

# 7 СЧАСТЛИВЫЕ ЧИСЛА

[Happy numbers]



Ваза с повторяющейся надписью "Happiness"  
Иран, 9-10 век.



Каллиграфия "Happiness"  
Empress Dowager Cixi (Chinese, 1835-1908)

Операция: число  $\rightarrow$  сумма квадратов его цифр

Число **счастливое** (happy) если после нескольких применений этой операции получается 1

Пример:  $103 \rightarrow 1+9=10 \rightarrow 1$  **счастливое** (happy)

$115 \rightarrow 1^2+1^2+25=27 \rightarrow 4+49=53 \rightarrow 25+9=34 \rightarrow 9+16=25 \rightarrow 4+25=29 \rightarrow$   
 $\rightarrow 4+81=85 \rightarrow 64+25=89 \rightarrow 64+81=145 \rightarrow 1+16+25=42 \rightarrow 16+4=20$   
 $\rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 1+36=37 \rightarrow 9+49=58$  **несчастное** (sad)

Разминка: Покажите, что 7 - счастливое

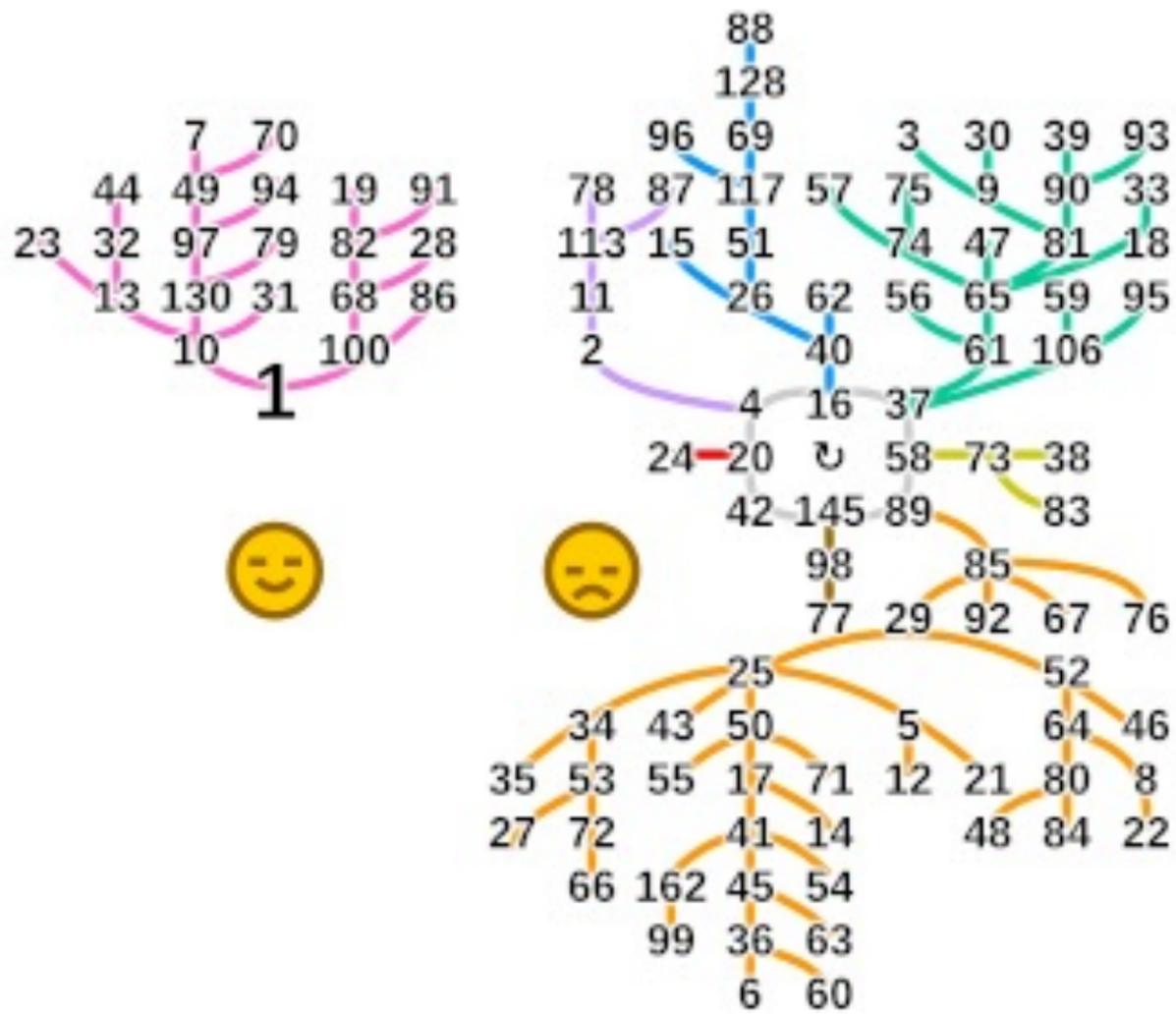
$7 \rightarrow 49 \rightarrow 16+81=97 \rightarrow 81+49=130 \rightarrow 1+9=10 \rightarrow 1$

Вопросы

- Правда ли, что любое число либо счастливое, либо входит в цикл?
- Много ли счастливых чисел?
- Что ещё можно о них сказать?

2026

# Счастливые числа до 100:



стабилизируется на 1



вливаются в <sup>общий</sup> цикл и бегают по кругу

Гипотеза: вероятно,  
 так ведут себя все числа.

