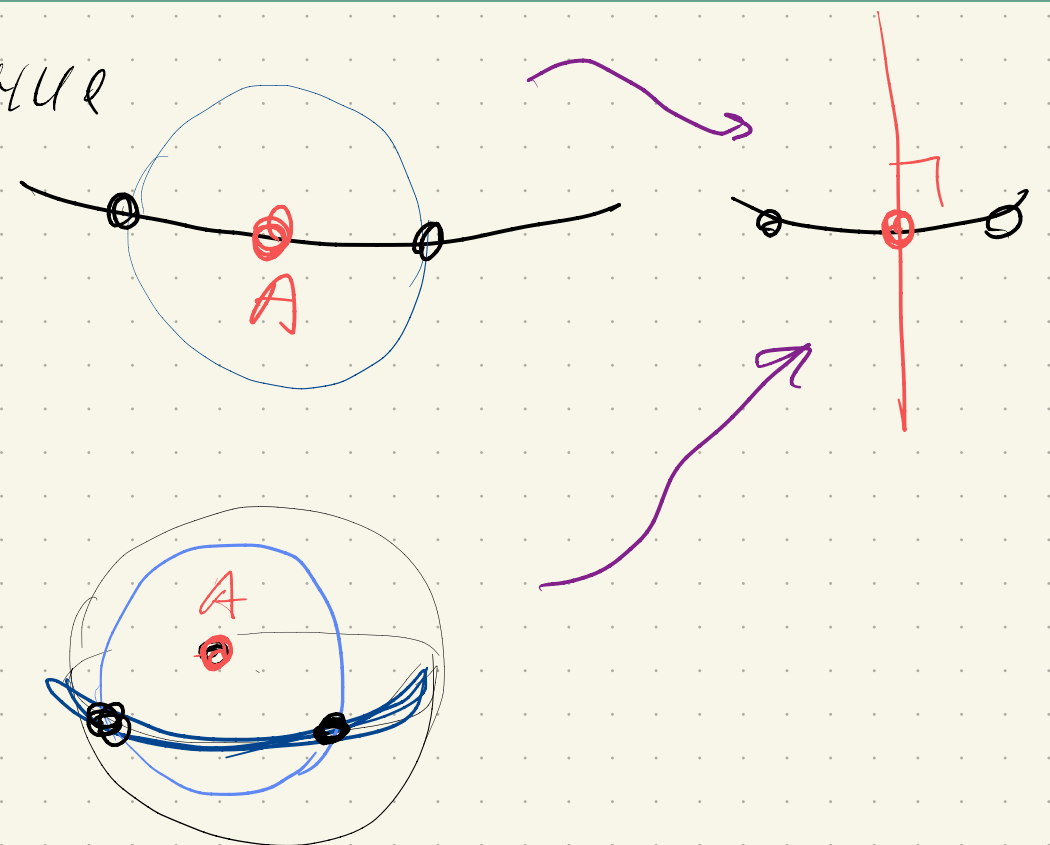


Почему вышла  
середина и  $\perp$ ?  
(по симметрии)

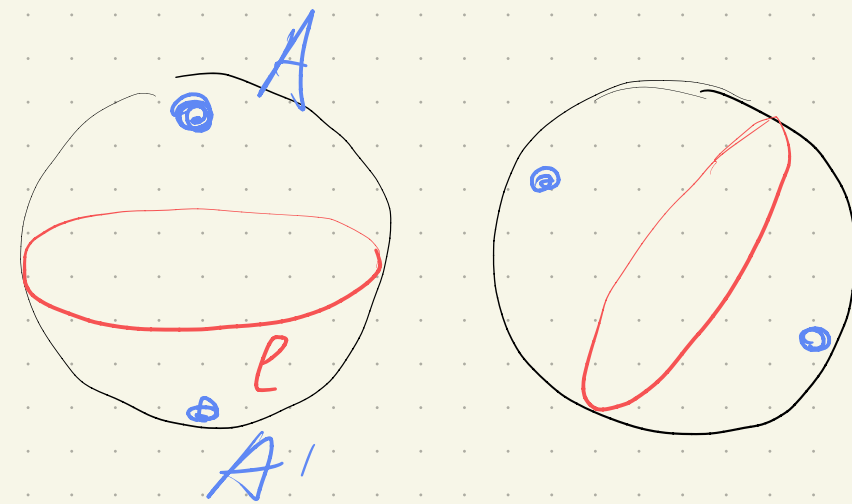
Не выйдет,  
если  $A$  — полюс,  
а  $\ell$  — экватор!

- (б) — перпендикуляр  
к прямой  $\ell$   
через заданную точку  $A$

Решение



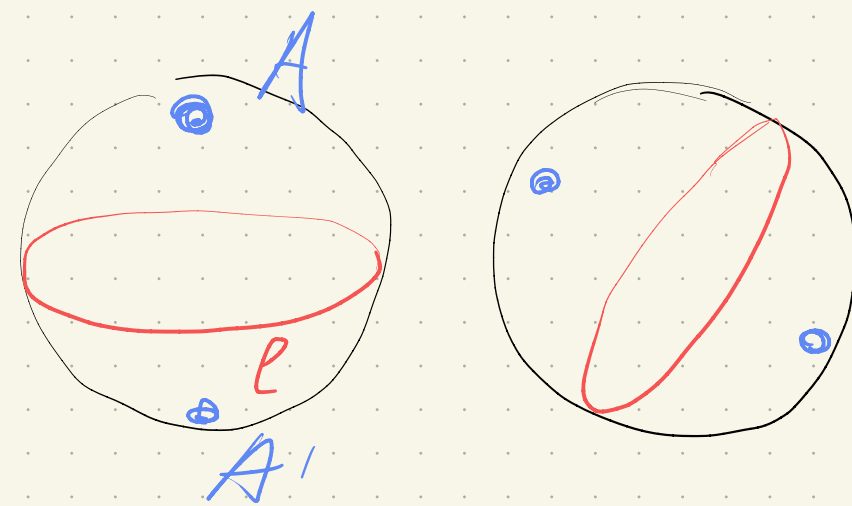
Пусть  $\ell$  - (сферическая) прямая  
Точка  $A$  называется **полярной** к  $\ell$ ,  
если от  $A$  одинаковое расстояние  
до всех точек  $\ell$ .



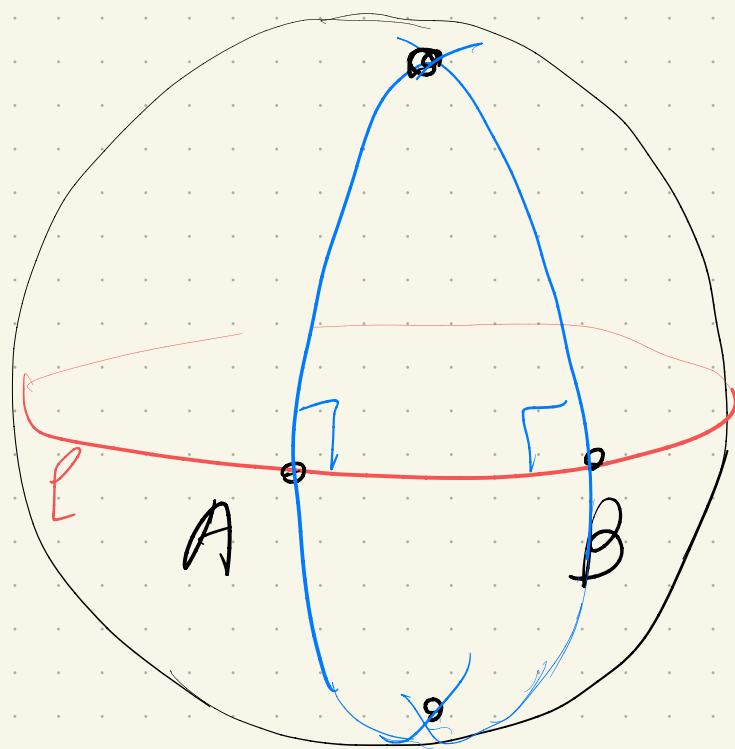
① На сфере дана прямая  $\ell$ .  
Как построить точку полярную к ней?



Пусть  $l$  - (сферическая) прямая  
Точка  $A$  называется **полярной** к  $l$ ,  
если от  $A$  одинаковое расстояние  
до всех точек  $l$ .



① На сфере дана прямая  $l$ .  
Как построить точку полярную к ней?



Решение:

- выберем любые две точки  $A$  и  $B$  на  $l$ .
- построим через них перпендикуляры к  $l$ .
- получившиеся меридианы пересекутся в полюсах,

Хотим: построить вершины

правильных многогранников:

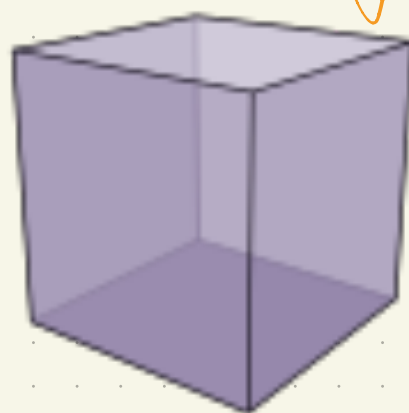
Тетраэдр



Октаэдр



Куб



Додекаэдр

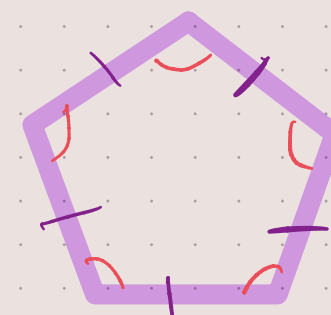


Икосаэдр



Правильные многоугольники:

- все стороны равны
- все углы равны

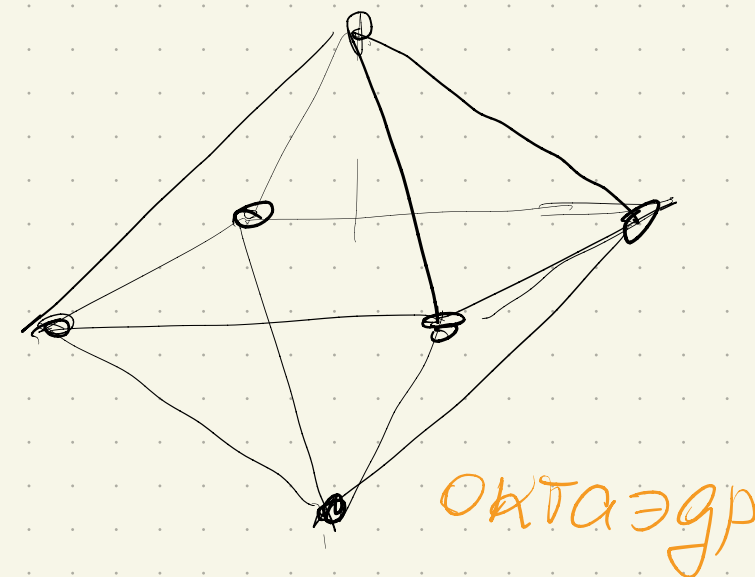


Правильные многогранники:

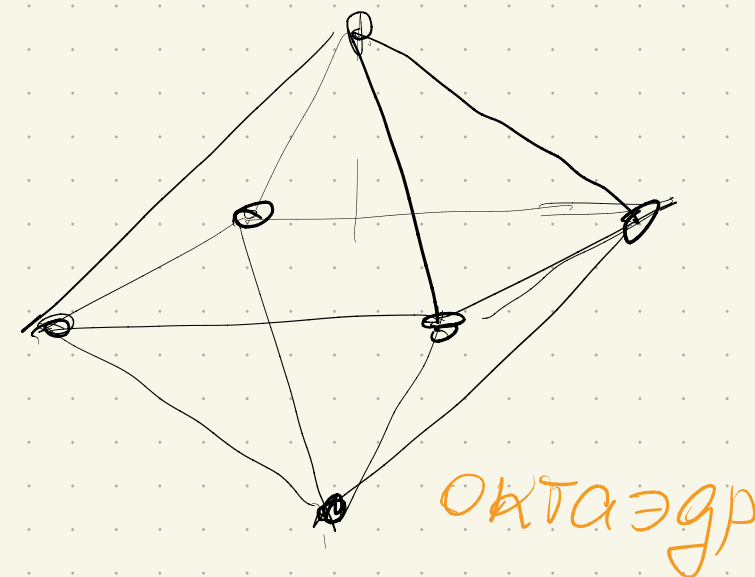
- грани = одинаковые правильные многоугольники
- углы между гранями равны.



