

Группа кос

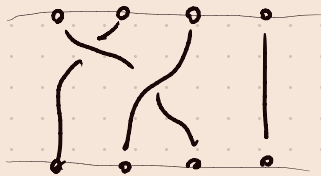


Альберт Анкер , 1887
„Девочка , заплетая косы“



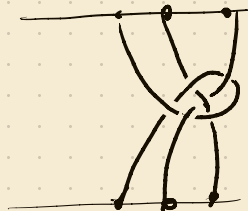
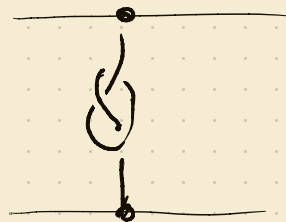
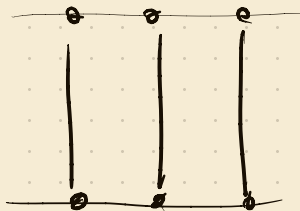
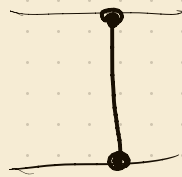
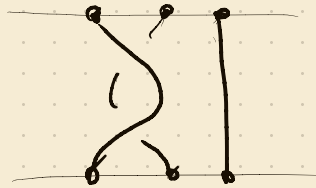
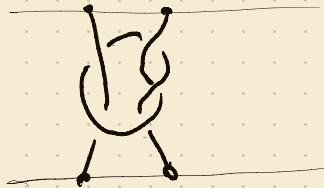


Коса :

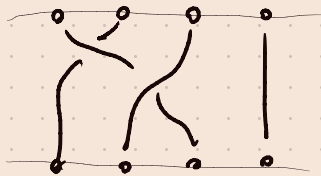


- каждая нить движется сверху вниз
- нити выходят из n точек на прямой сверху, приходят в n разных точек снизу
- нити можно шевелить, но одна нить не может пройти сквозь другую.

Где косы, а где нет?

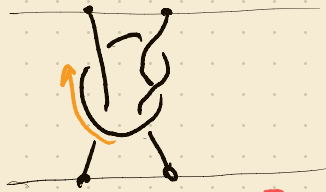


Коса :

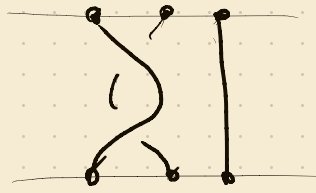


- каждая нить движется сверху вниз
- нити выходят из n точек на прямой сверху, приходят в n разных точек снизу
- нити можно шевелить, но одна нить не может пройти сквозь другую.

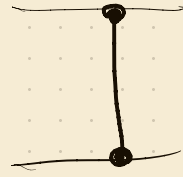
Где косы, а где нет?



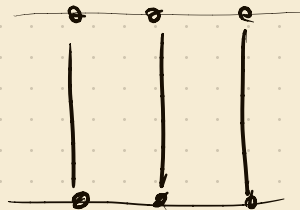
НЕТ



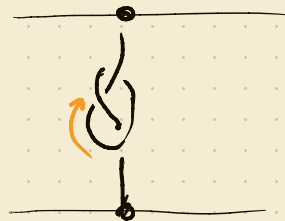
Да



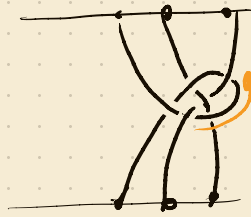
Да



Да

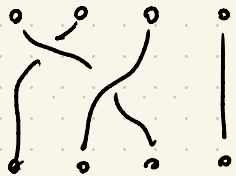


НЕТ

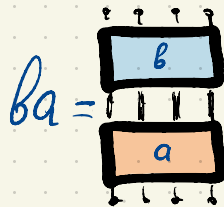
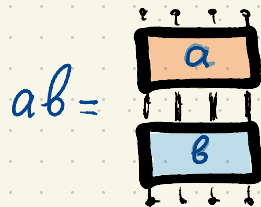


НЕТ

Коса :

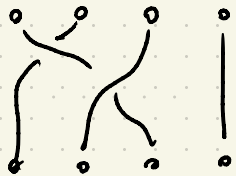


Произведение кос

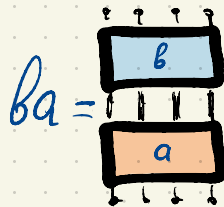
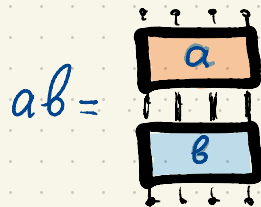


0. Придумайте такую косу e , что $ue = u$
для любой косы u .
 $eu = u$

Коса:

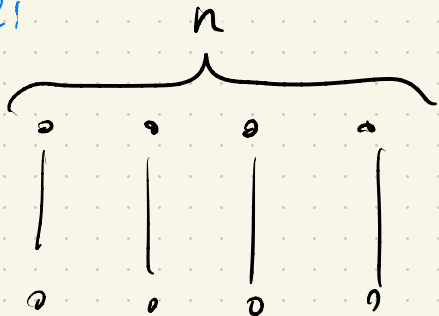


Произведение кос



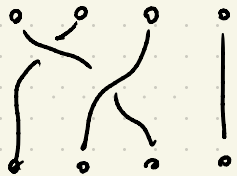
0. Придумайте такую косу e , что $ue = u$
для любой косы u .
 $eu = u$

Решение:

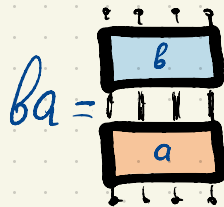
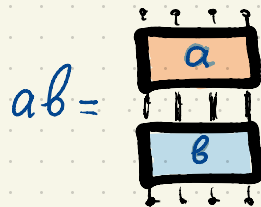


Тривиальная коса на n нитях

Коса :



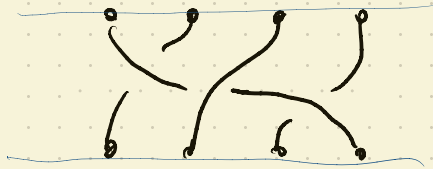
Произведение кос



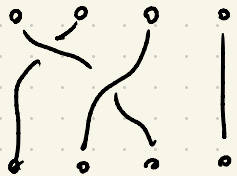
Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

Обозначение: $v = u^{-1}$

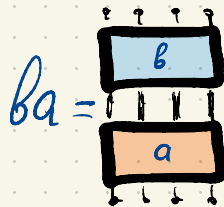
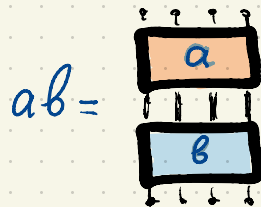
① Нарисуйте косу, обратную к



Коса :

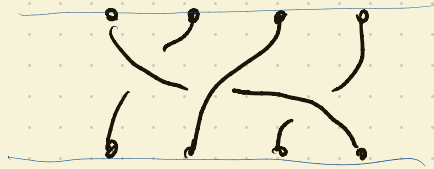


Произведение кос

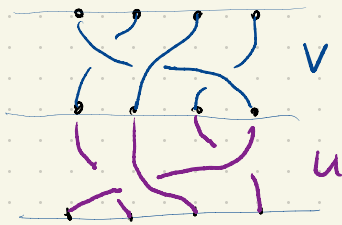


Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

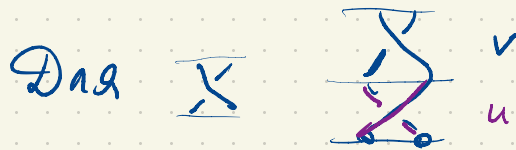
① Нарисуйте косу, обратную к



Решение:



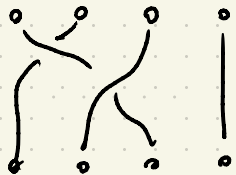
Обозначение: $v = u^{-1}$



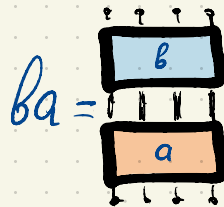
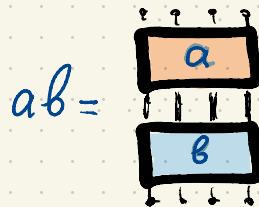
Ответ:

$u =$ отзеркаливаем v

Коса :



Произведение кос

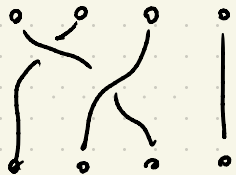


Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

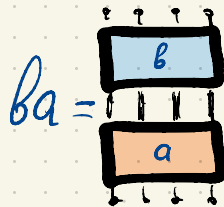
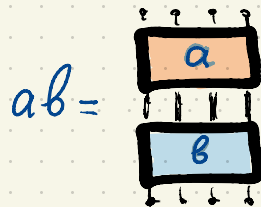
② Пусть $v = u^{-1}$, т.е. $u \cdot v = e$
Покажите, что $v \cdot u = e$.

Обозначение: $v = u^{-1}$

Коса :



Произведение кос



Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

(2) Пусть $v = u^{-1}$, т.е. $u \cdot v = e$
Покажите, что $v \cdot u = e$.

