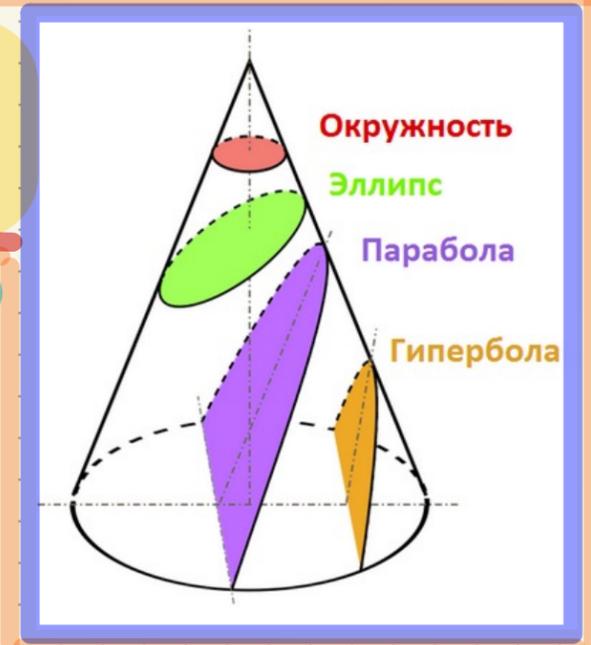


6 Конические сечения - 2

Сферы Данделена



Эллипс:

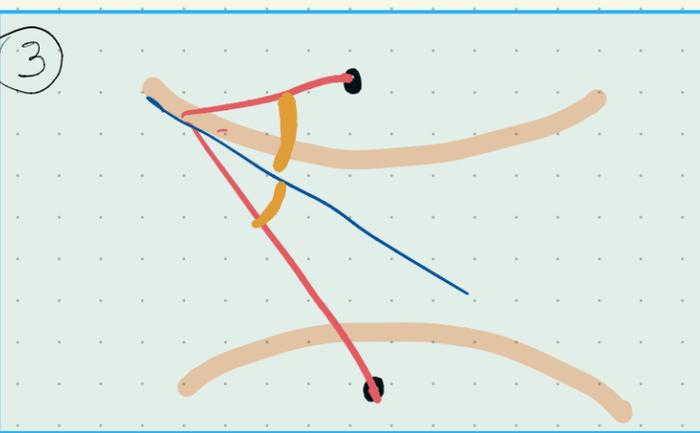
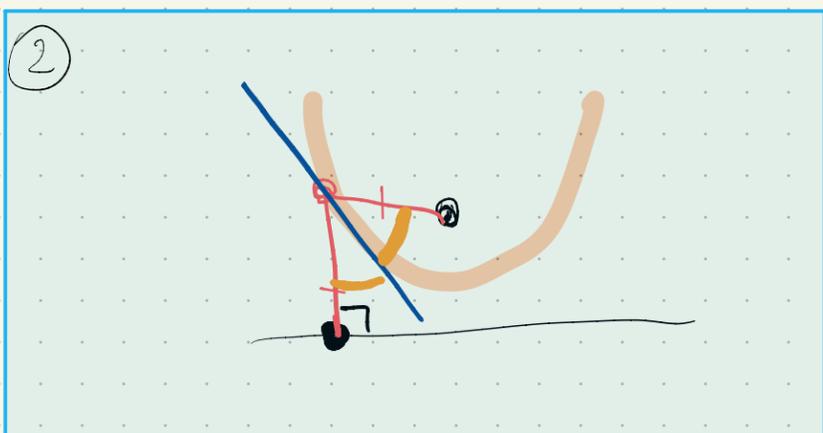
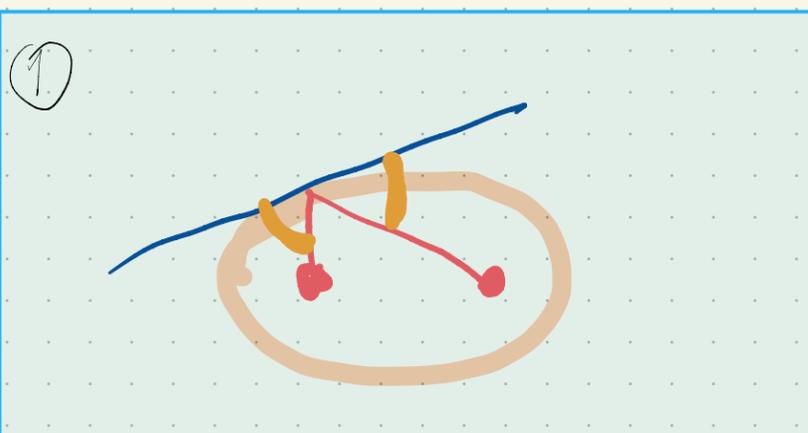
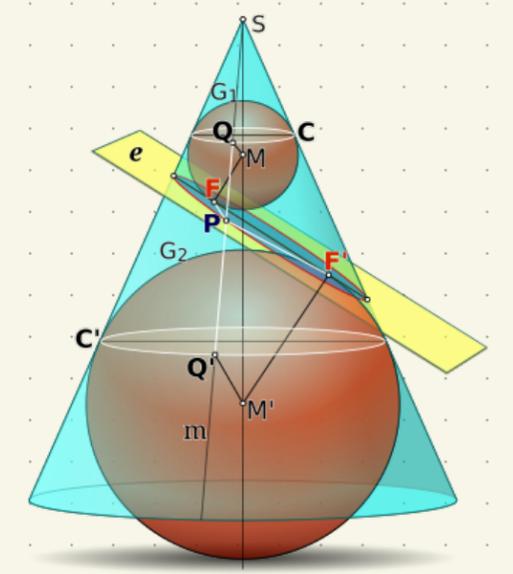
$AF_1 + AF_2 = const$

Парабола:

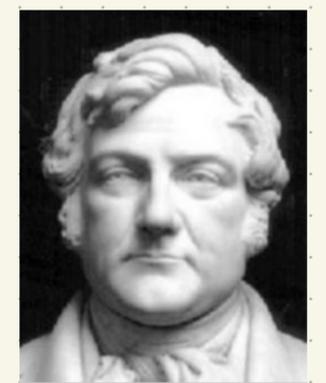
$AF = AN$

Гипербола:

$AF_1 - AF_2 = const$



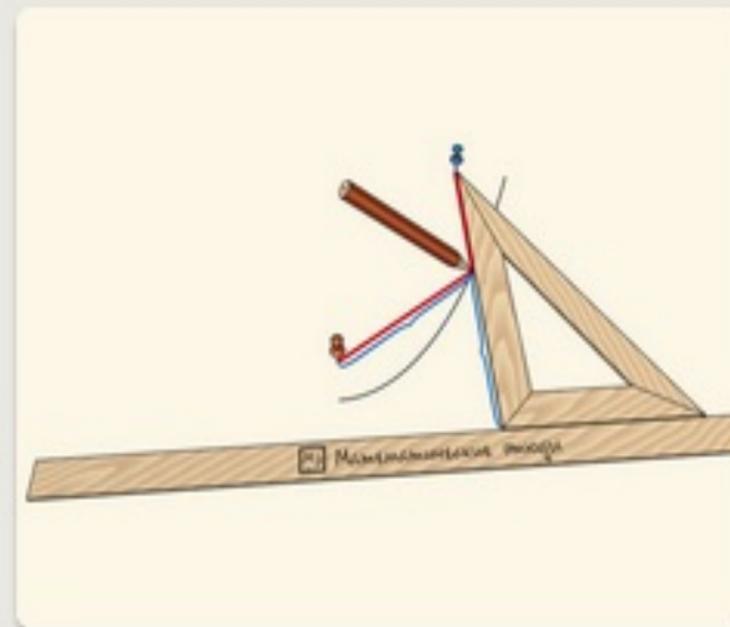
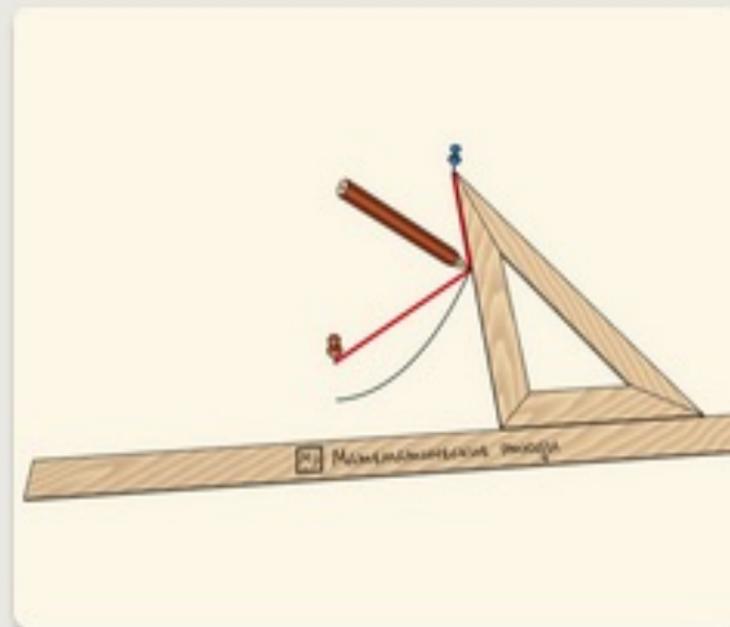
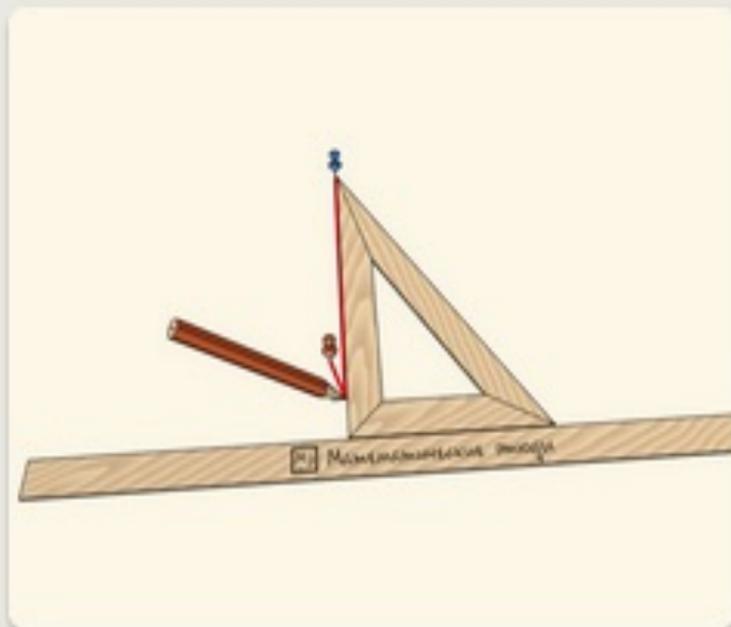
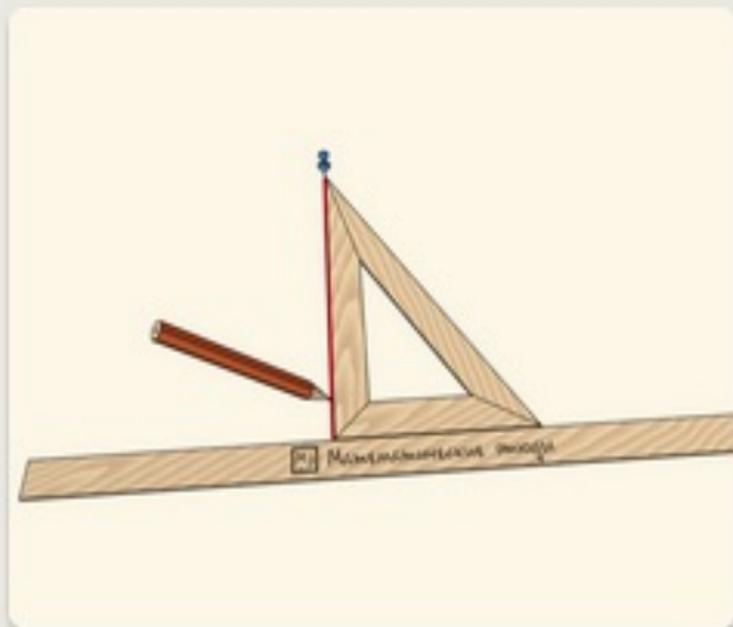
1794 -
1847