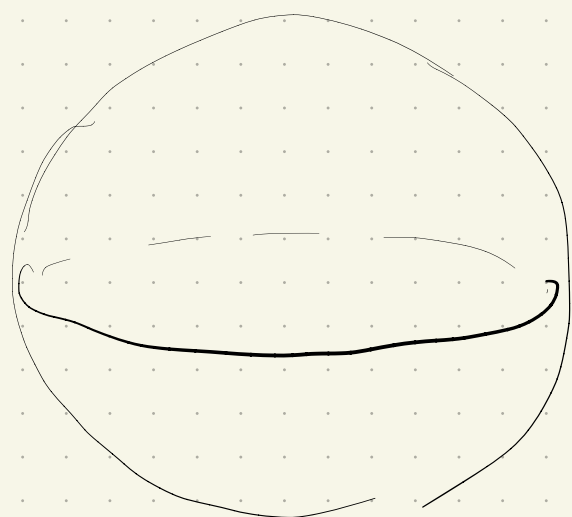
② Постройте вершины октаэдра



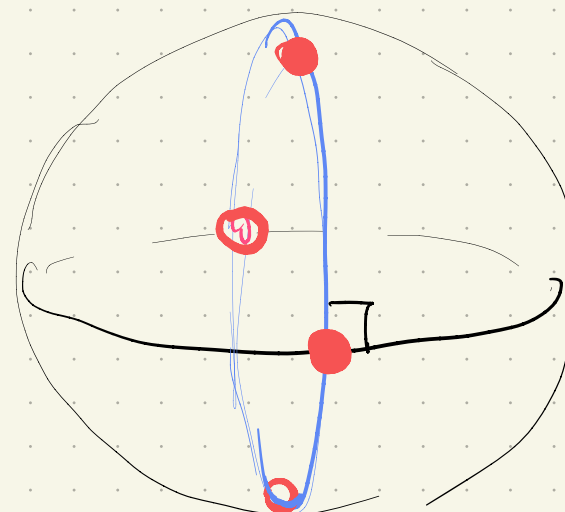
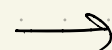
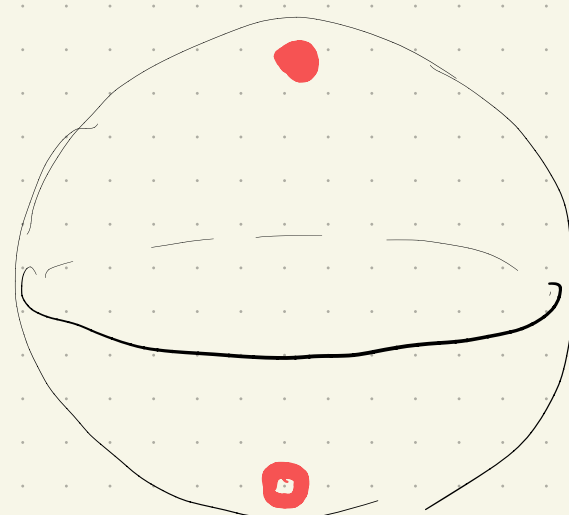
② Постройте вершины октаэдра



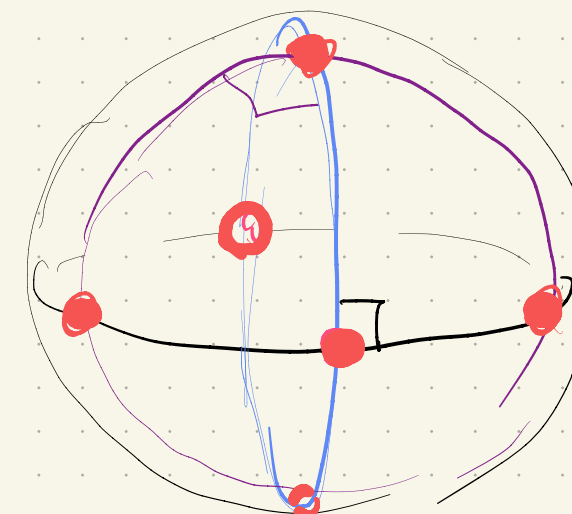
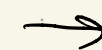
Решение :



любая прямая



любая прямая  
через полюс

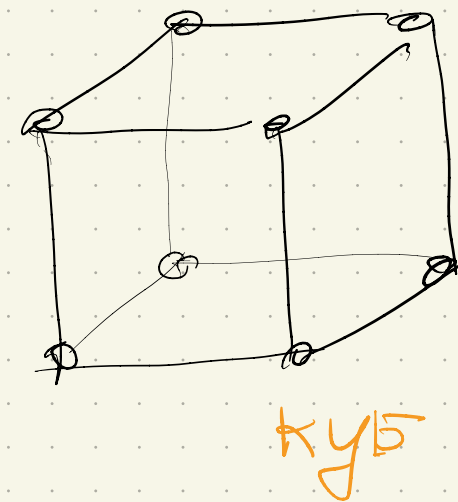


перпендикулярная  
к ней прямая



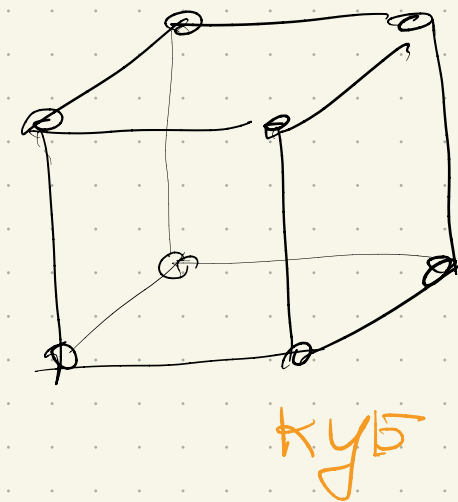
③ Постройте вершины куба.

(Подсказка: используйте уже построенные вершины октаэдра)

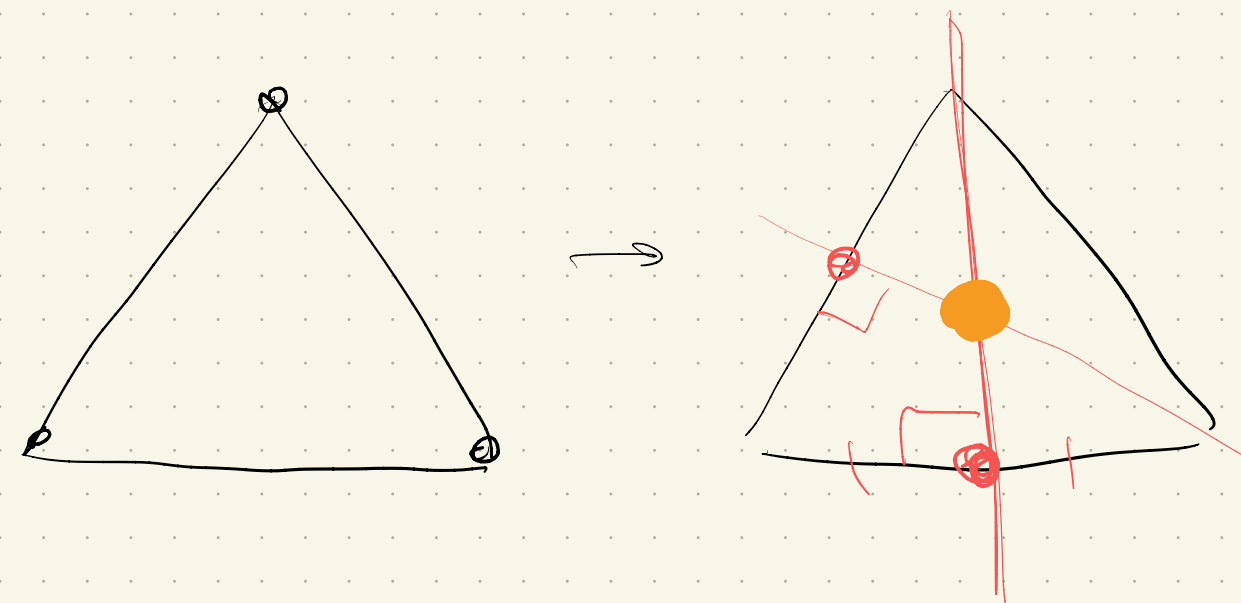
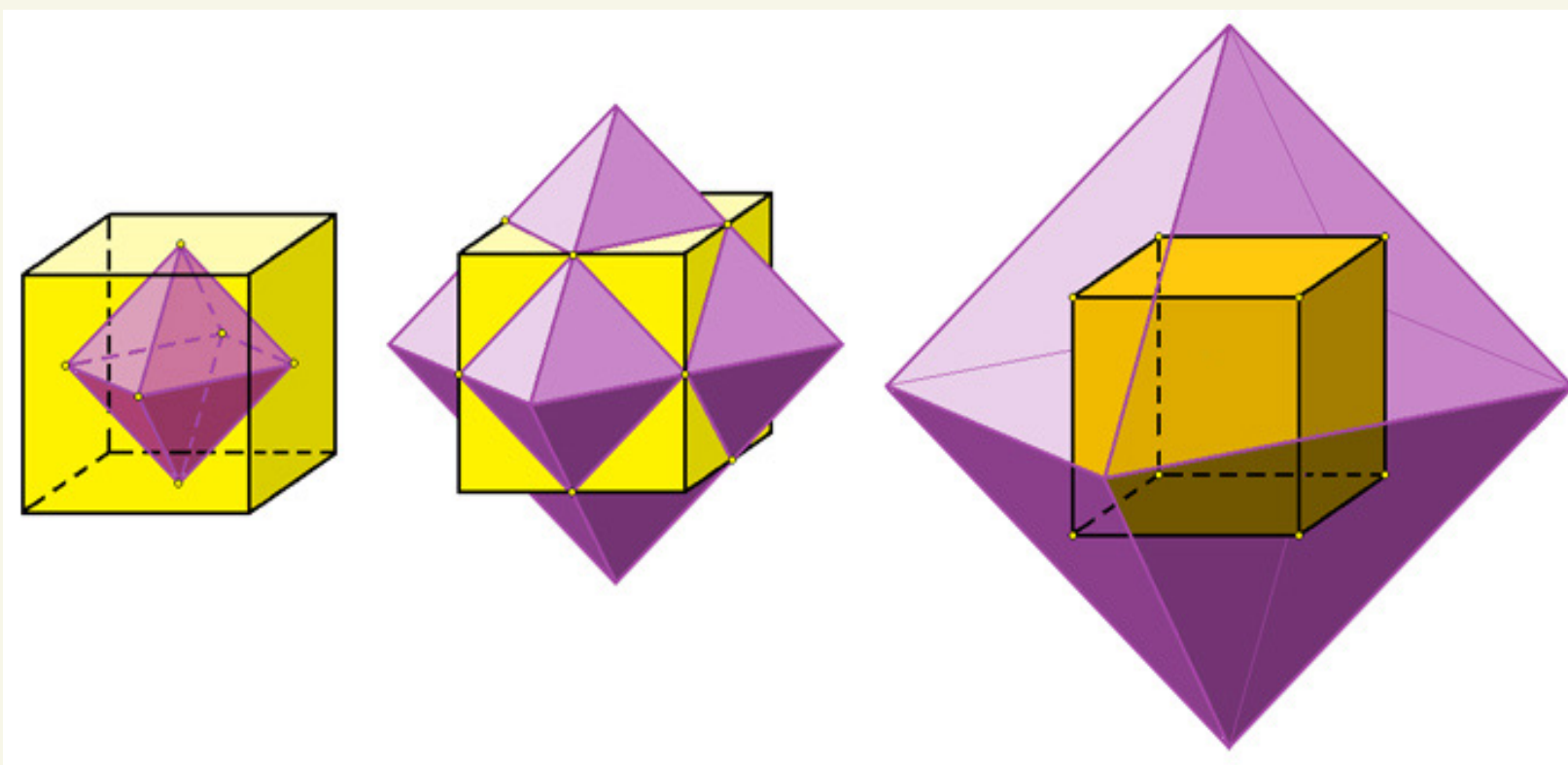


③ Постройте вершины куба.

(Подсказка: используйте уже построенные вершины октаэдра)

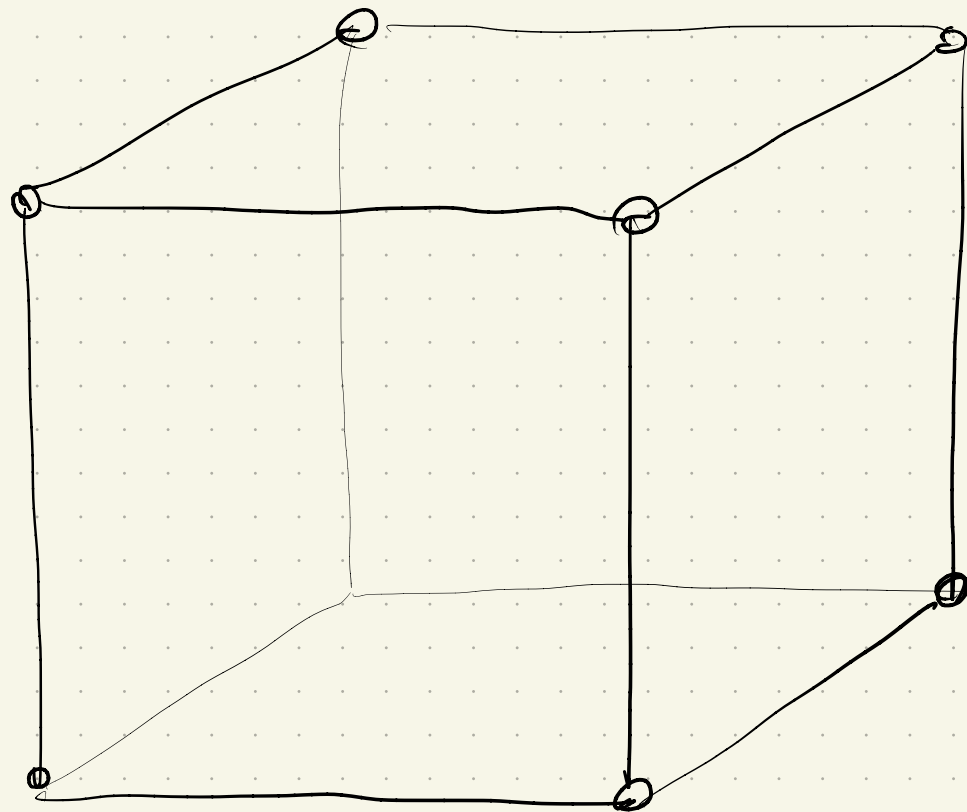
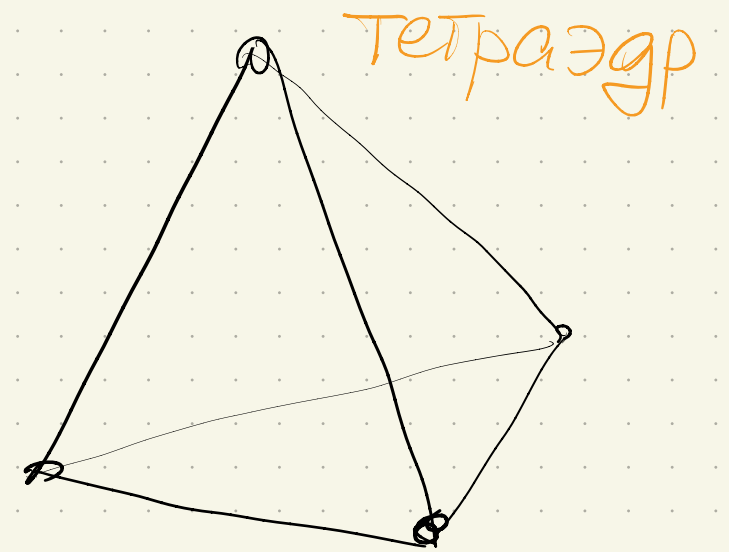