- Идея:
- предположим, что НЕ все (назовём их хулиганами)
  - выберем из чисел-хулиганов наименьшее
  - докажем, что оно  $< 100$
  - среди чисел до 100 нет хулиганов, следовательно, хулиганов нет вообще

УТВ 1 Пусть  $x$  — наименьший хулиган  
Тогда  $x < 1000$

Доказательство:

обозначим  $x' = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ , если  $x = \overline{a_1 \dots a_n}$

Пусть  $x$  —  $n$ -значное число, т.е.  $x \geq 10^{n-1}$   
Т.к.  $x < \underbrace{9 \dots 9}_n$ , и  $x$  — наименьший хулиган, то  $x < x'$ ,  
т.е.  $x < n \cdot 9^2 = 81n < 100n$

Т.е.  $10^{n-1} < x < 100n$

Т.е.  $10^{n-3} < n$ , (где  $n$  — число знаков наименьшего хулигана)

УТВ 1 Если  $k < 10^{k-3}$ , то  $k+1 < 10^{(k+1)-3}$   
Д-во  $k+1 < 10^{k-3} + 1 < 10^{k-3} + 10^{k-3} < 10 \cdot 10^{k-3} = 10^{(k+1)-3}$   
если  $1 < 10^{k-3}$  т.е. если  $k \geq 4$

Т.е.  $10^{n-3} < n$  возможно только при  $n \leq 3$ , т.е.  $x < 100$  (т.к.  $n$  — число знаков  $x$ )

УТВ 1 Пусть  $x$  — наименьший хулиган  
Тогда  $x < 1000$

обозначим  $x' = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ , если  $x = \overline{a_1 \dots a_n}$

• Теперь можно просто перебрать все значения  $x \leq 999$

УТВ 2 • Если  $n=3$ , то  $x < ?$

$$x < 3 \cdot 9^2 = 243$$

• Если  $x = \overline{2??}$ , то  $x < ?$

$$x < 4 + 2 \cdot 81 = 166 \quad (\text{т.к. } x \neq \overline{2??} !)$$

• Если  $x = \overline{1??}$ , то

$$x < 1 + 2 \cdot 81 = 163$$

либо  $x' < 1 + 6^2 + 3^2 = 46 < 100$

либо  $x' < 1 + 5^2 + 9^2 = 107$  и  $x'' < 1 + 49 = 50 < 100$

$\Rightarrow x < 100$ .

Другое доказательство того, что Хулиганов нег:

- (1) Если  $x > 1000$ , то  $x' < x$ ,  
применив процедуру не более чем  $x$  раз,  
получим число меньше 1000.
- (2) Если его последователи не выходят за 1000,  
то зациклится (по принципу Дирихле)
- (3) Если выходят - то после каждого выхода  
вернется (см. (1))
- (4) Поэтому есть бесконечно много последователей  
 $< 1000$ , и по принципу Дирихле - зациклится.

Замечание: такое рассуждение работает не только  
в десятичной системе счисления, а и в любой.

счастливых чисел бесконечно много!

Например:

- можно в счастливое число вставлять нули:

$$13 \sim 10030 \rightarrow 1+9=10 \rightarrow 1$$

- можно взять "счастливое" количество единиц:

1111111

[НЕ знаю можно ли их как-то описать]

До  $10^{10}$ , примерно  $\frac{1}{7}$  чисел счастливые

$$\left( 1492609148 \approx 0.149\% \right)$$

Д Я К У Ю

$$6^2 + 33^3 + 15^2 + 24^2 + 32^2 = 2950$$

$$\downarrow$$
$$4 + 81 + 25 = 110$$
$$\downarrow$$
$$2$$

С П А С И Б І

$$22^2 + 20^2 + 1^2 + 22^2 + 11^2 + 2^2 + 12^2 = 1638$$

$$\downarrow$$
$$1 + 36 + 9 + 64 = 110$$
$$\downarrow$$
$$2$$

П О Д Я К А

$$20^2 + 19^2 + 6^2 + 33^2 + 15^2 + 1^2 = 2112$$

$$\downarrow$$
$$4 + 1 + 4 + 1 = 10$$
$$\downarrow$$
$$1$$



M E R C I

$$13^2 + 5^2 + 18^2 + 3^2 + 9$$

$$= 608 \rightarrow 36 + 64 = 100 \rightarrow 1$$



TYPELAB

Aa	Аа	Bb	Вв	Cc	Сс
Dd	Дд	Ee	Ее	Ff	Фф
Gg	Гг	Hh	Нн	Ii	Іі
Jj	Йй	Kk	Кк	Ll	Лл
Mm	Мм	Nn	Нн	Oo	Оо
Pp	Рр	Qq	Qq	Rr	Рр
Ss	Сс	Tt	Тт	Uu	Уу

Хх  
Аа  
Бб



Д  
И  
Н  
О  
П  
Р  
С  
Т  
У  
Ф  
Х  
Ц  
Ш  
Щ  
Ъ  
Ы  
Ь  
Э  
Ю  
Я

О  
П  
Р  
С  
Т  
У  
Ф  
Х  
Ц  
Ш  
Щ  
Ъ  
Ы  
Ь  
Э  
Ю  
Я

TYPELAB

### L'alphabet Français

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee
AH	BAY	SAY	DAY	E
Ff	Gg	Hh	Ii	Jj
EFF	ZHAY	ASH	EE	ZEE
Kk	Ll	Mm	Nn	Oo
KAH	ELL	EM	EN	O
Pp	Qq	Rr	Ss	Tt
PAY	KOO	AIR	ESS	TAY
Uu	Vv	Ww		
OO	VAY	DOOBLUH-VAY		
Xx	Yy	Zz		
EEEKS	EEGREK	ZED		