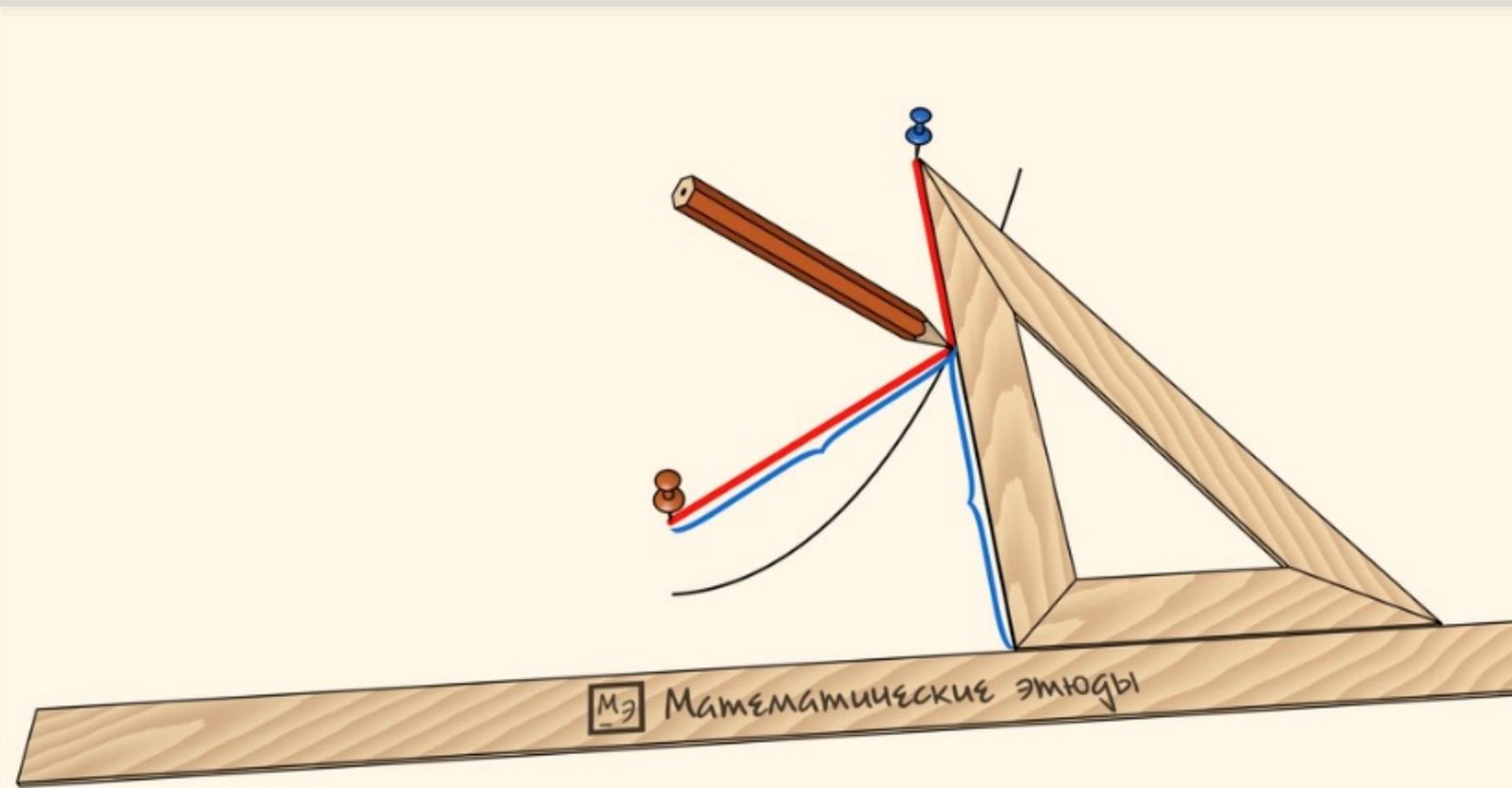
Germinal Pierre Dandelin

Разминка параболическая:

Как нарисовать параболу? Объясните!

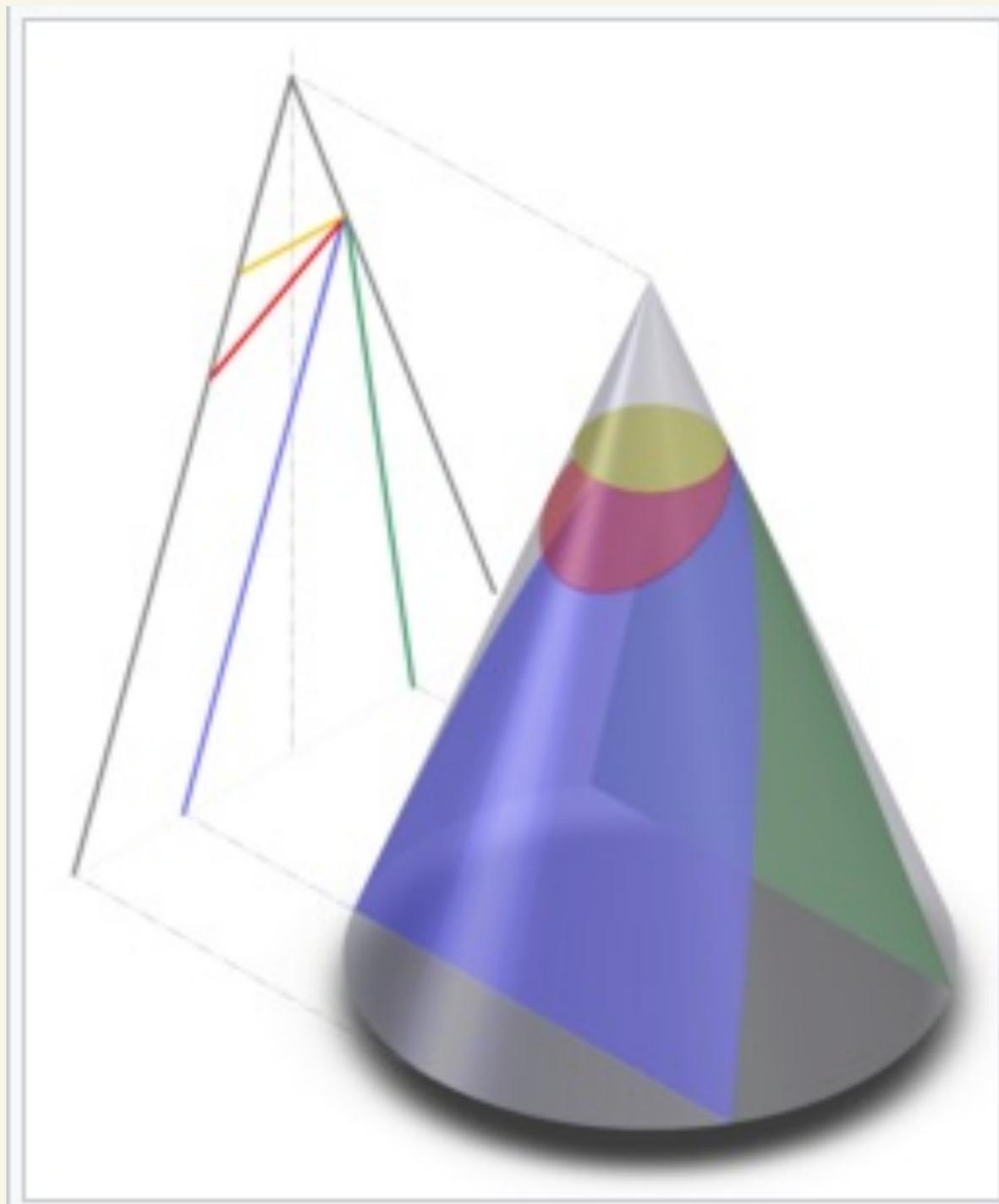
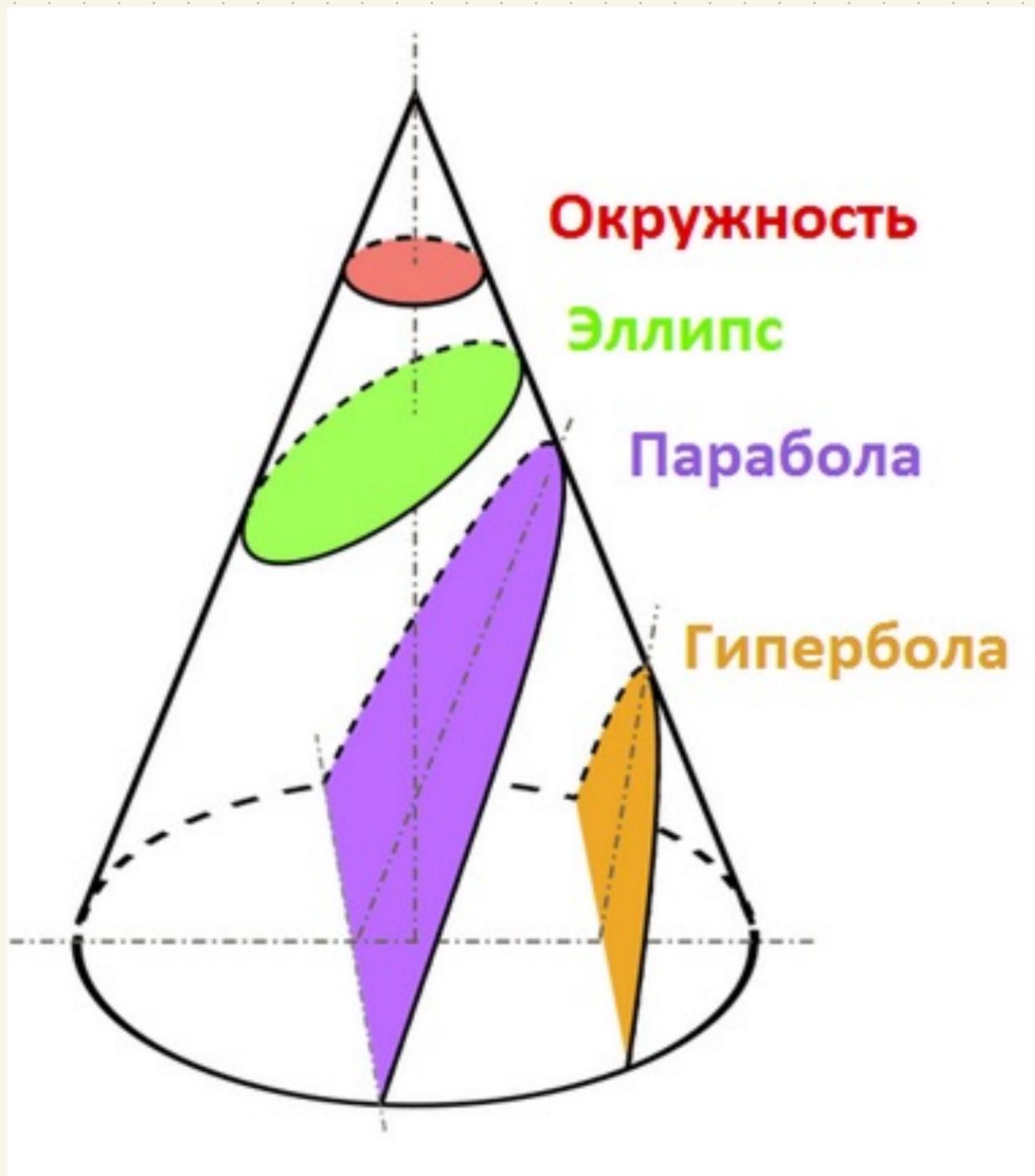