Решение: Достаточно построить центры треугольников:



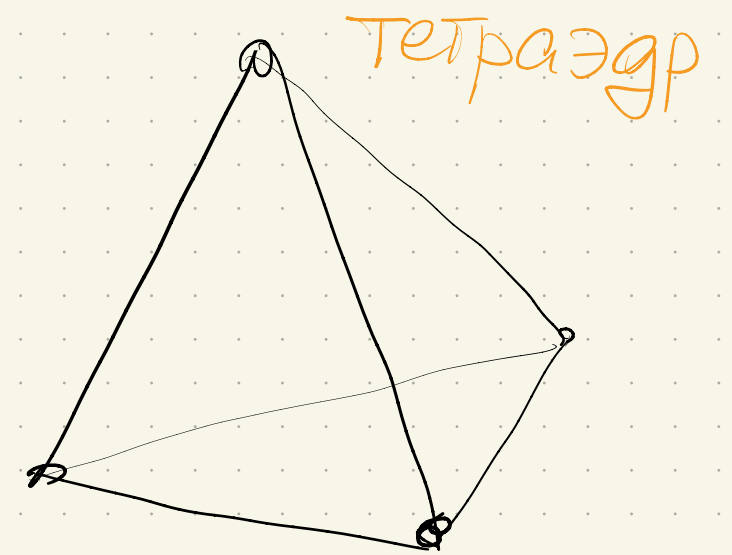
Двойственные куб и октаэдр

4 Используя вершины куба,  
постройте вершины  
правильного тетраэдра

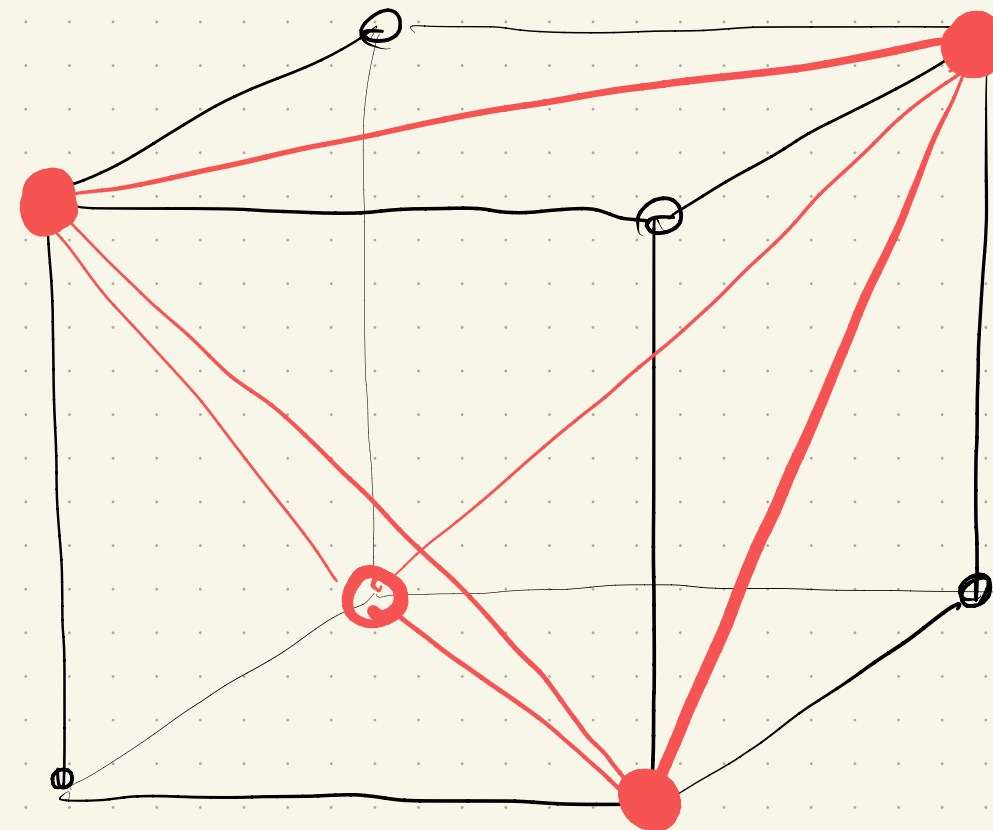
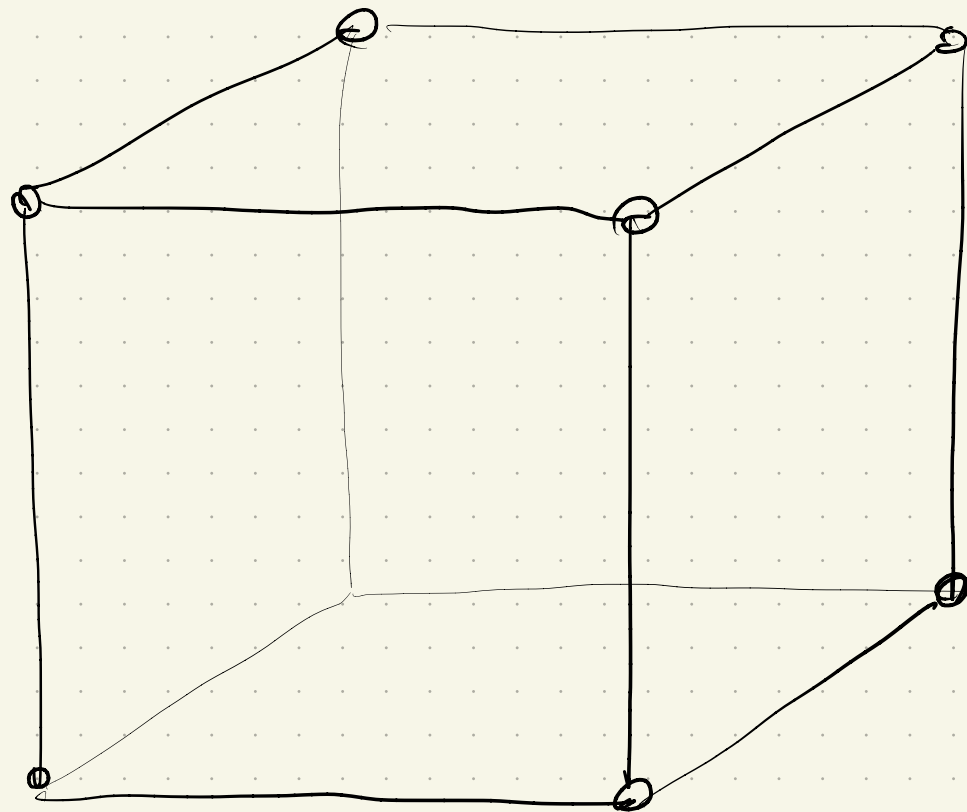




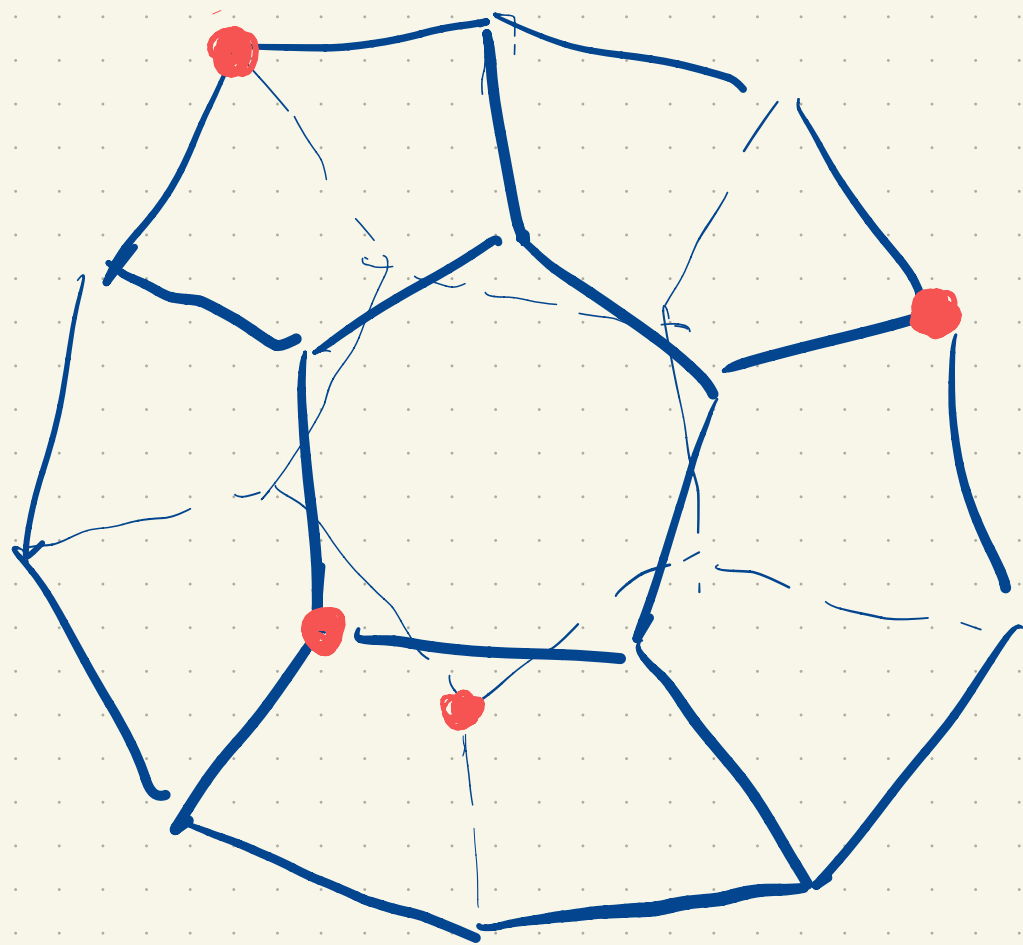
4 Используя вершины куба, постройте вершины правильного тетраэдра



Решение:

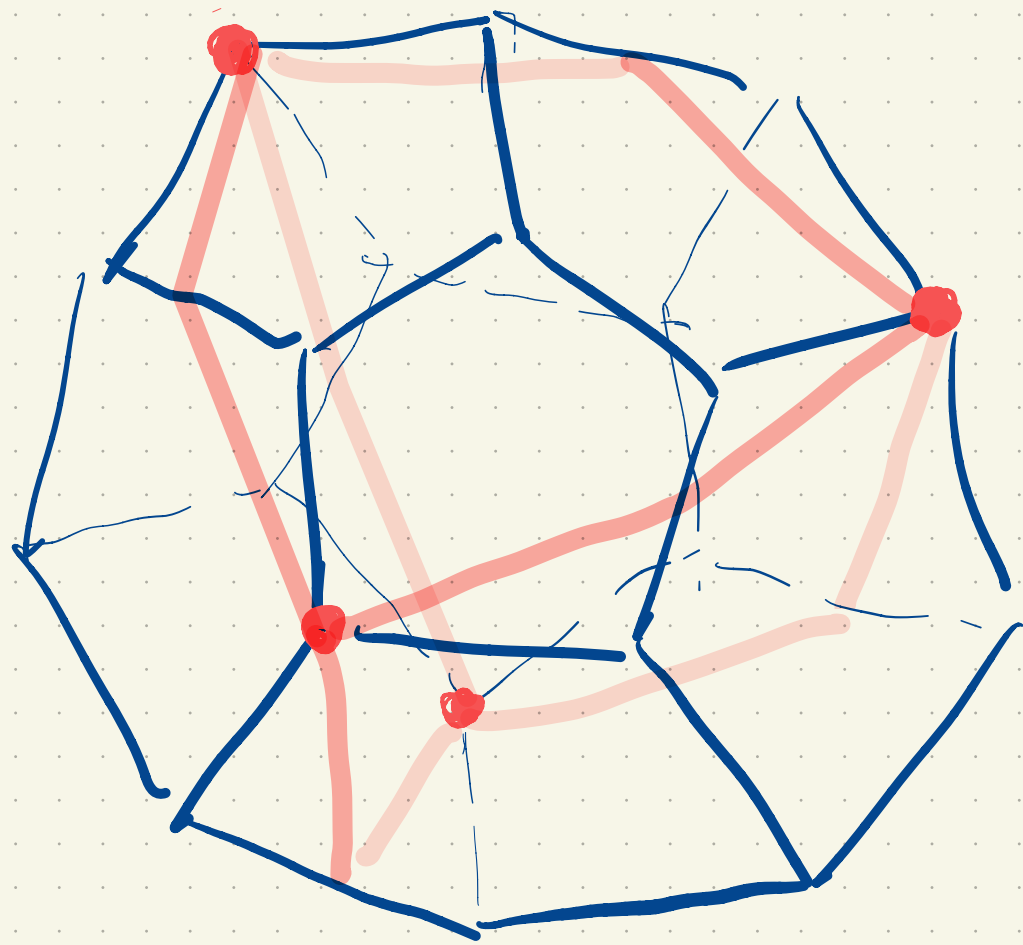


5) Покажите, что выделенные вершины додекаэдра образуют правильный тетраэдр.



тетраэдр в  
додекаэдре

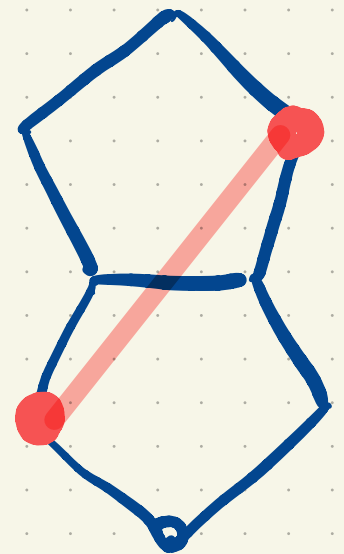
5) Покажите, что выделенные вершины додекаэдра образуют правильный тетраэдр.