Обозначение: $v = u^{-1}$

Решение:

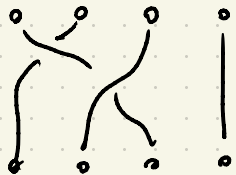
Да, потому что

$\Rightarrow$

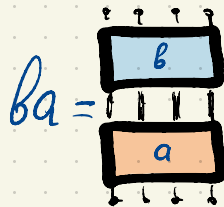
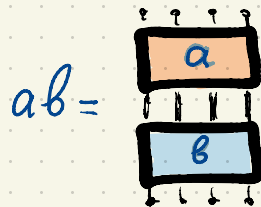
$v =$ зеркальное u

$u =$ зеркальное v

Коса :



Произведение кос

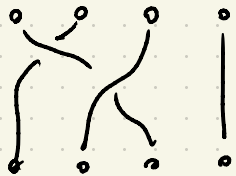


Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

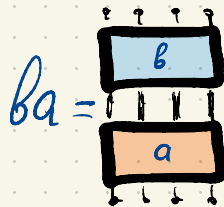
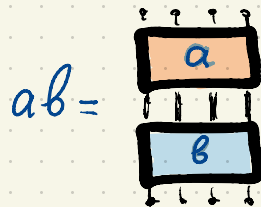
③ Покажите что $a(bc) = (ab)c$

Обозначение: $v = u^{-1}$

Коса :



Произведение кос

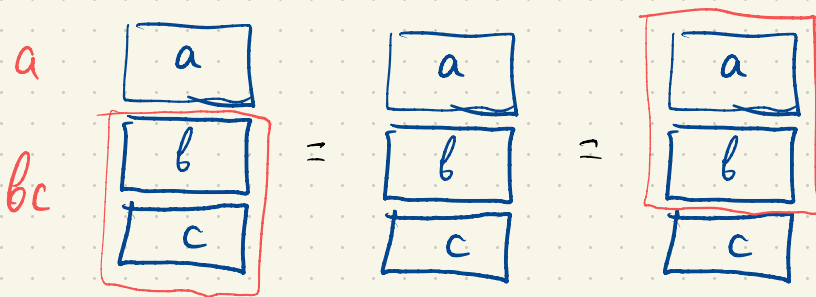


Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

③ Покажите что $a(bc) = (ab)c$

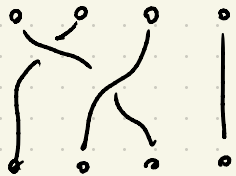
Обозначение: $v = u^{-1}$

Решение:

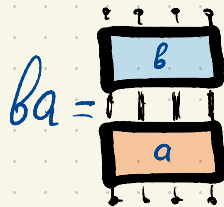
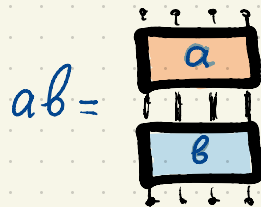


$$a(bc) = abc = (ab)c$$

Коса :



Произведение кос



Коса v , такая что $uv = e$ называется **обратной** к u .

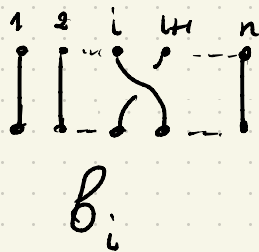
Обозначение: $v = u^{-1}$

Множество G с операцией $*$ называется **группой** если:

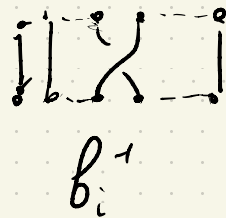
- 1) для любых a, b из G , $a * b$ лежит в G
- 2) в G есть элемент e , т.ч. $a * e = e * a = a$
- 3) каждый элемент a из G имеет обратный a^{-1} ,
т.ч. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$
- 4) $a * (b * c) = (a * b) * c$

Т.е. **косы**
из n нитей
с операцией
произведения
являются группой

Любая
коса = произведение
кос вида



и

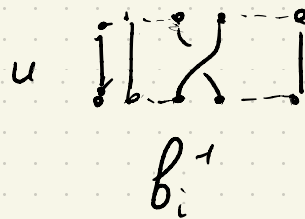
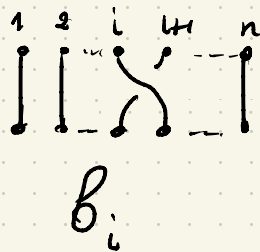