(Математические этюды)
en.etudes.ru



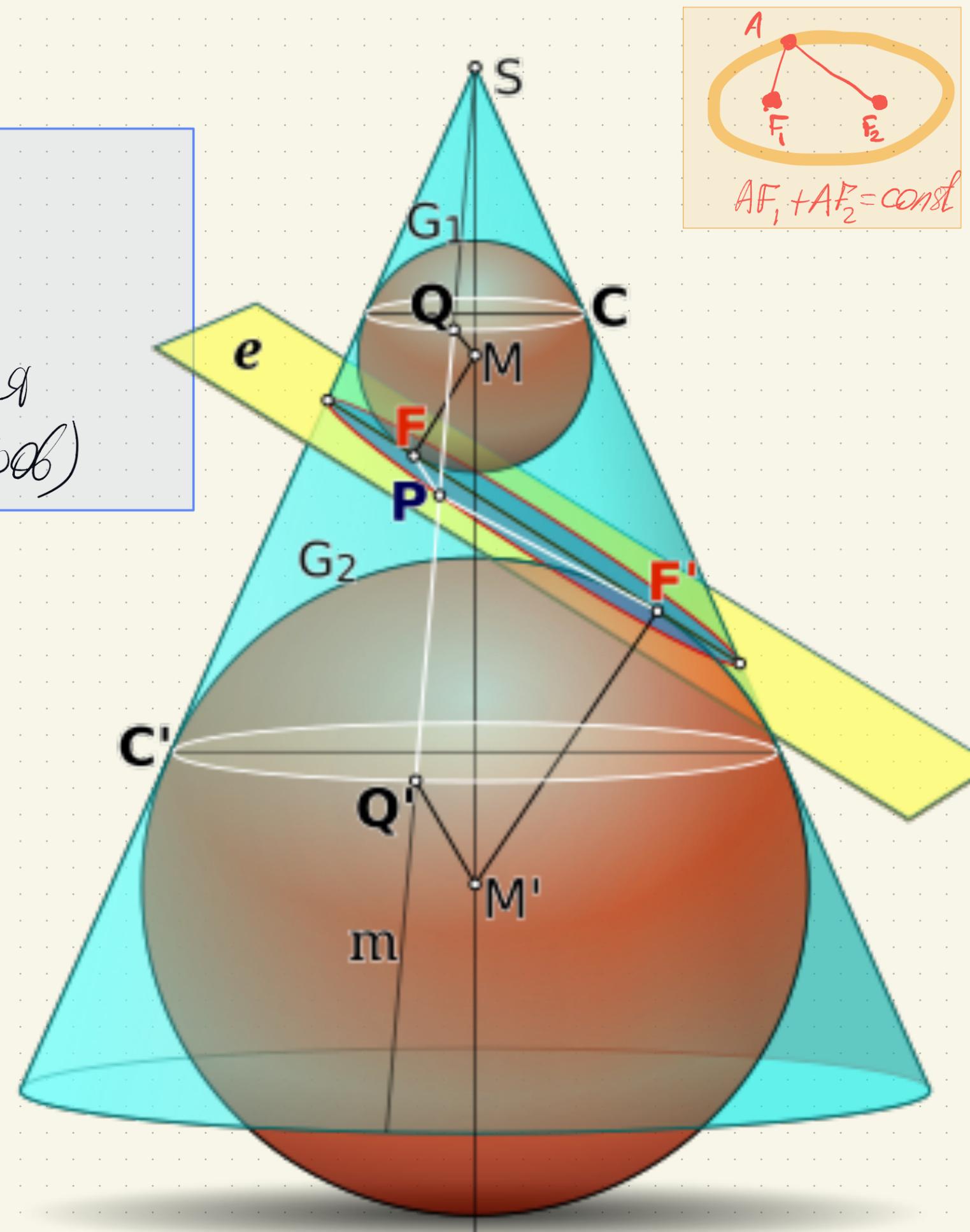
Конические сечения:

(сечения конуса)



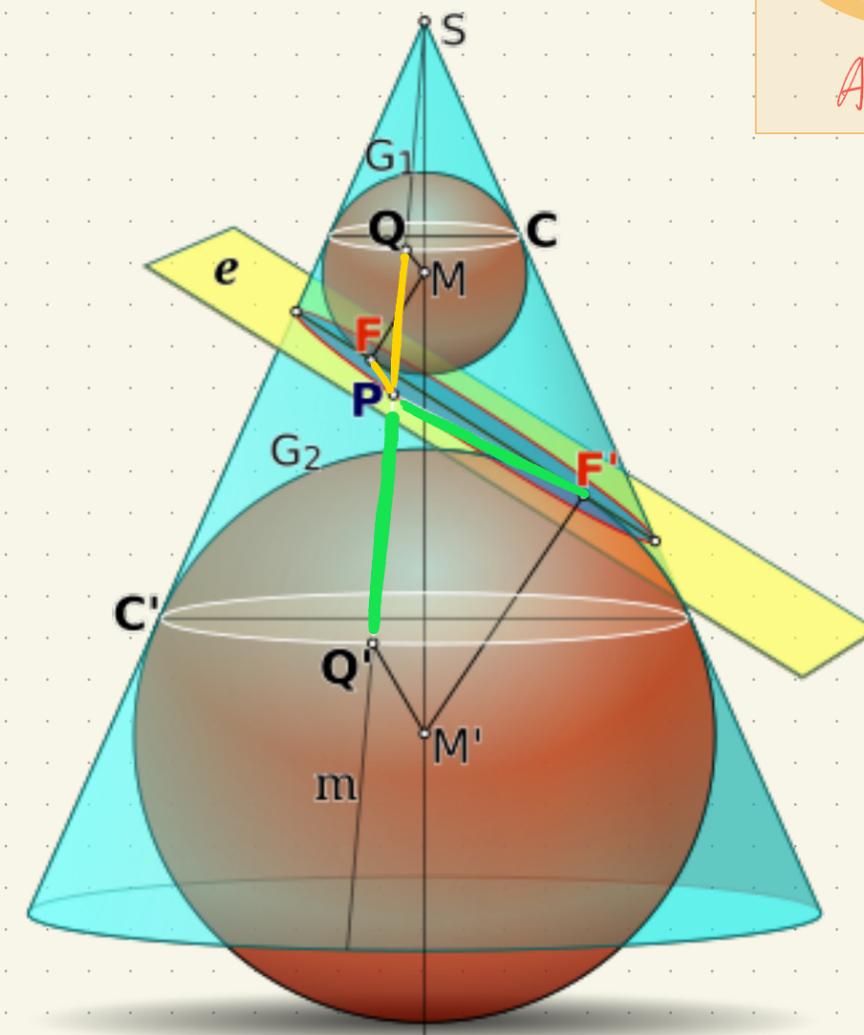
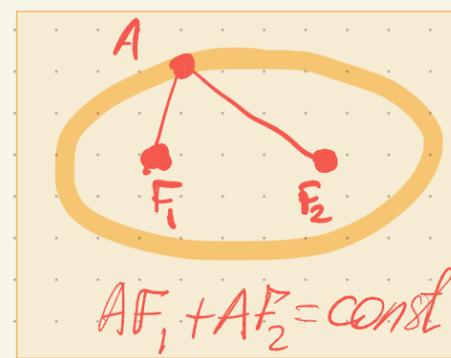
Эллипс и сферы Данделена