Тетраэдр в  
Додекаэдре

Решение:

любые две красных  
вершины лежат в  
соседних гранях:

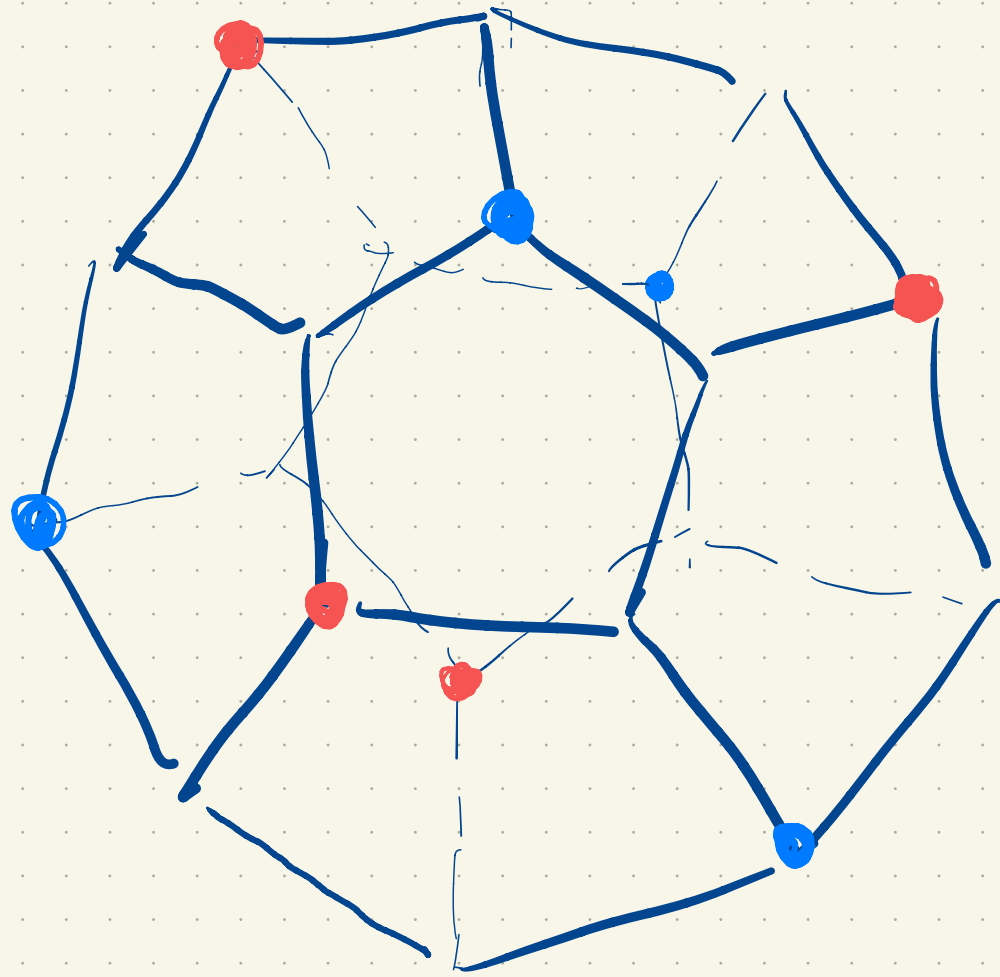




6) Покажите, что синие вершины образуют двойственный тетраэдр \* красному.



двойственные  
тетраэдры

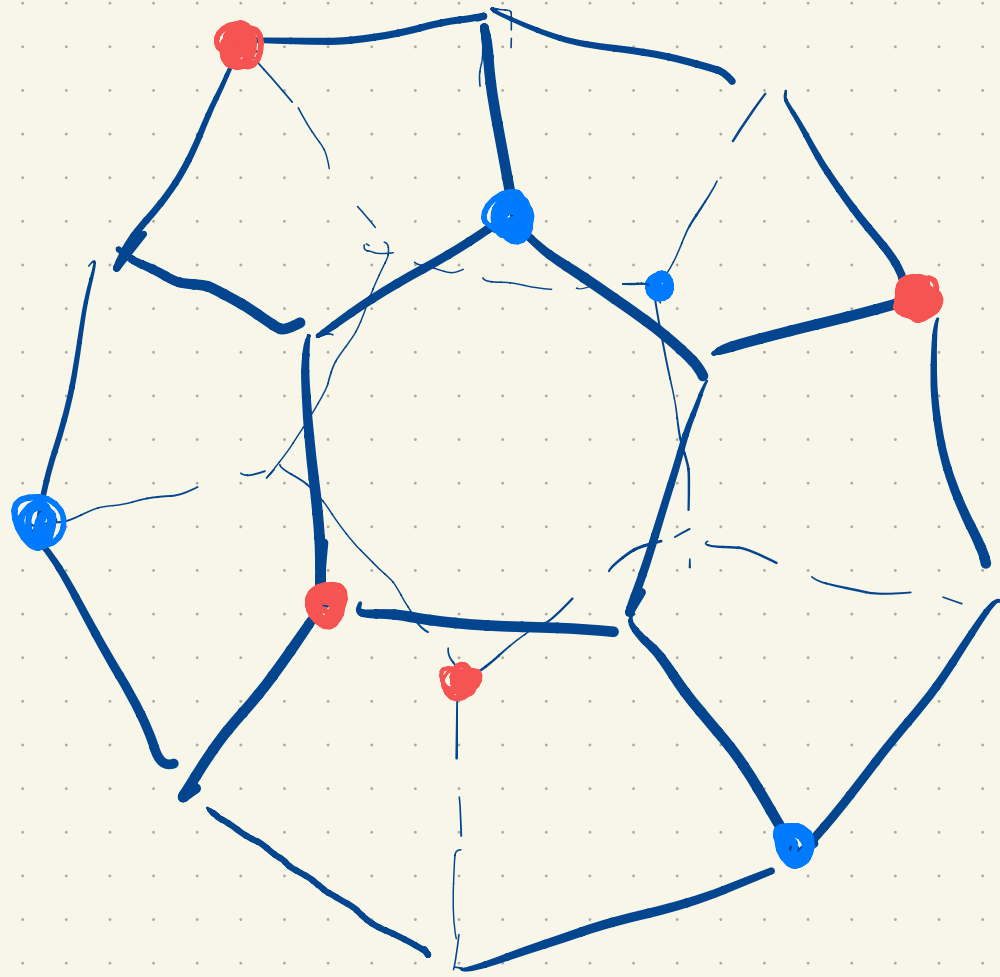


додэкаэдр

6) Покажите, что синие вершины образуют двойственный тетраэдр \* красному.



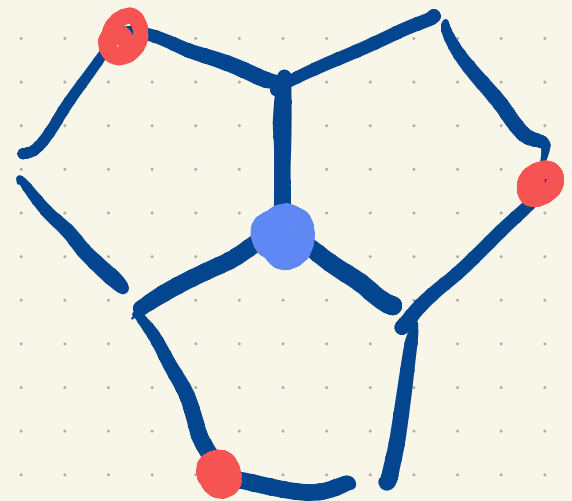
двойственные  
тетраэдры



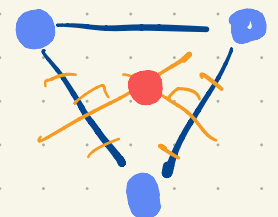
Додекаэдр

Решение:

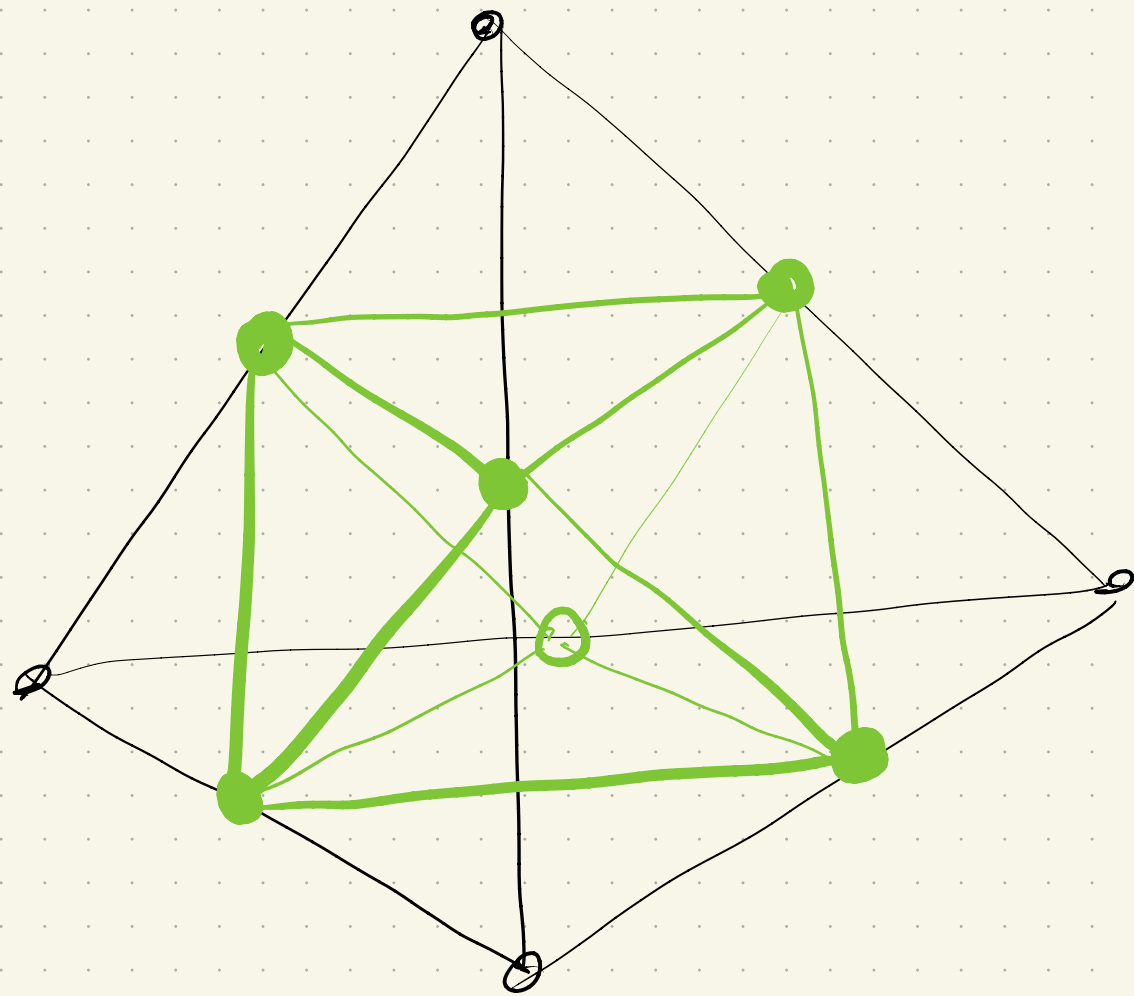
Поворот на  $120^\circ$   
вокруг синей вершины  
переводит вершины  
красного треугольника  
друг в друга.



6' Как по вершинам тетраэдра построить вершины двойственного тетраэдра?

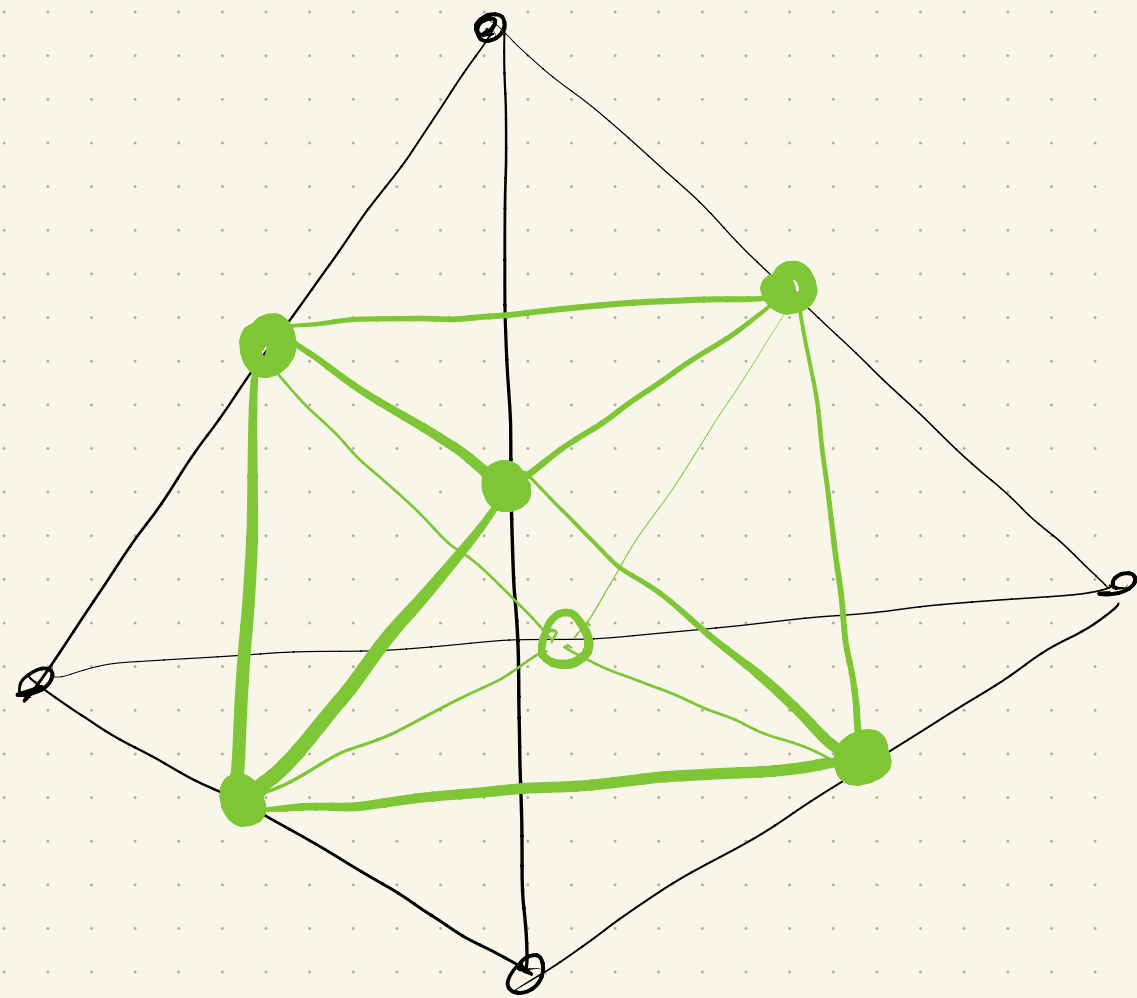


7 Покажите, что середины рёбер правильной тетраэдра образуют правильный октаэдр.



Октаэдр в тетраэдре

7 Покажите, что середины рёбер правильного тетраэдра образуют правильный октаэдр.



Октаэдр в тетраэдре

Решение:

по симметрии видно, что:

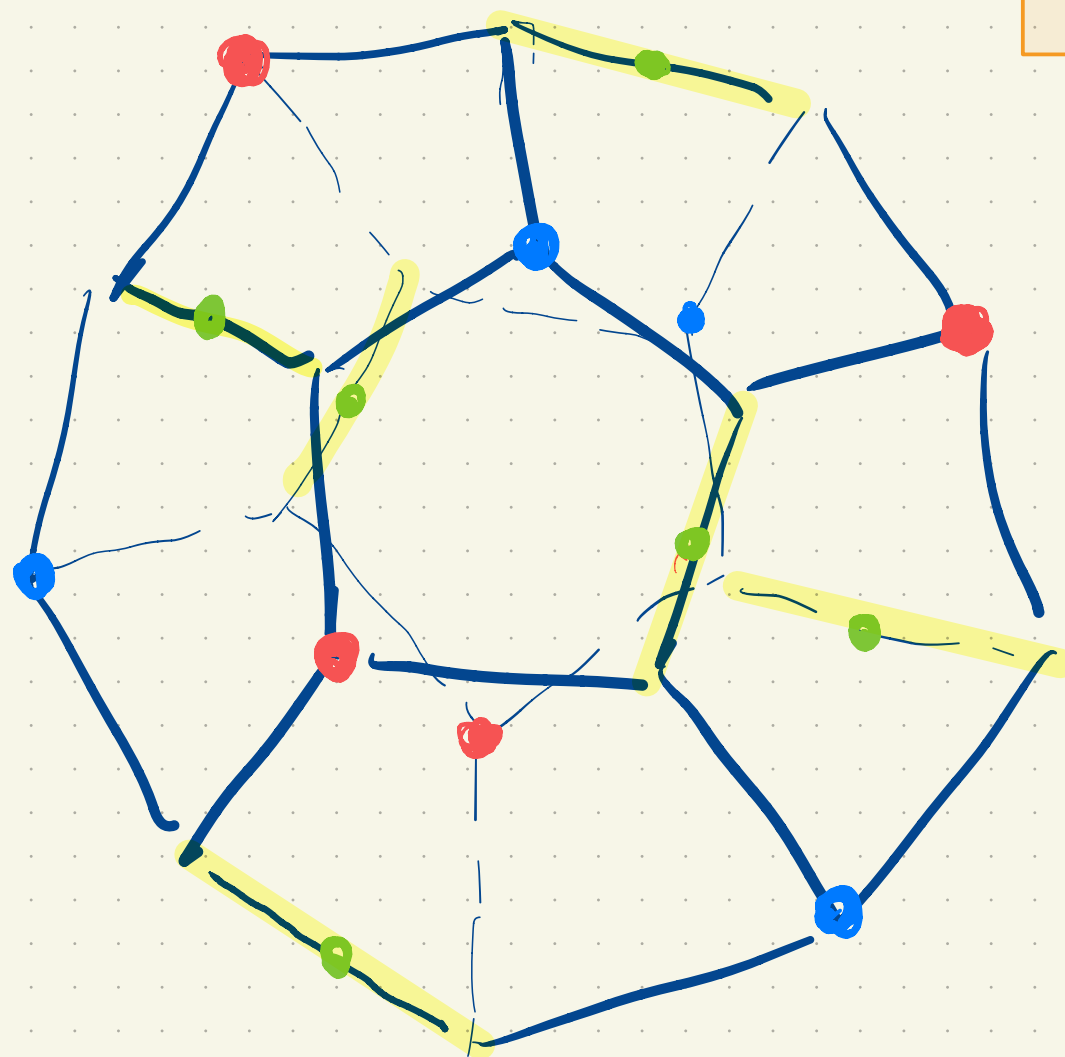
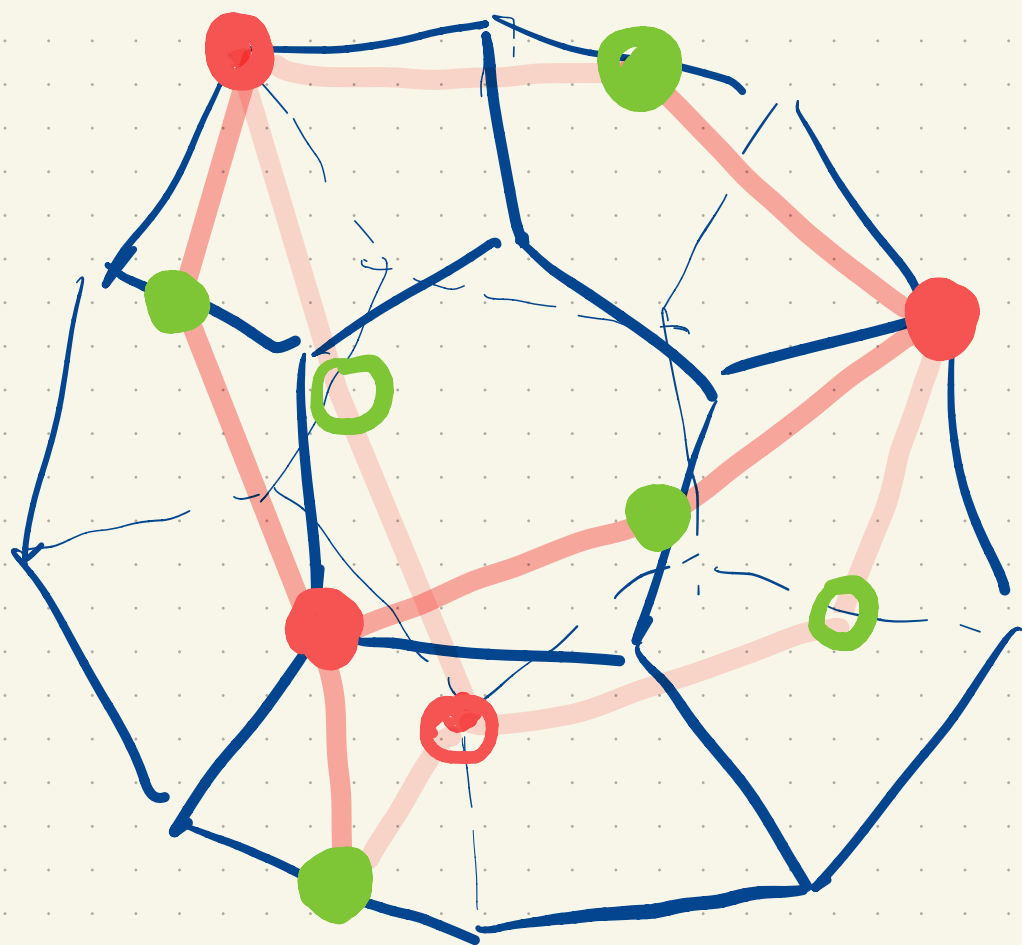
- Все грани октаэдра — правильные треугольники одинакового размера.
- двугранные углы между соседними треугольниками одинаковы.



Построим октаэдр из красного тетраэдра,  
как в задаче 7.

Замечание: он совпадет с октаэдром,  
полученным из синего тетраэдра.

⑧ Почему?



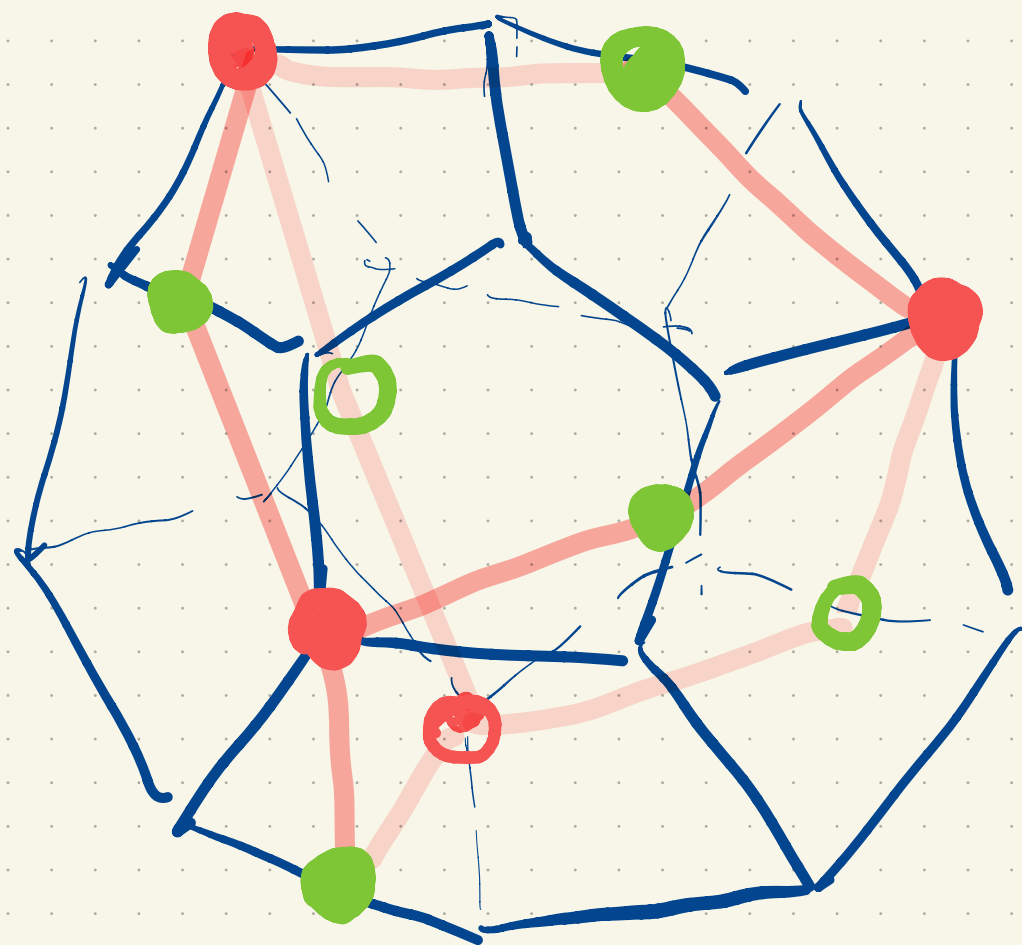
Октаэдр в додекаэдре

Построим октаэдр из красного тетраэдра,  
как в задаче 7.

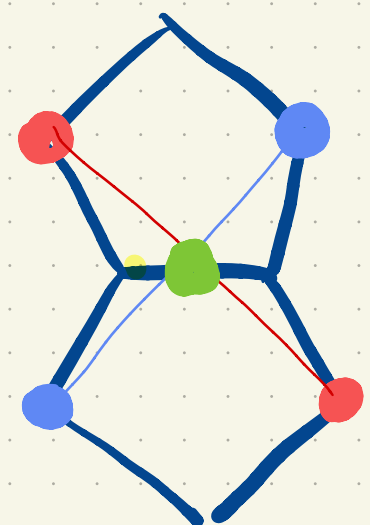
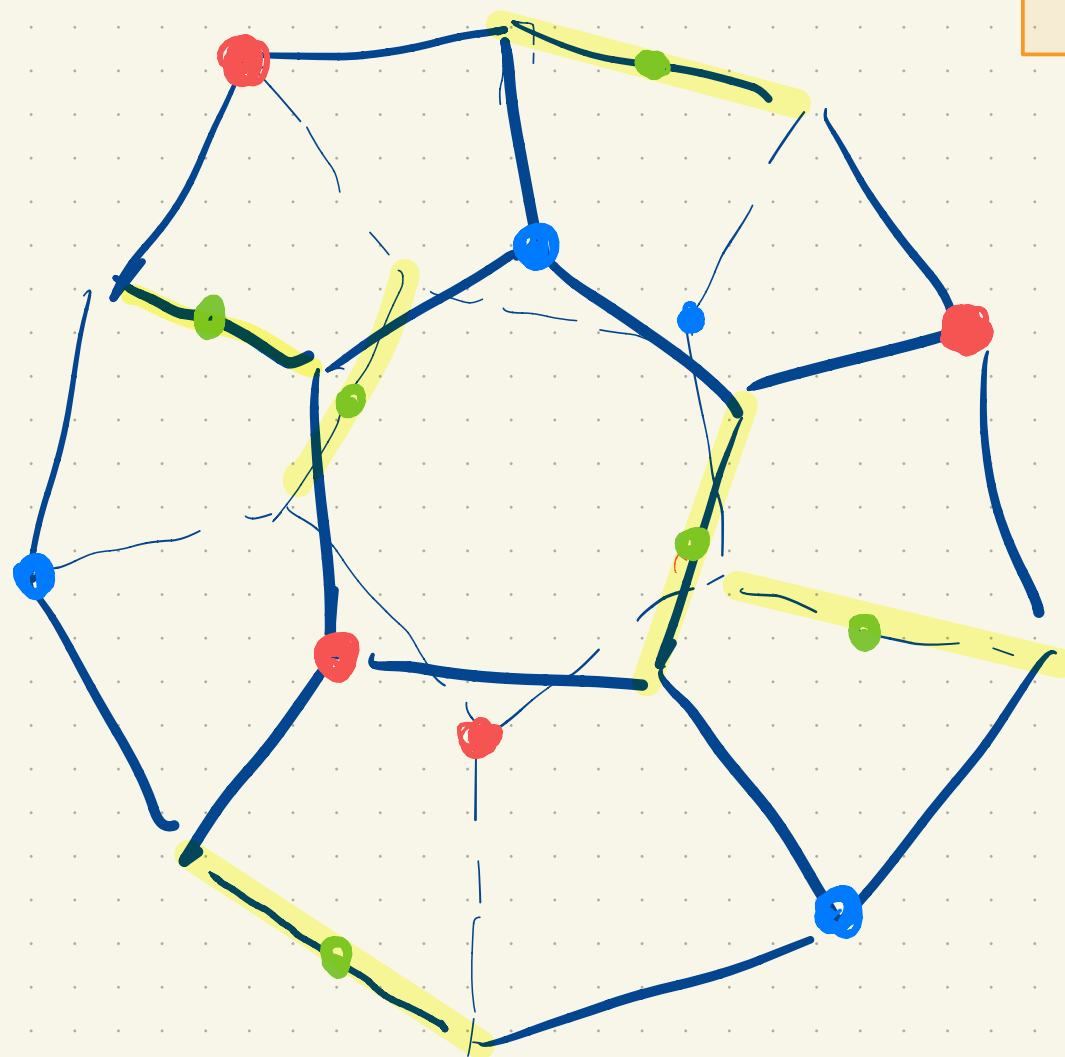
Замечание: он совпадет с октаэдром,  
полученным из синего тетраэдра.