4 Докажите, что эллипс можно получить сечением конуса (а фокусом - точки касания вписанных шаров)



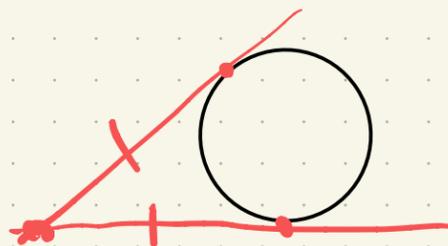
Эллипс и сфера Данделена

4 Докажите, что эллипс можно получить сечением конуса (а фокусом — точки касания вписанных шаров)



Решение:

По теореме о касании



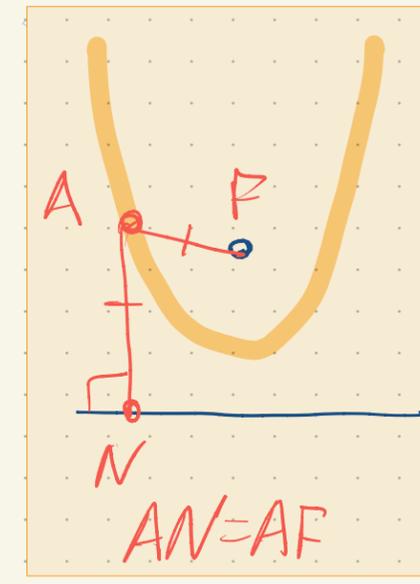
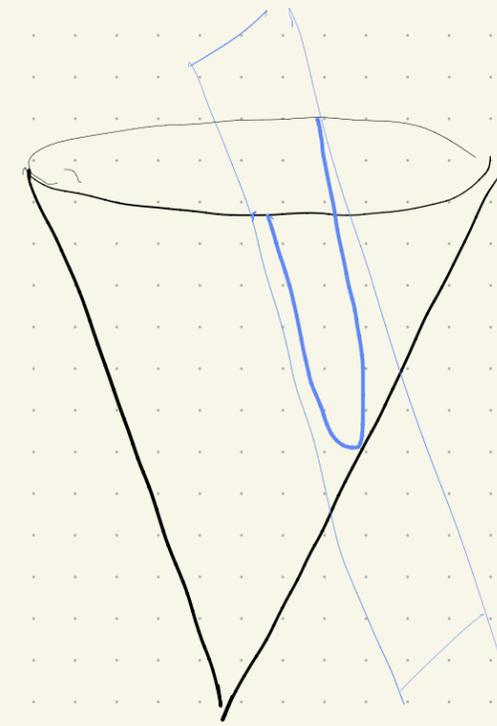
$$\underline{FP = PQ} \quad \text{и} \quad \underline{F'P = PQ'}$$

$$\text{Т.е. } FP + F'P = PQ + PQ' = QQ' -$$

не зависит от выбора точки P на эллипсе.

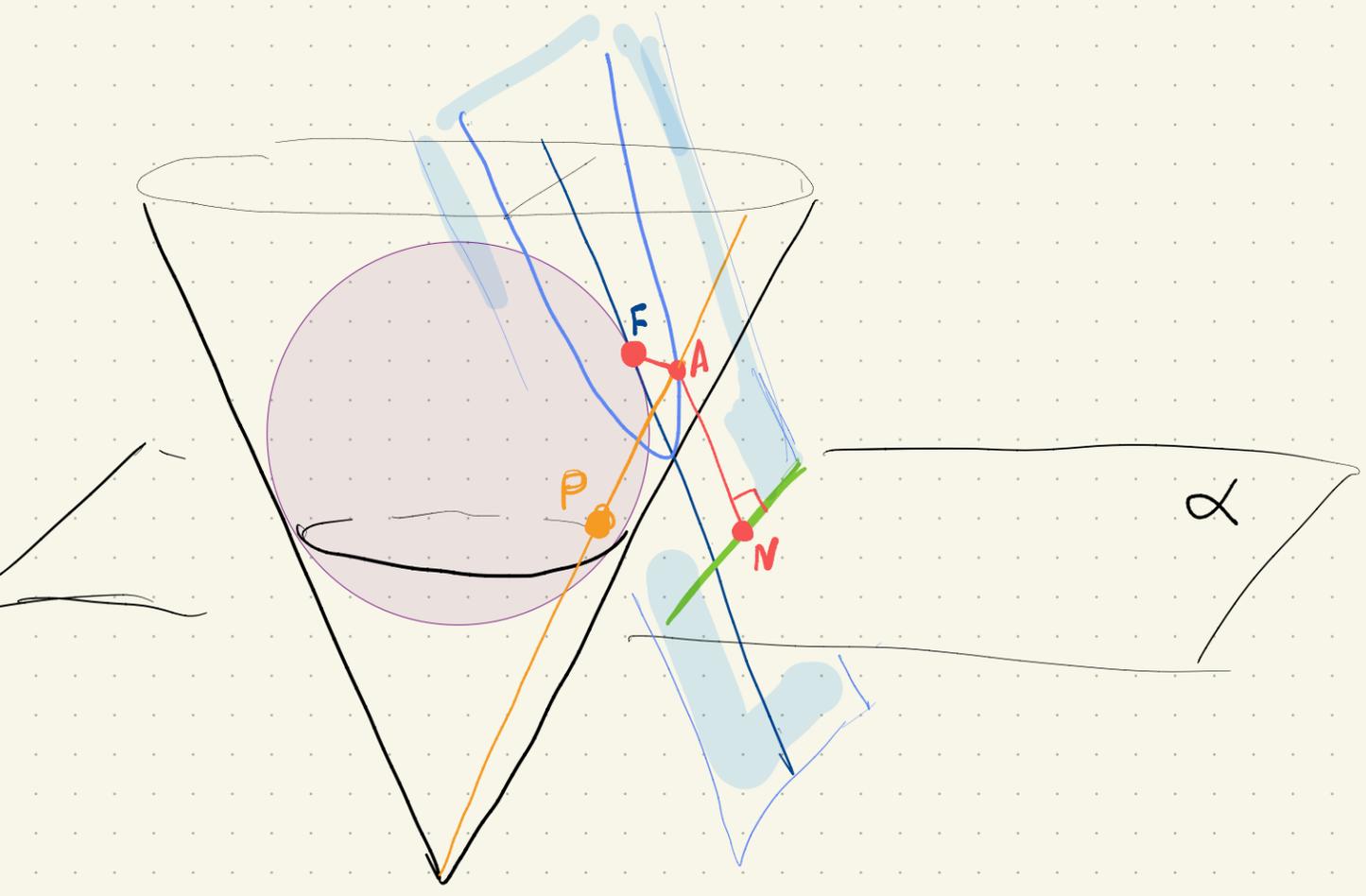
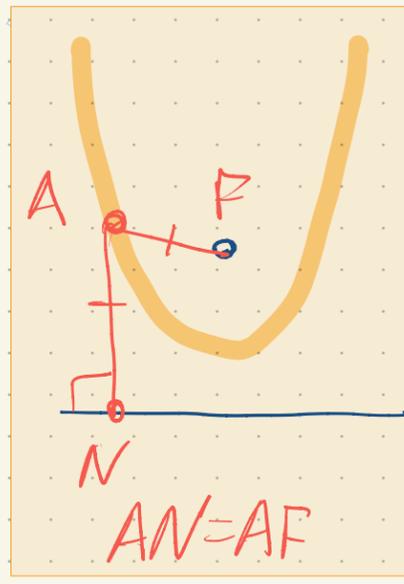
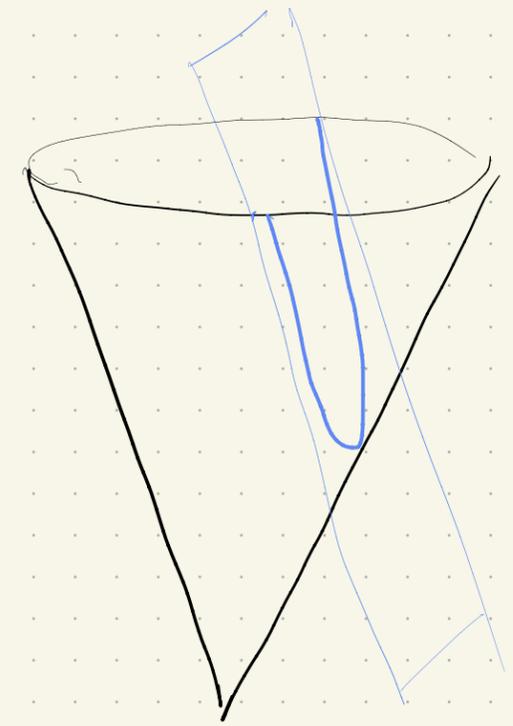
P — любая точка эллипса
SP — образующая конуса
Q и Q' — пересечение SP с плоскостями, где сферы касаются конуса.

5. Докажите, что сечение конуса плоскостью, параллельной образующей является параболой.



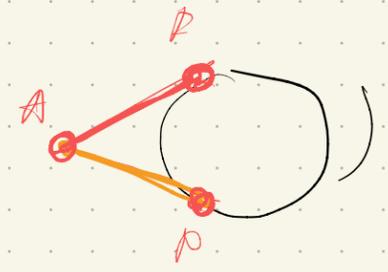
5. Докажите, что сечение конуса плоскостью, параллельной образующей является параболой.

Решение:



$$AF = AP$$

(теорема о контакте)

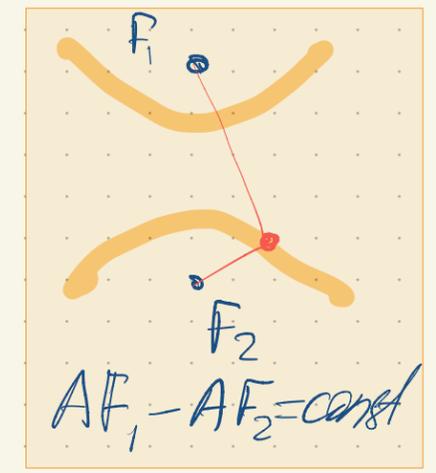
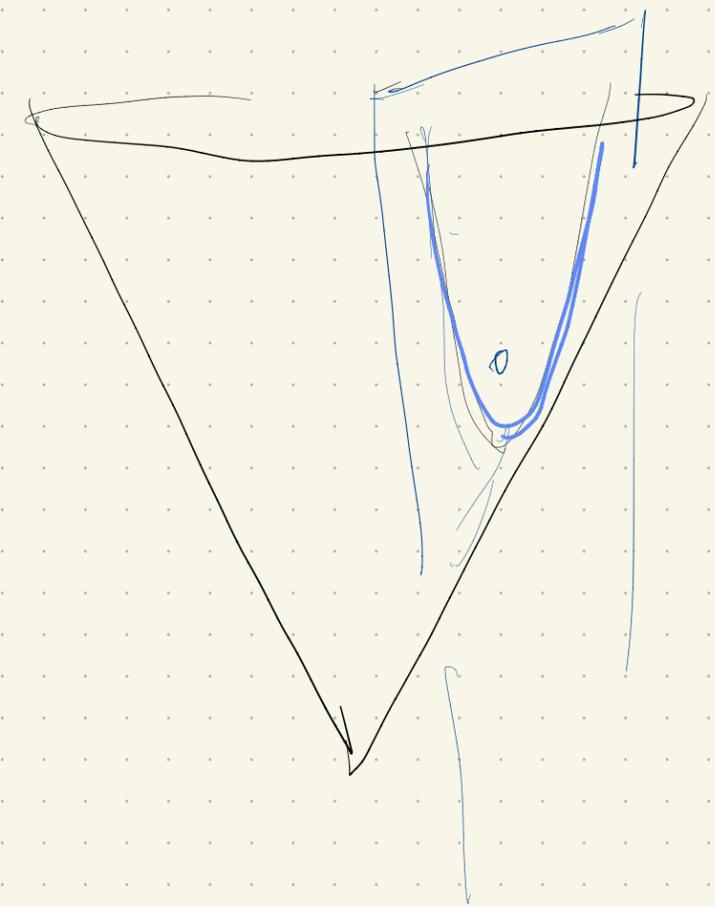


$$AP = AN, \text{ т.к. } \angle(AP, \alpha) = \angle(AN, \alpha)$$

↑
угол образующей конуса к плоскости

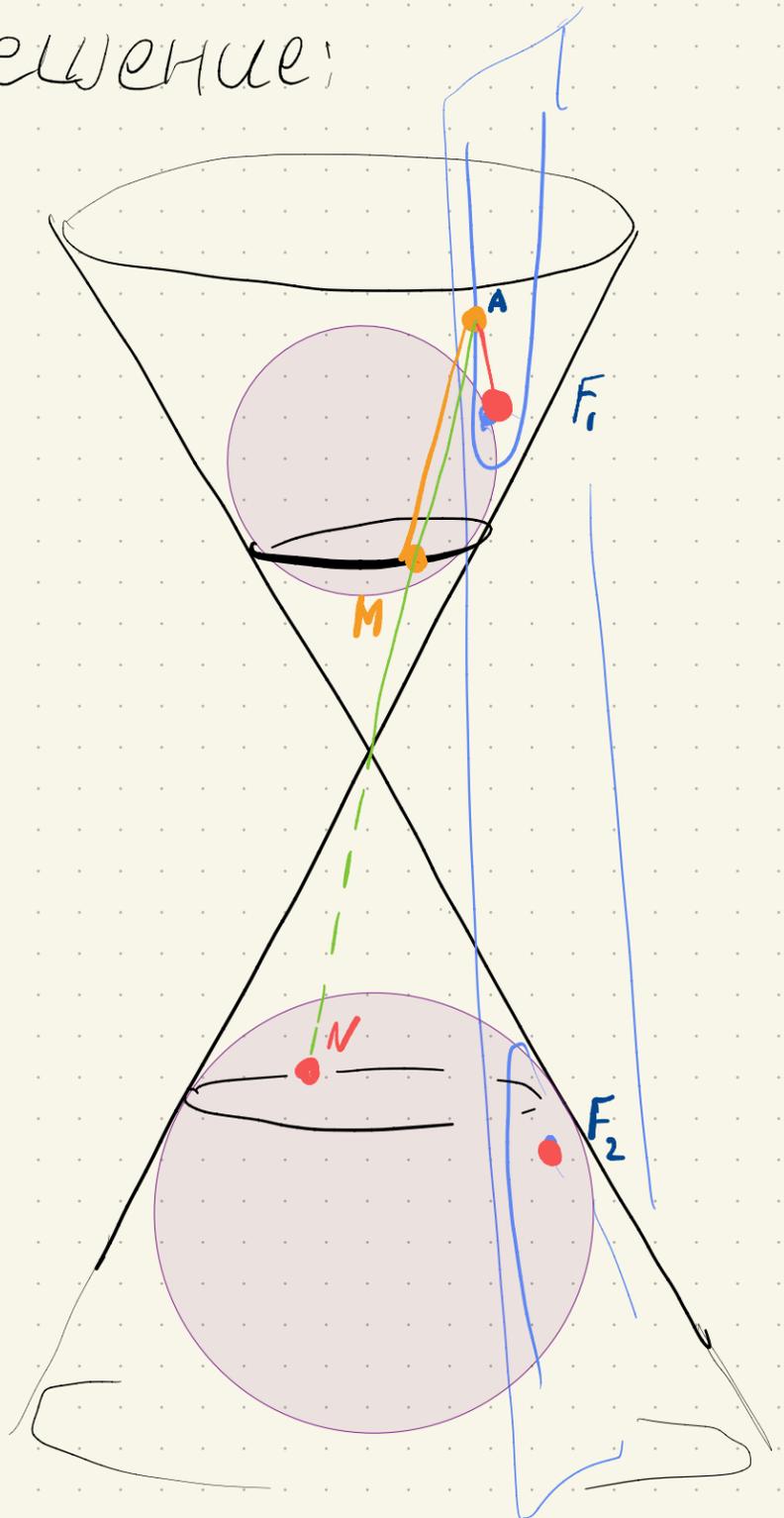
↑
AN // образующей конуса

6 Докажите, что сечение конуса почти вертикальной плоскостью — гипербола



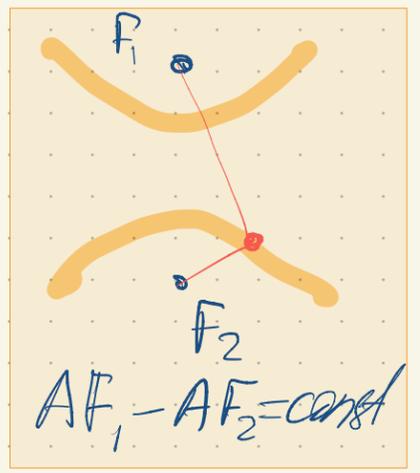
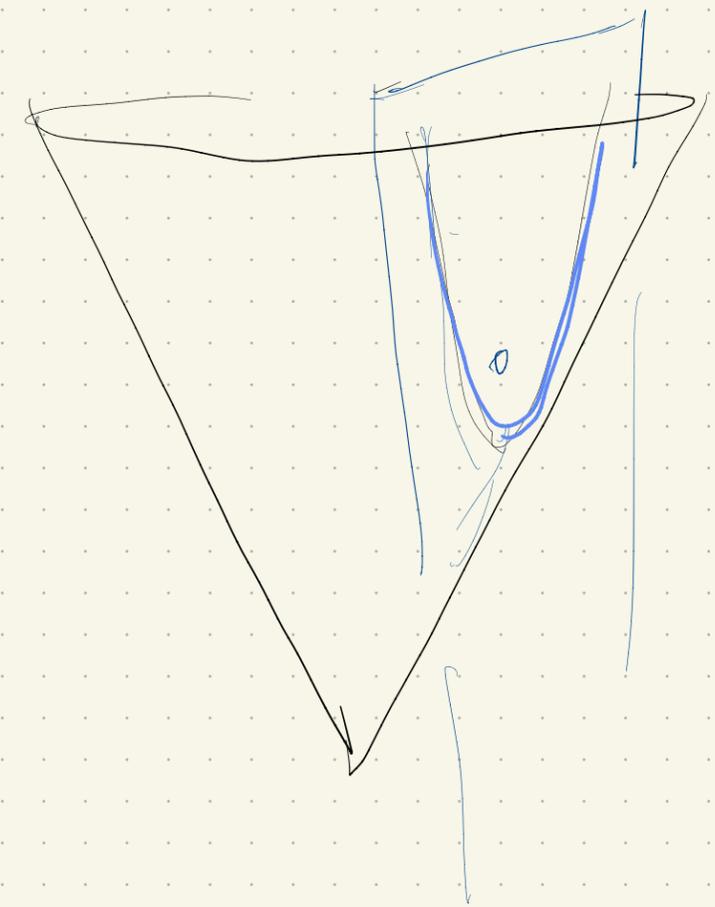
6 Докажите, что сечение конуса почти вертикальной плоскостью — гипербола

Решение:

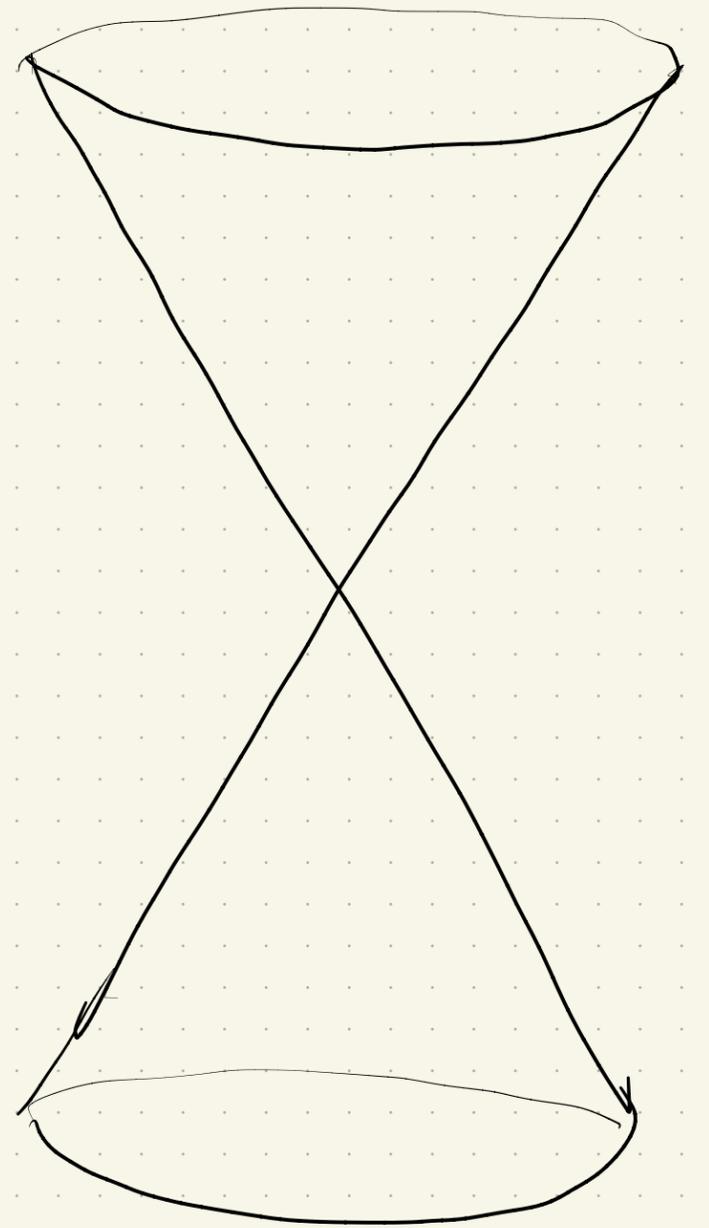
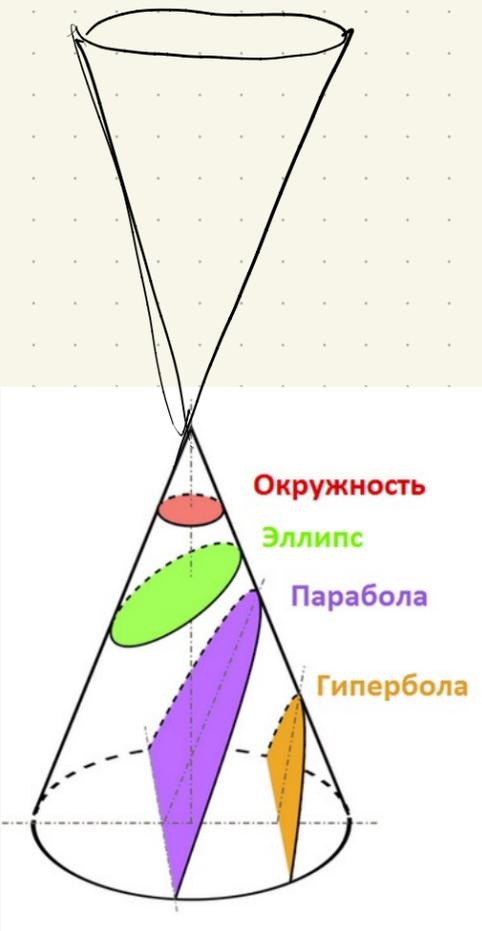


$$\left. \begin{aligned} AF_1 &= AM \\ AF_2 &= AN \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{По теореме} \\ &\text{о касании} \end{aligned}$$

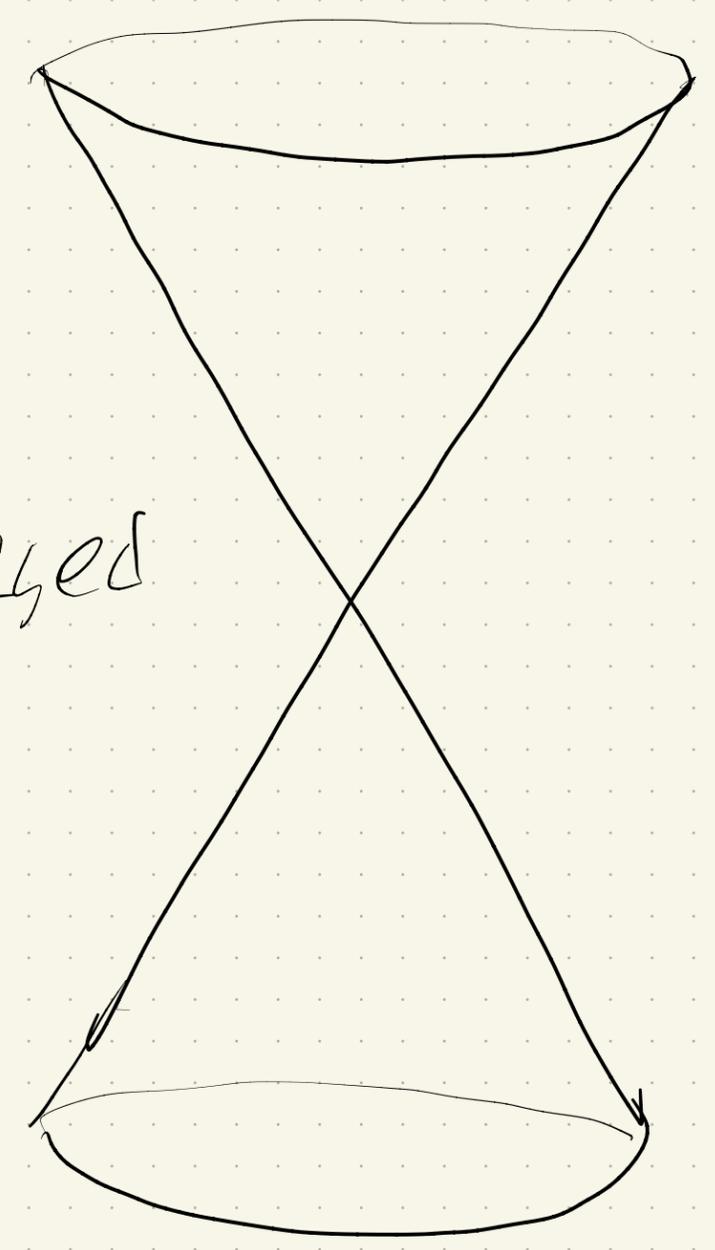
$$AF_2 - AF_1 = MN$$



7 Каким ещё может быть сечение конуса?



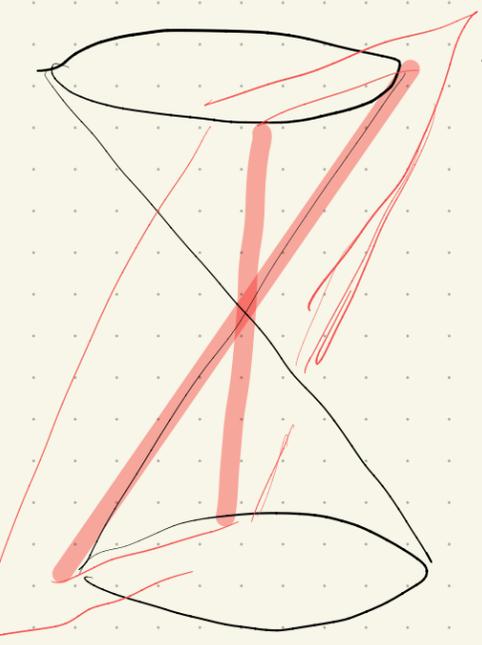
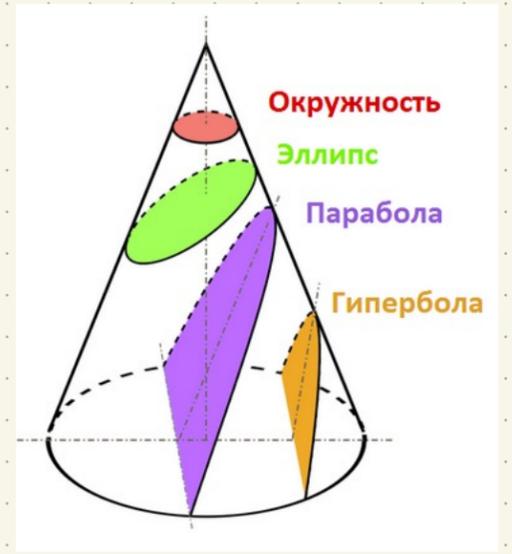
7 Каким ещё может быть сечение конуса?