⑧ Почему?

Решение:

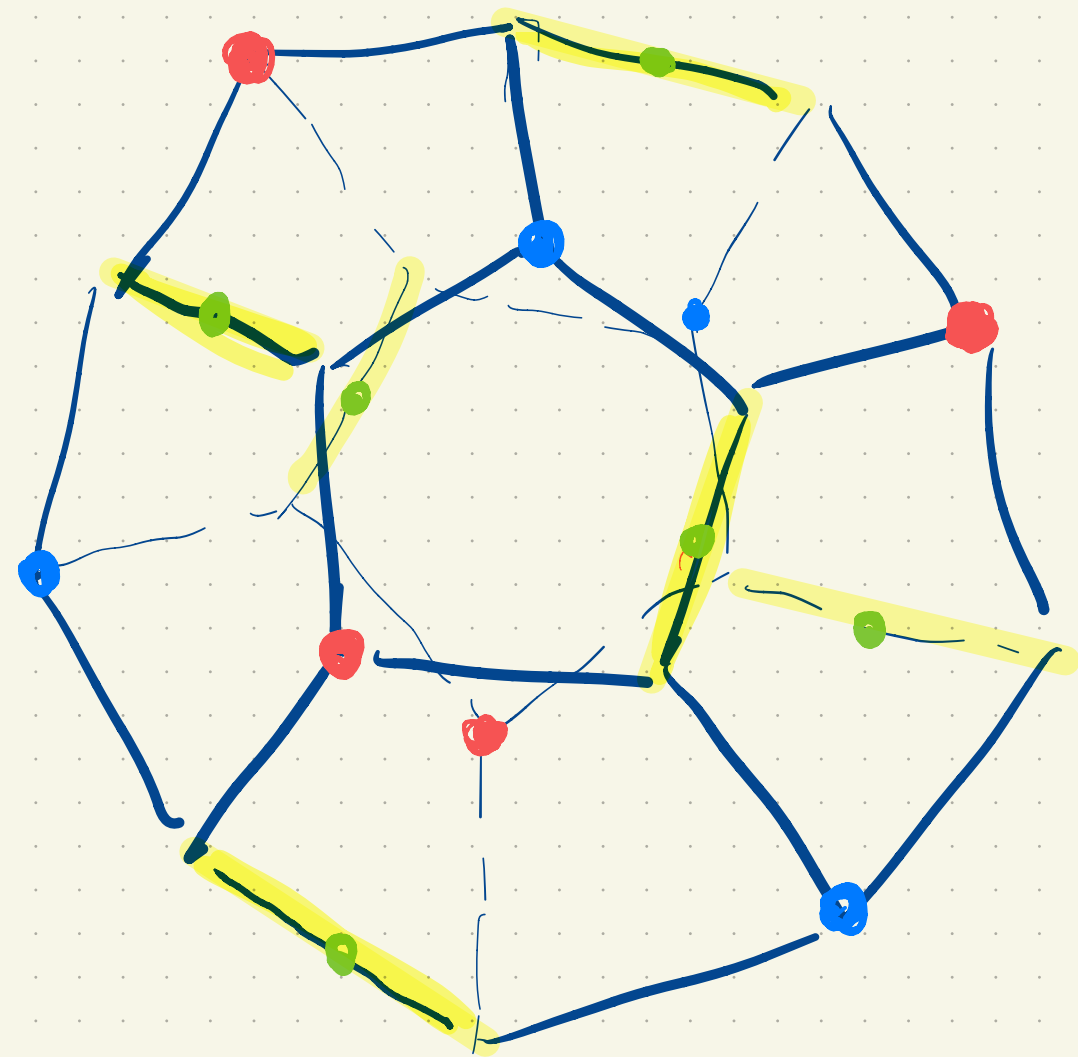


Октаэдр в додекаэдре



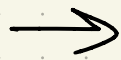
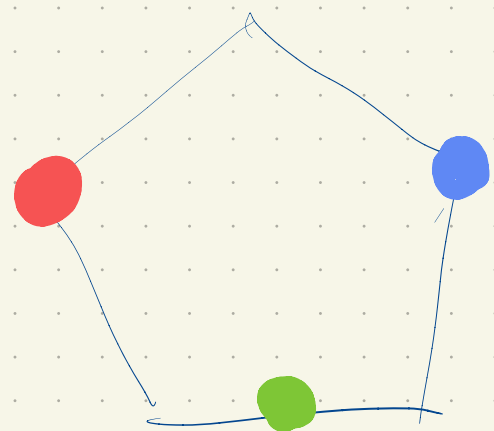
середина  
общего ребра

9) Как по красным, синим  
и зелёным вершинам  
восстановить жёлтые рёбра?

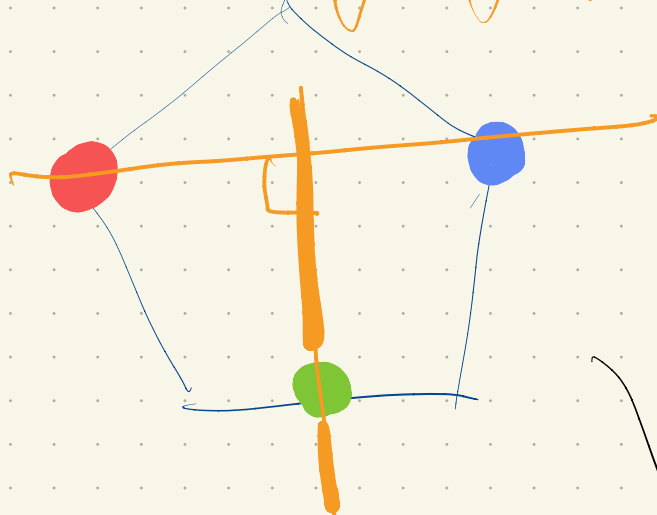


9) Как по **красным**, **синим**  
и **зеленым** вершинам  
восстановить **жёлтые** рёбра?

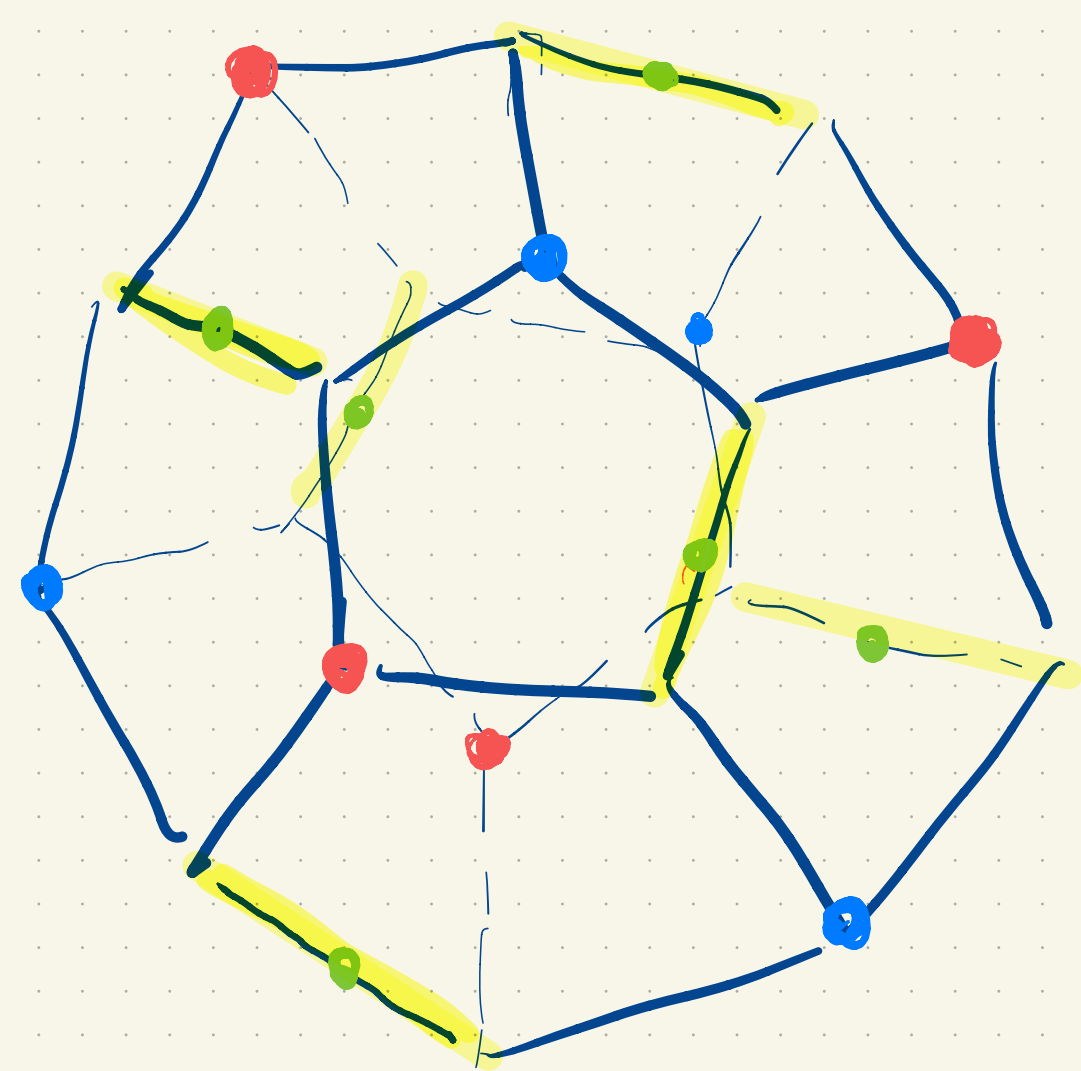
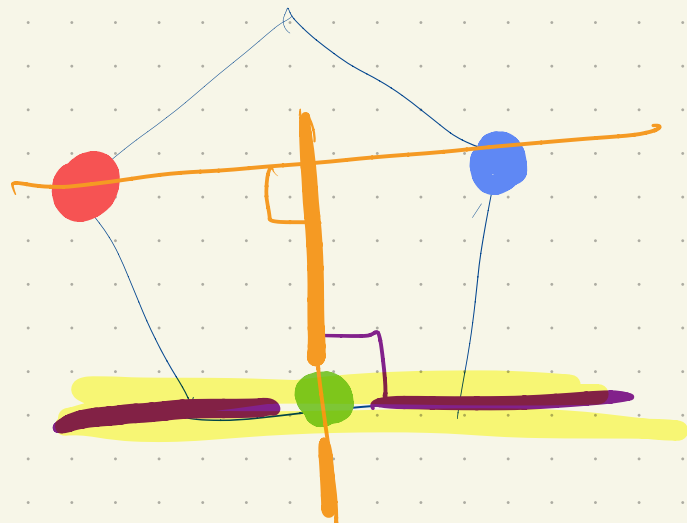
Решение:



серединный  
перпендикуляр



перпендикуляр

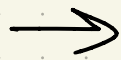
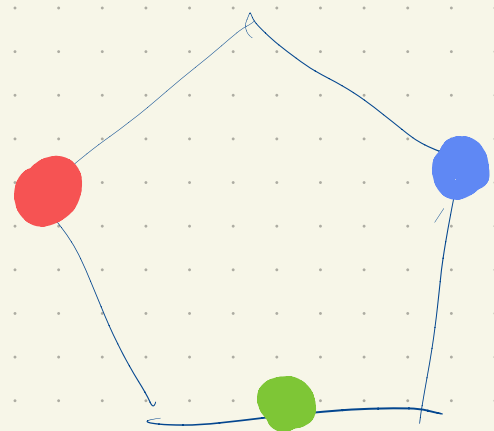


10) Как найти оставшиеся  
вершины?

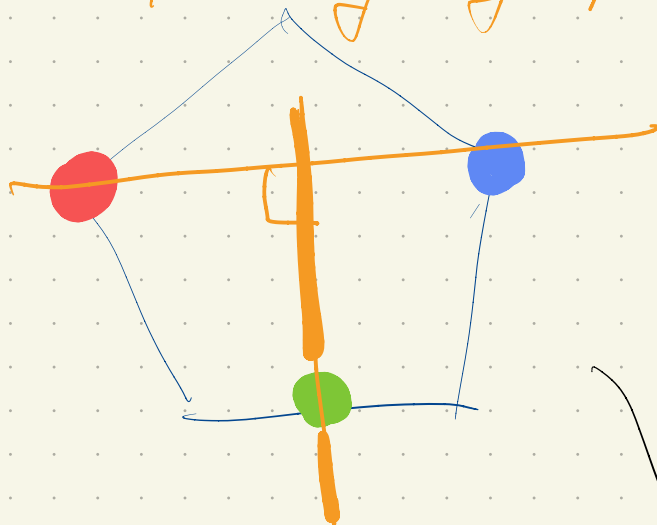


9 Как по красным, синим  
и зелёным вершинам  
восстановить жёлтые рёбра?