Решение:

- сечение плоскостью, не проходящей через вершину -

- окружность
- эллипс
- парабола
- гиперболоа



- проходящей через вершину:

- две пересекающихся прямых
- две совпадающих прямых
- точка

Все сечения конуса описываются уравнениями второго порядка от двух переменных.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

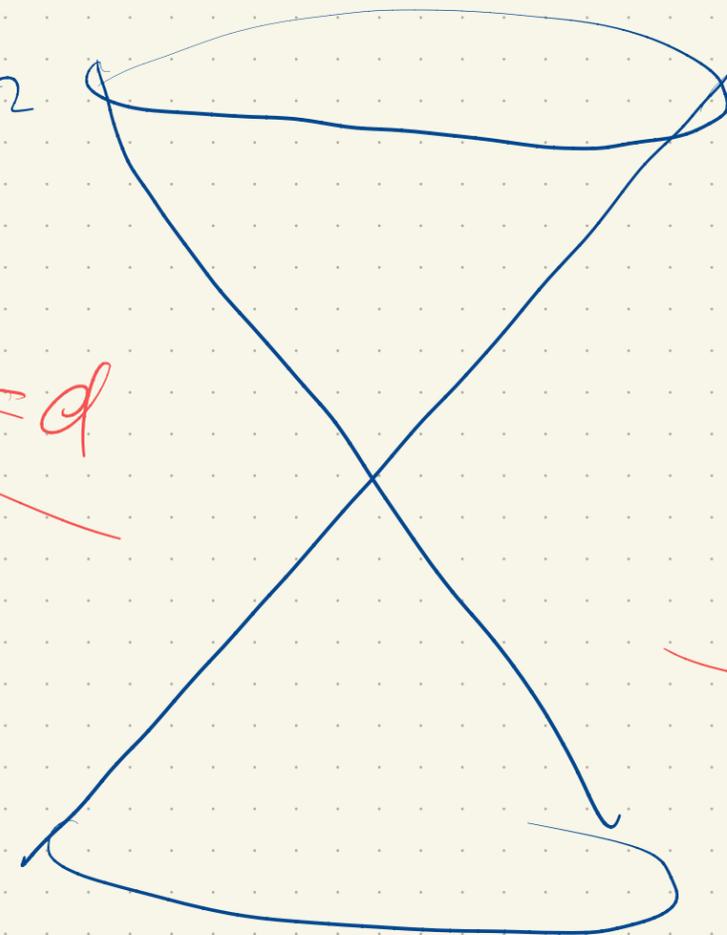
[D-во: подстановка x (или y или z) из $ax+by+cz=d$ в $x^2+y^2=z^2$]

Каждое такое уравнение получается сечением

[D-во: выделение полных квадратов]

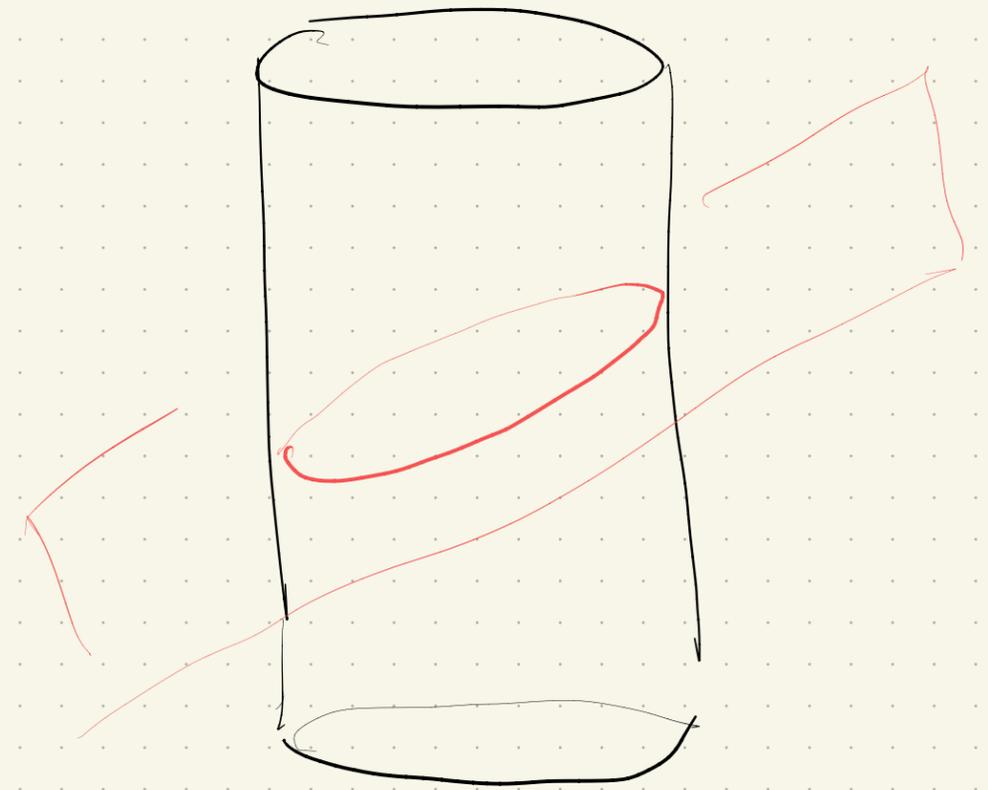
$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$ax + by + cz = d$$



8 Докажите, что косое сечение прямого кругового цилиндра является эллипсом.

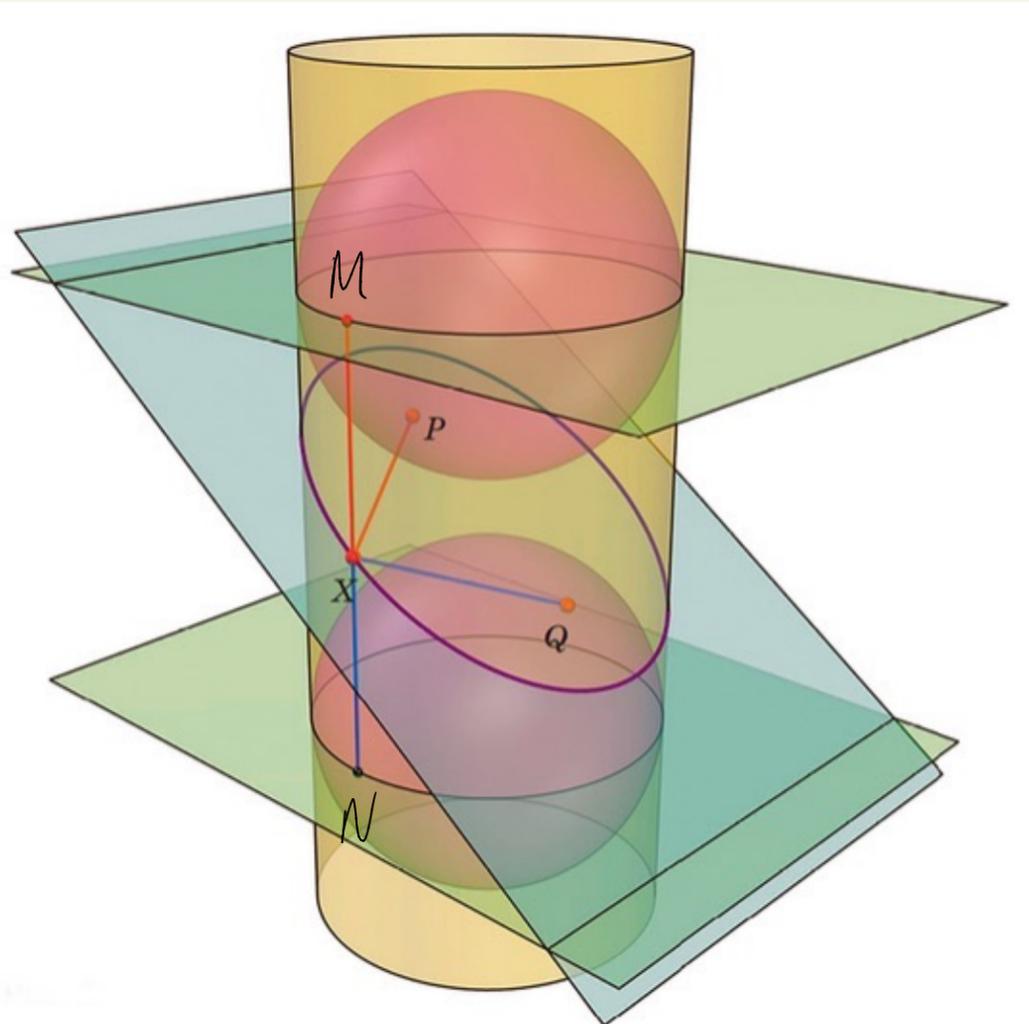
Чем еще может быть сечение цилиндра?



8 Докажите, что косоое сечение прямого кругового цилиндра является эллипсом.

Чем еще может быть сечение цилиндра?