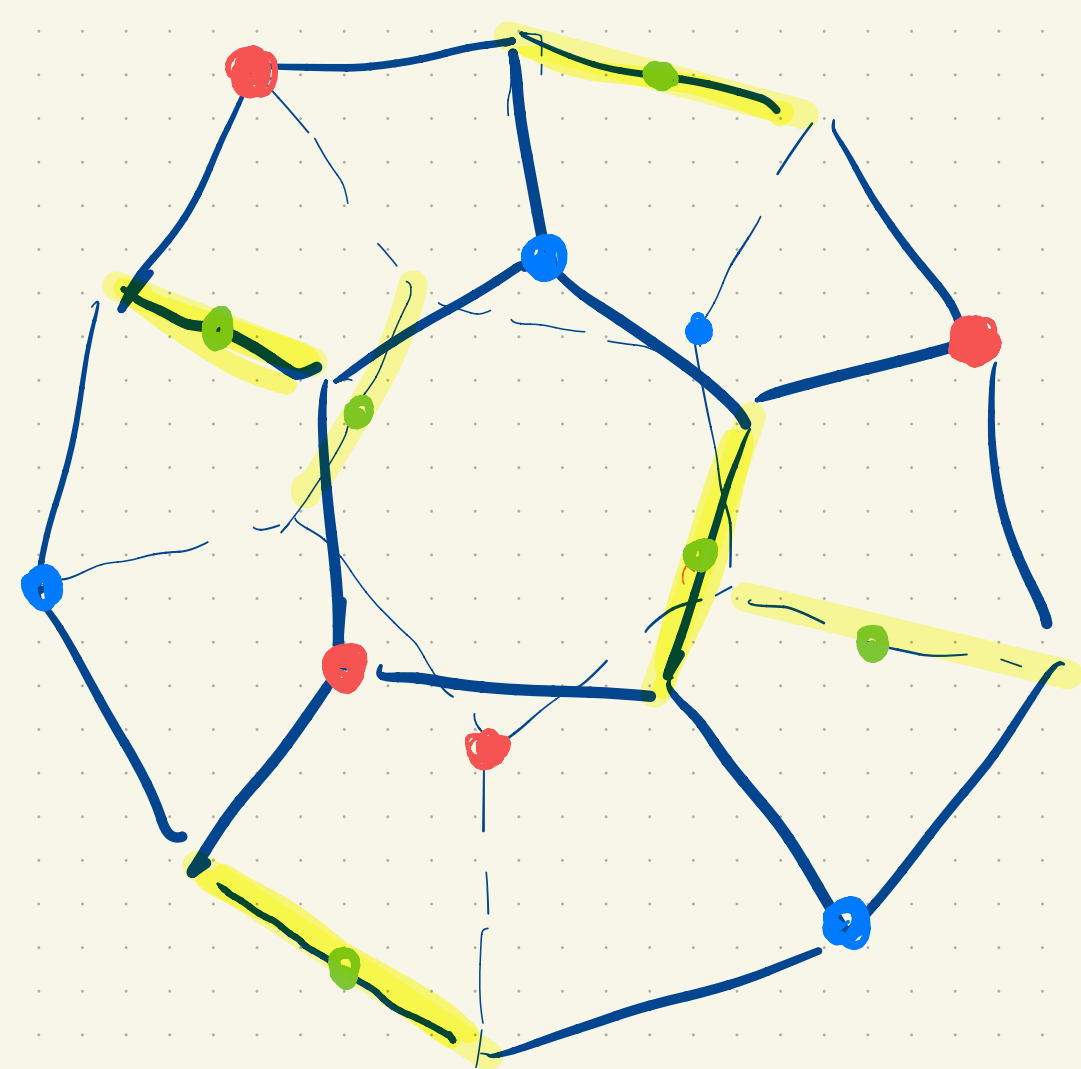
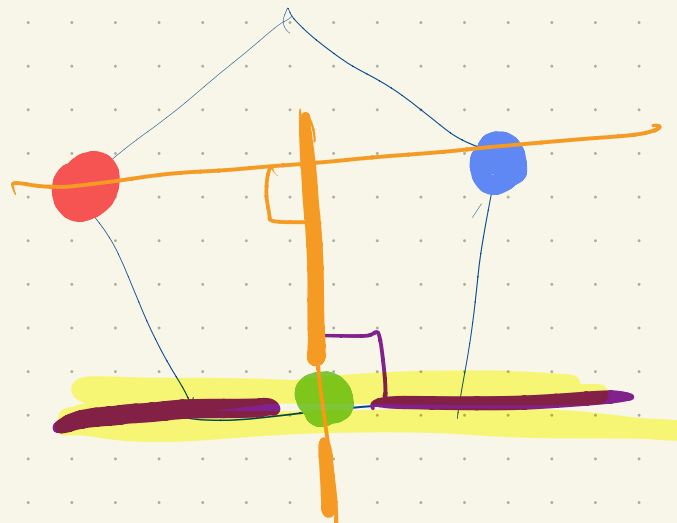
Решение:



серединный  
перпендикуляр

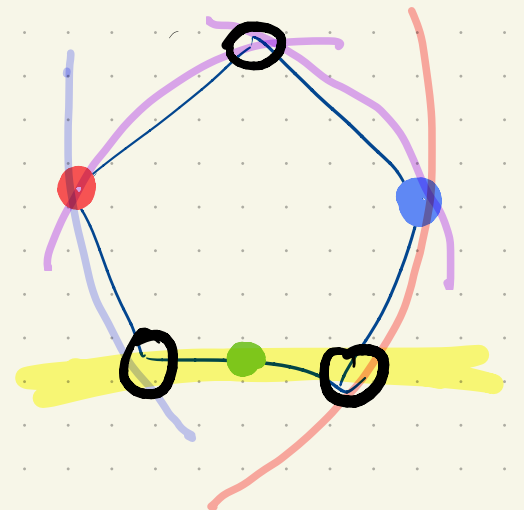
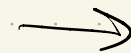
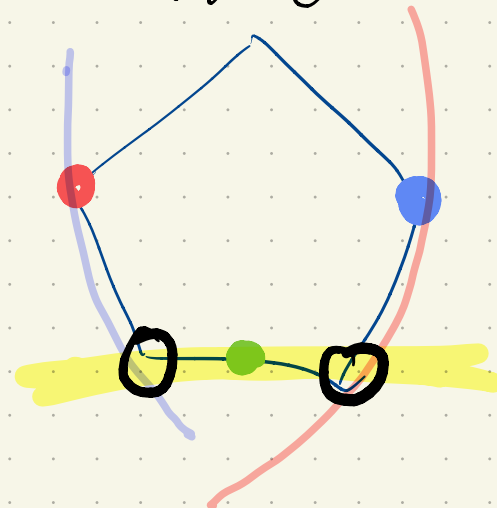


перпендикуляр



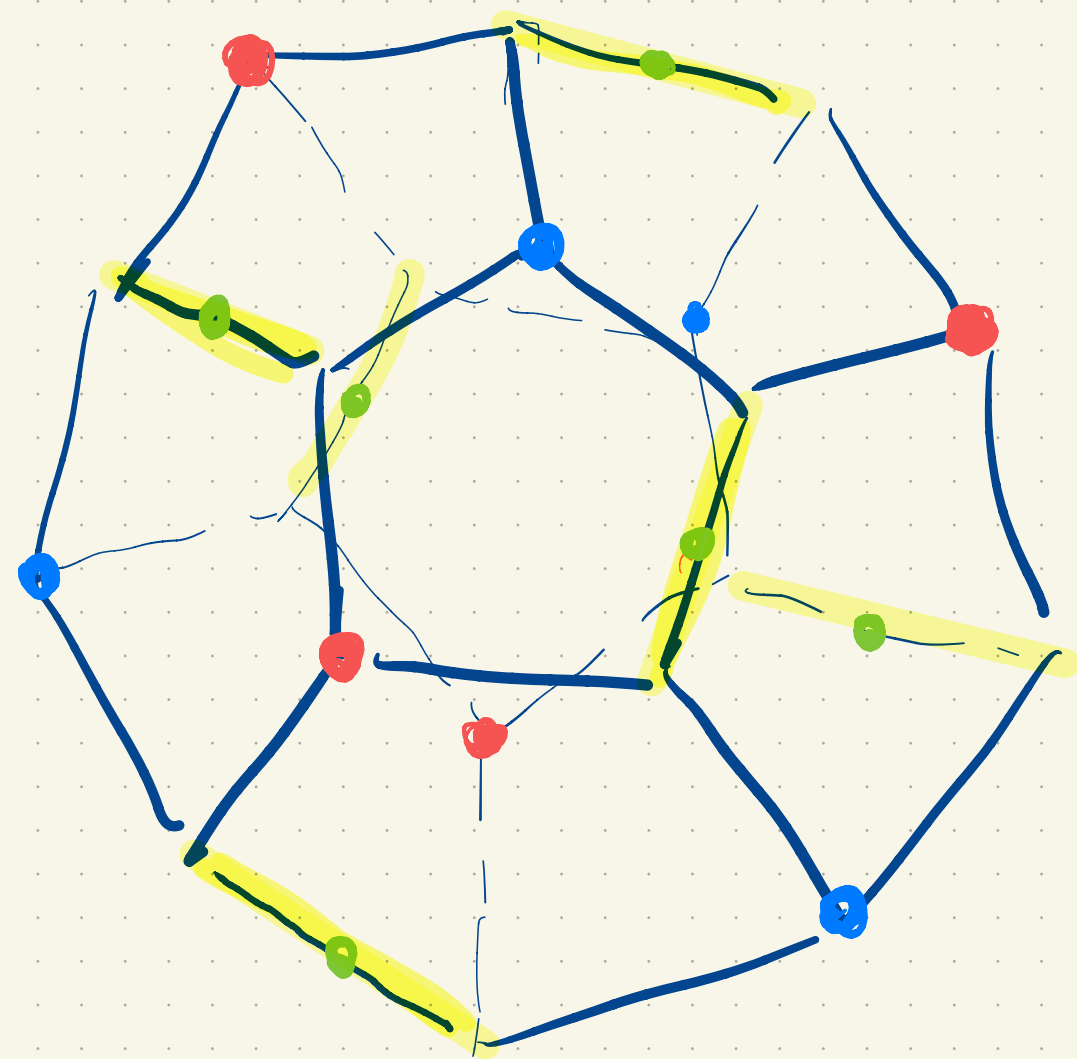
10 Как найти оставшиеся  
вершины?

Решение:



11 Постройте вершины икосаэдра.

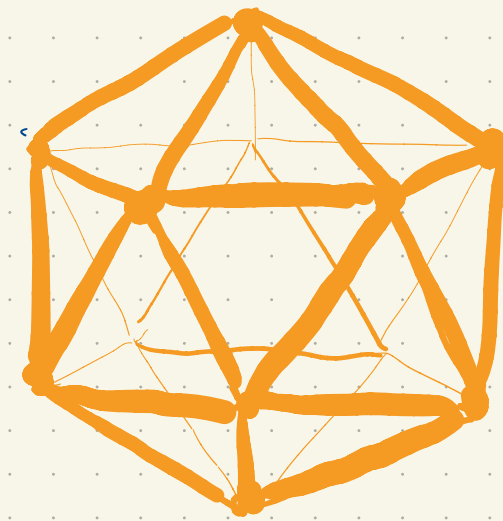
Подсказка: Используйте двойственный додекаэдр.



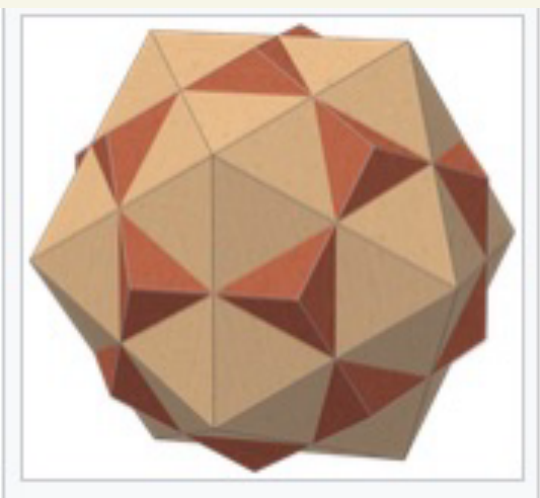
икосаэдр

11) Постройте вершины икосаэдра.

Подсказка: Используйте двойственный додекаэдр.



Икосаэдр

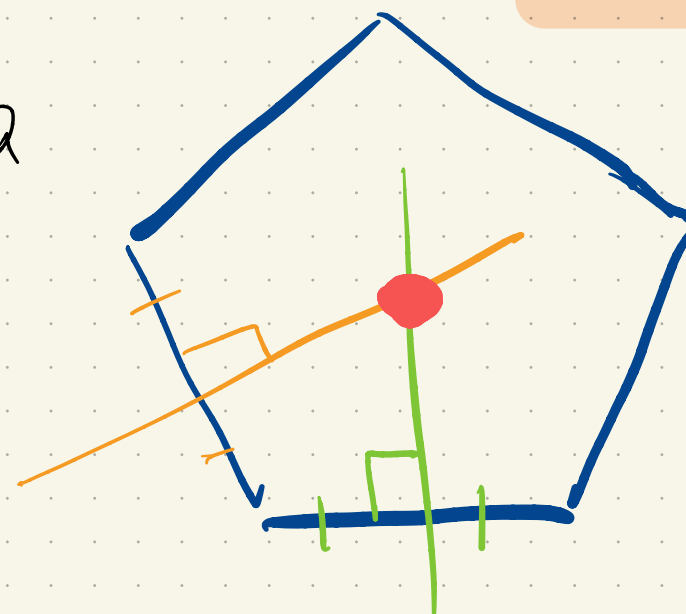


Решение:

Вершины икосаэдра =  
центры граней додекаэдра

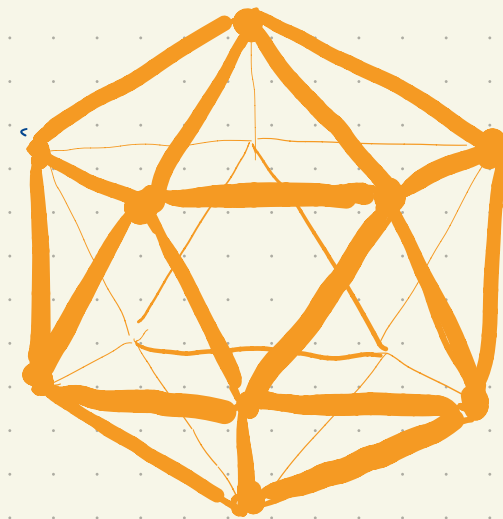
Вопрос:

Где в икосаэдре  
прячется октаэдр?