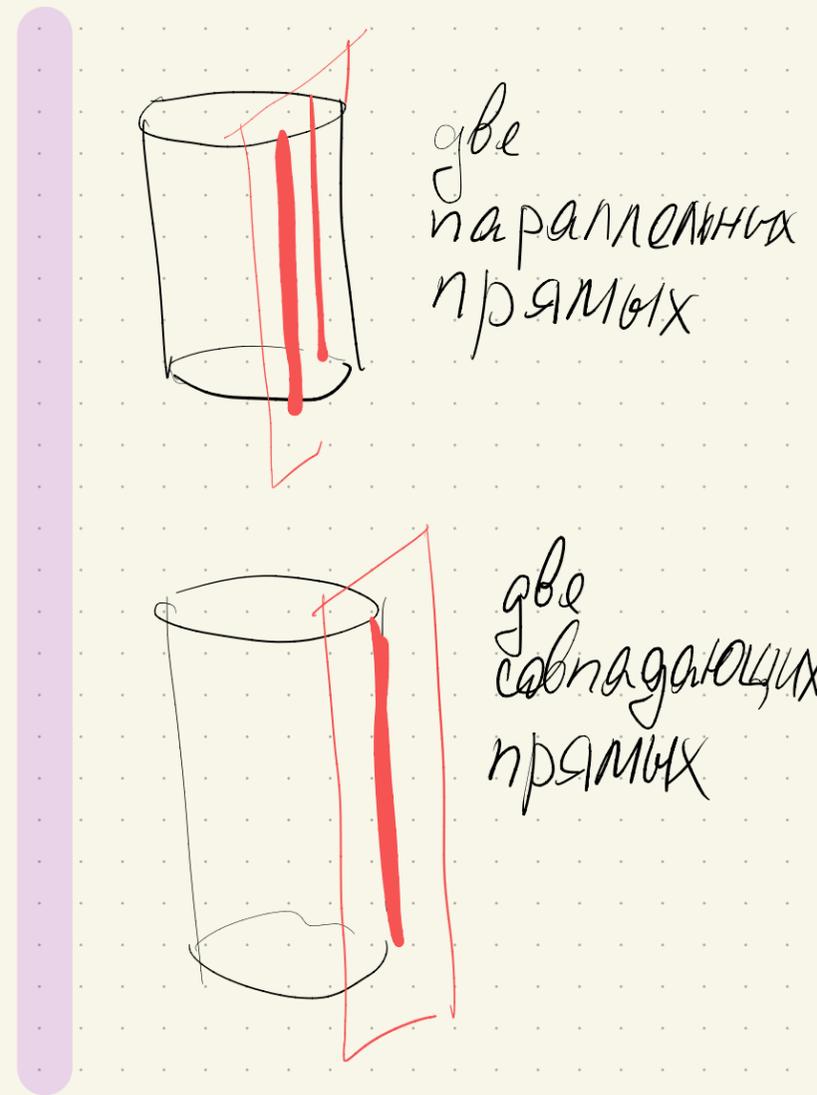
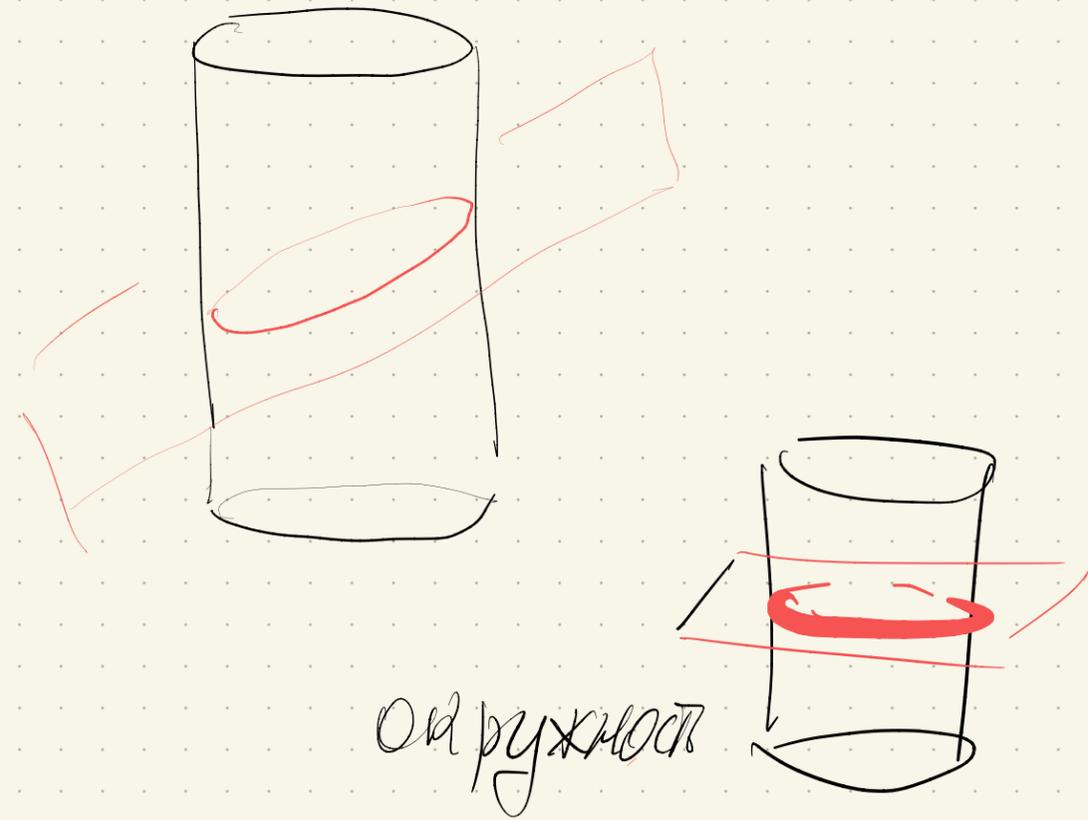
Решение:



$$PX = MX$$

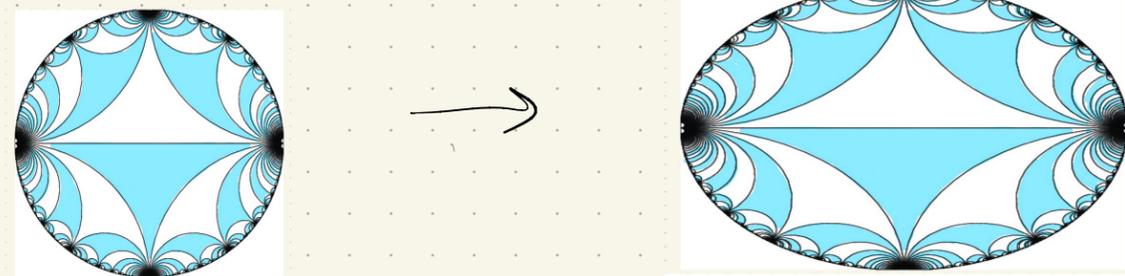
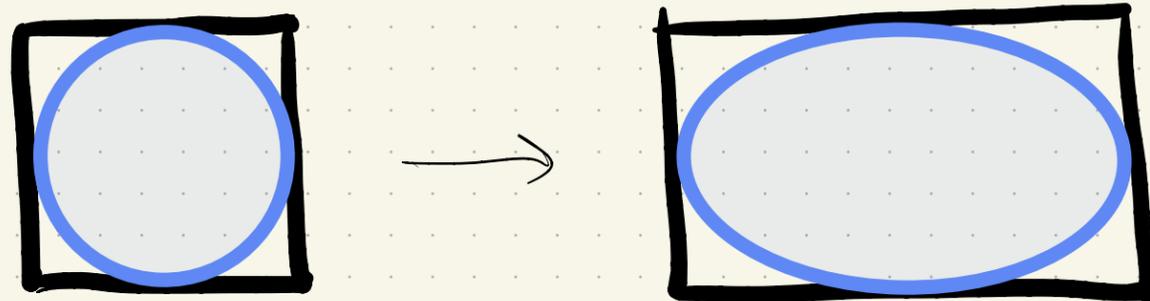
$$QX = NX$$

$$PX + QX = MX + XN = MN$$



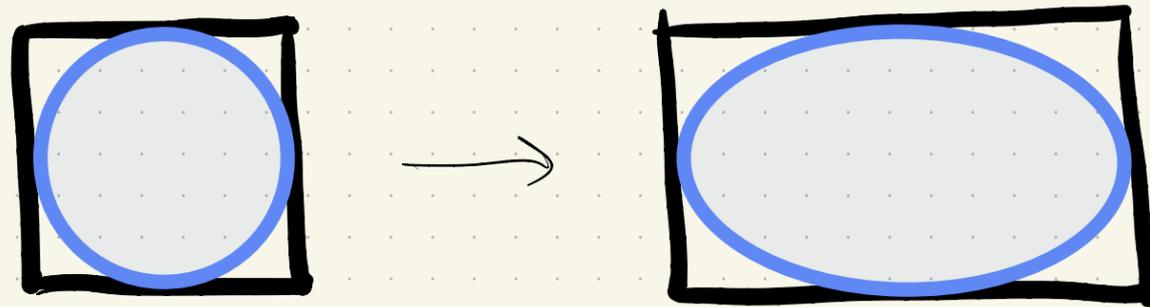
9. Что бы это значило?

"Эллипс - это круг, вписанный в квадрат 3x4"

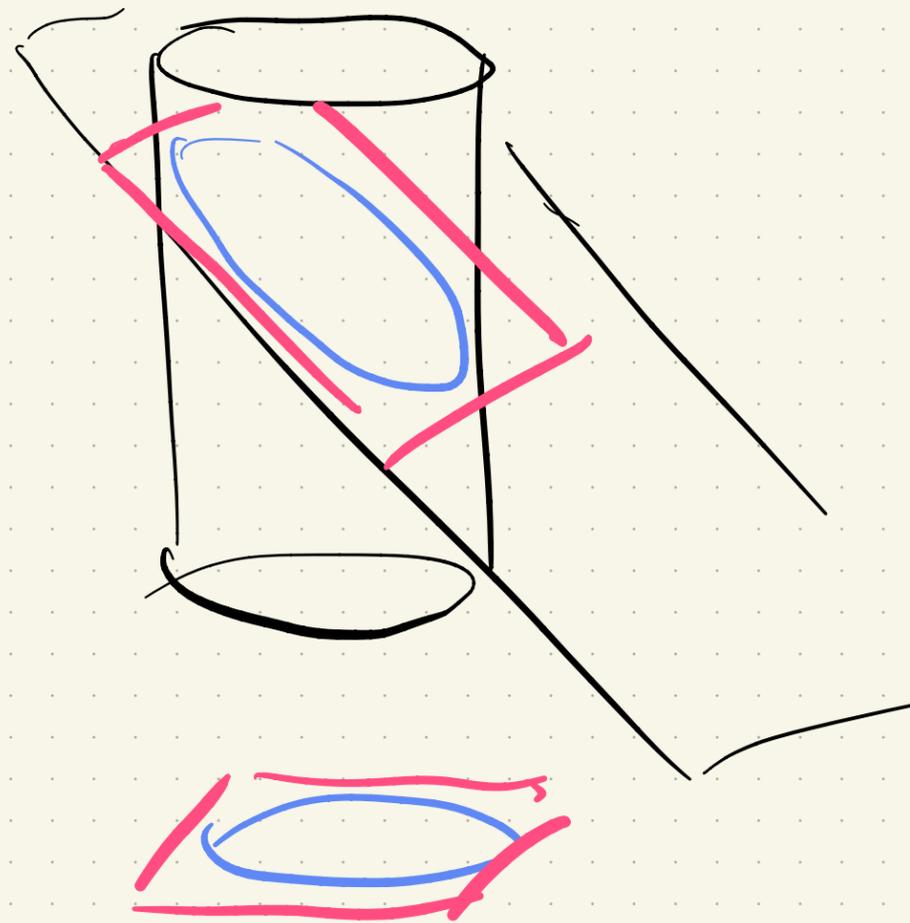
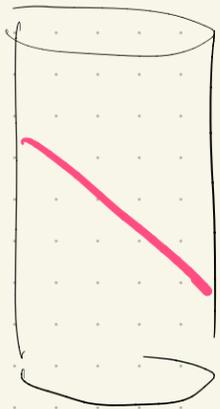


9. Что бы это значило?

"Эллипс - это круг, вписанный в квадрат 3x4"



Решение:



равномерно сжимаем
в одном направлении,
сохраняем в другом.

10 Покажите, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

задает эллипс

11 Найдите площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

10 Покажите, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

задает эллипс

Решение:

Возьмем уравнение окружности,

$$x^2 + y^2 = 1$$

растянем по оси x в a раз,
а по оси y в b раз.

11

11 Найдите площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Решение:

• Площадь окружности:
радиуса 1

$$= \pi \cdot r^2 = \pi$$

≈ 3,1415...

• Растянем в a раз по оси x ,
получим πa

и в b раз по оси y :
получим πab