11 Постройте вершины икосаэдра.

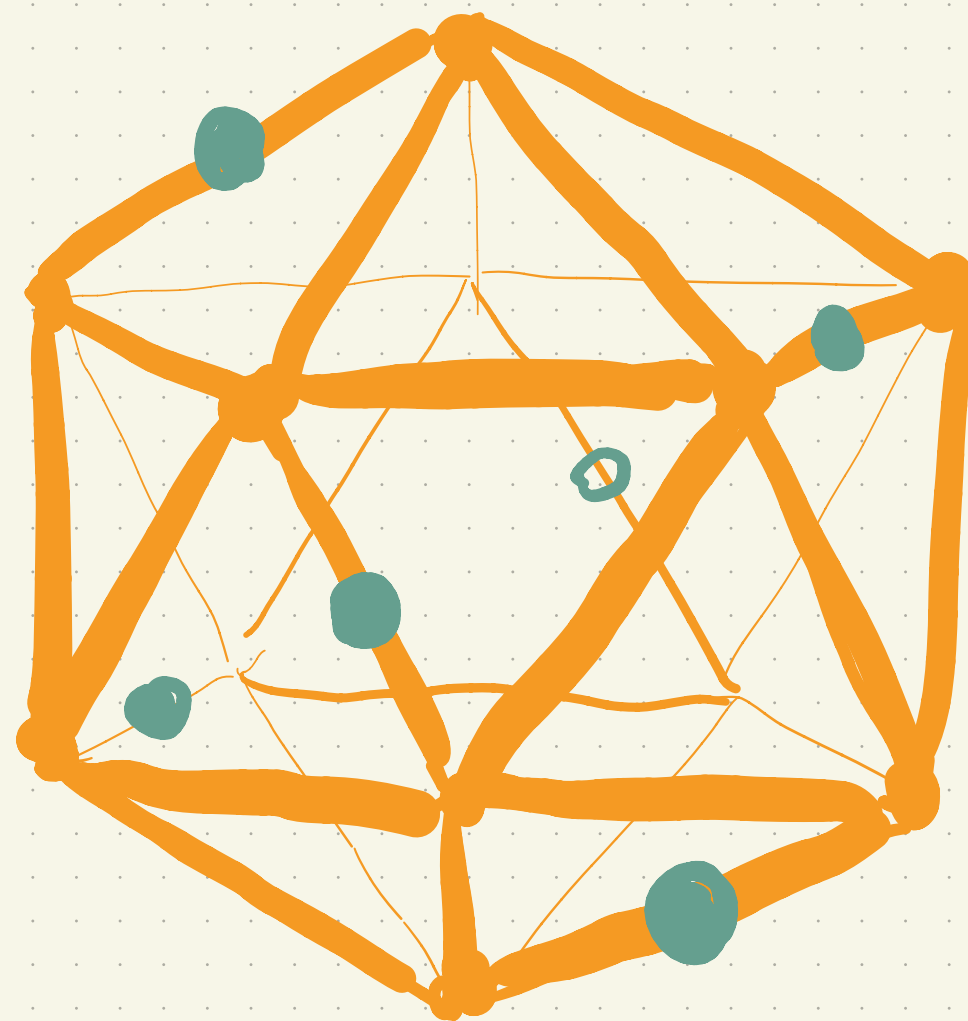
Подсказка: Используйте двойственный додекаэдр.



ИКОСАЭДР



Ответ:



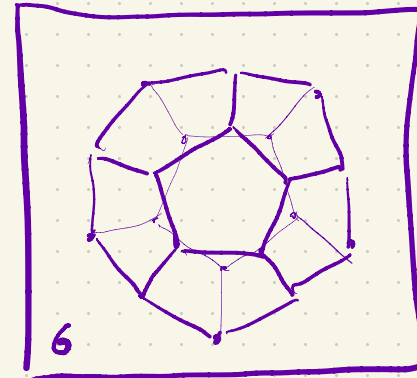
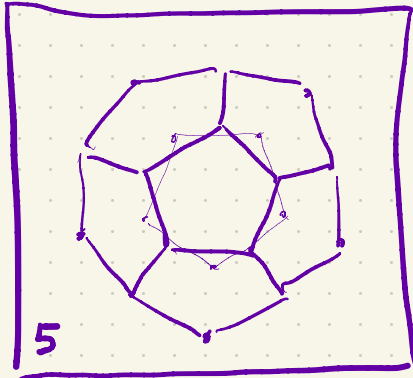
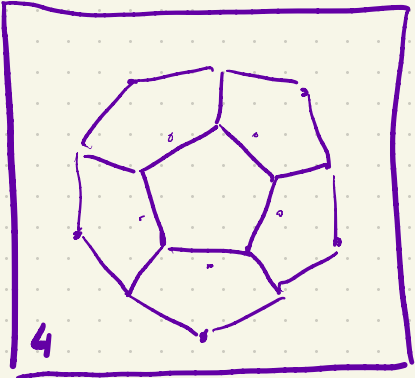
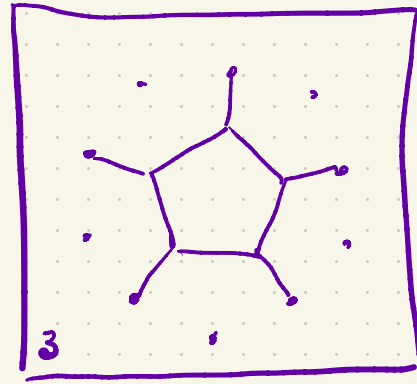
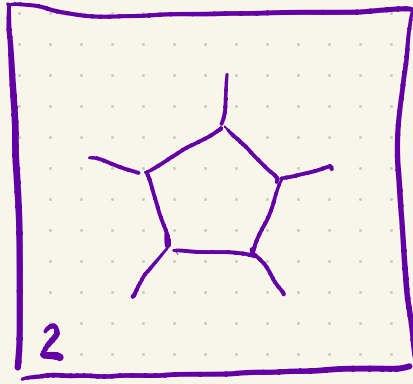
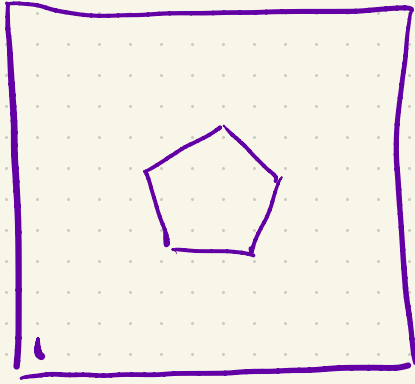
Вопрос:

Где в икосаэдре  
прячется октаэдр?

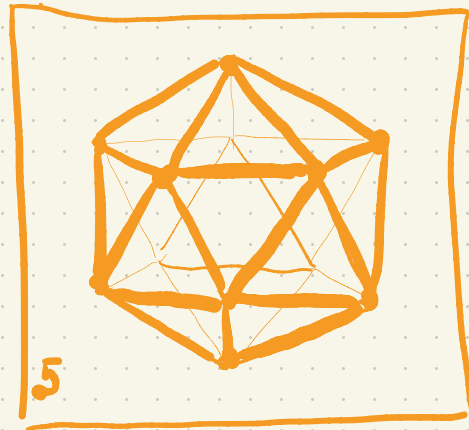
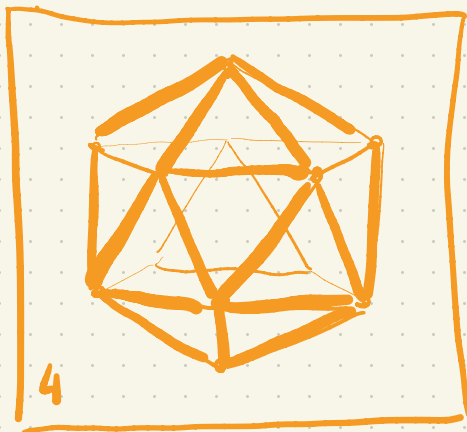
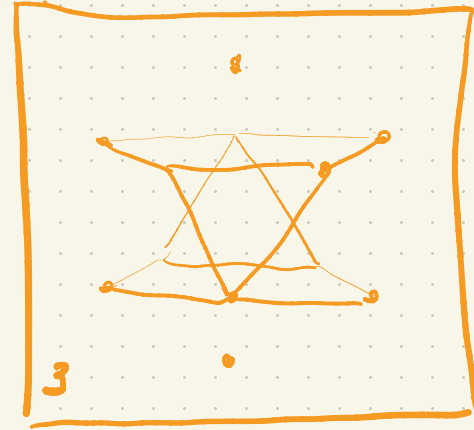
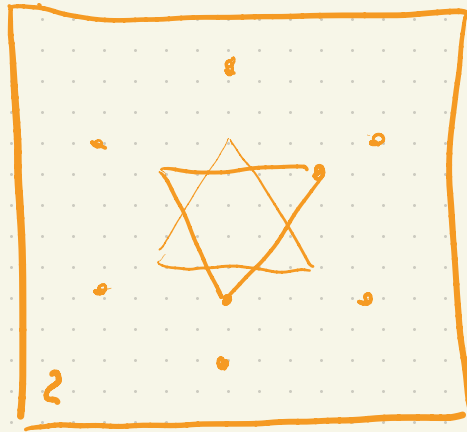
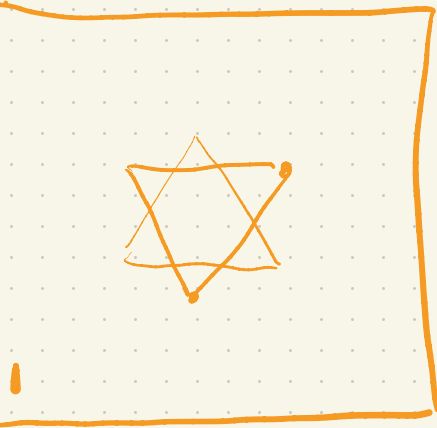
- Там таких октаэдров  
пять (можно вращать вокруг  
вертикальной оси)

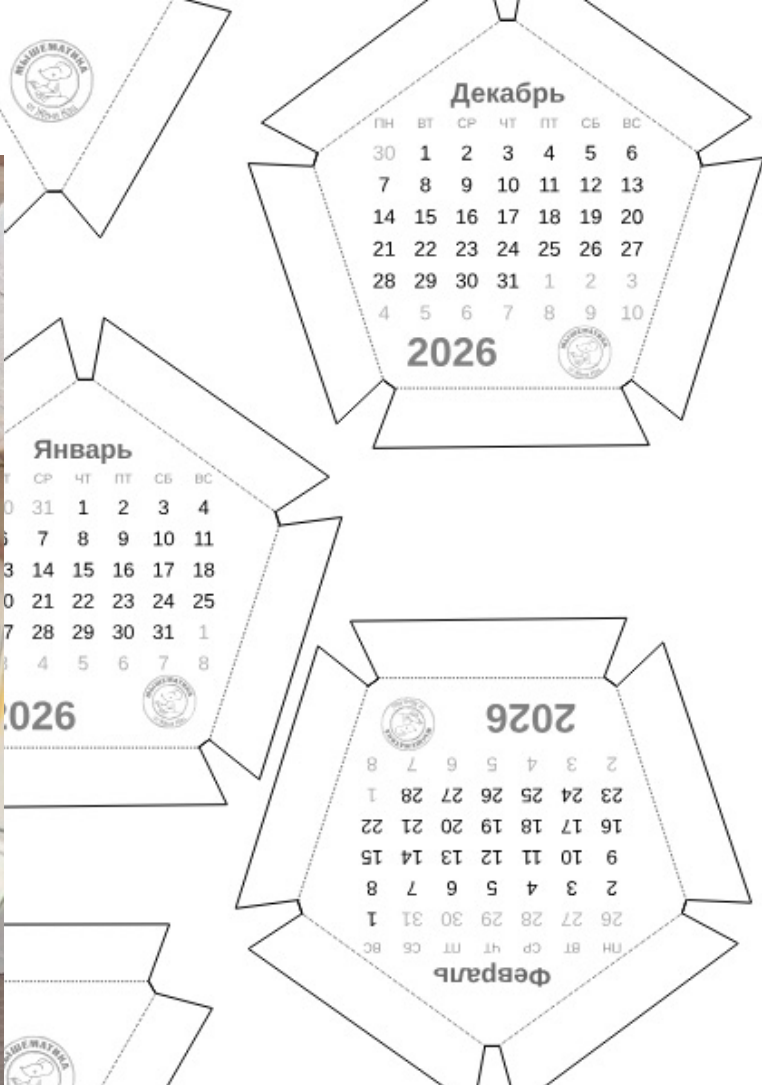


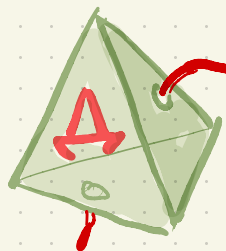
Как нарисовать додекаэдр?



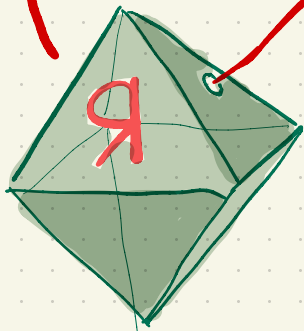
# Как нарисовать икосаэдр?



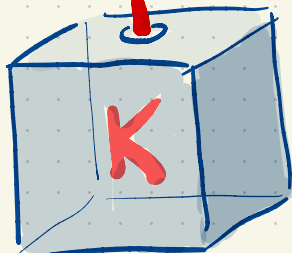




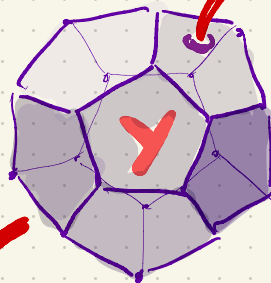
тетраэдр



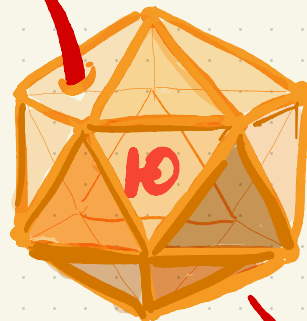
октаэдр



куб



дodeкаэдр



икосаэдр