$i=1, 2, \dots, n-1$

4a) Запишите в виде произведения v_i косу



Любая коса = произведение кос вида



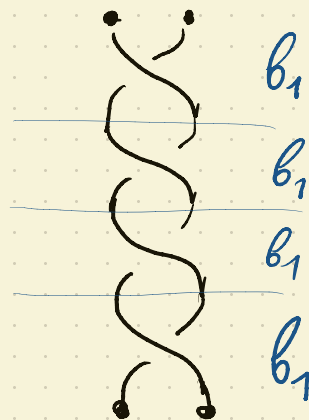
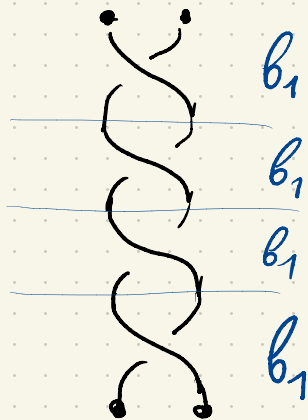
$i=1, 2, \dots, n-1$

4а) Запишите в виде произведения v_i косу

Решение:

В косе 2 нити,
т.е. $n=2$,
и есть только

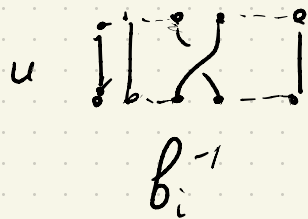
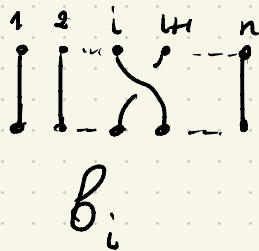
v_1 и v_1^{-1}



Получилось:

$$v_1 v_1^{-1} v_1^{-1} v_1 = v_1^4$$

Любая
коса = произведение
кос вида

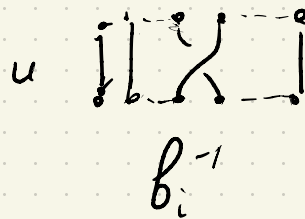
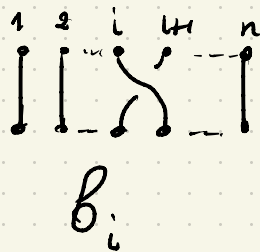


$i=1, 2, \dots, n-1$

4в) Запишите в виде произведения v_i хлеб халу:



Любая коса = произведение кос вида



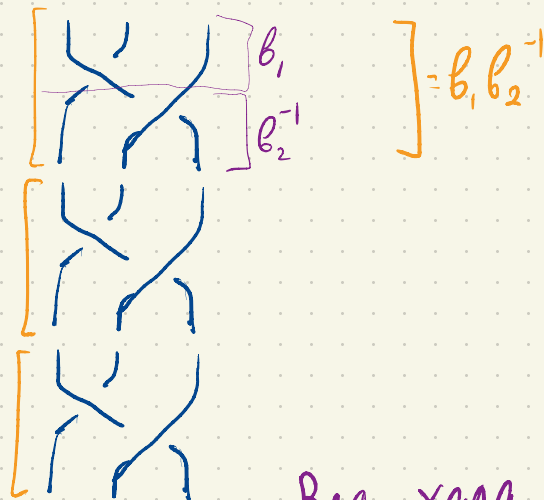
$i=1, 2, \dots, n-1$

4в) Запишите в виде произведения v_i хлеб халу:

Решение

Это "обычная" коса:

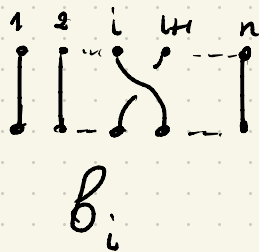
одинаковые куски



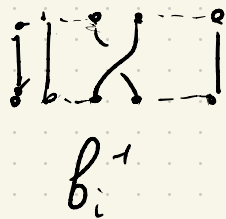
$$\text{Вся хала} = v_1 v_2^{-1} v_1 v_2^{-1} v_1 v_2^{-1} = (v_1 v_2^{-1})^3$$

Любая
коса

произведение
кос вида



и

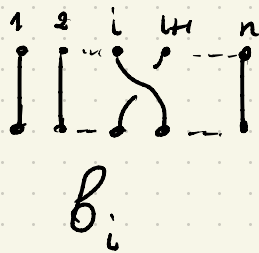


$i=1, 2, \dots, n-1$

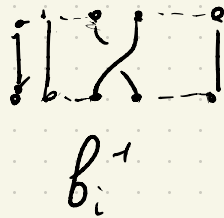
⑤ Правда ли, что $v_i v_j = v_j v_i$?

Любая
коса

произведение
кос вида



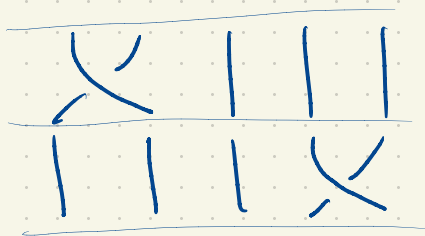
u


$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

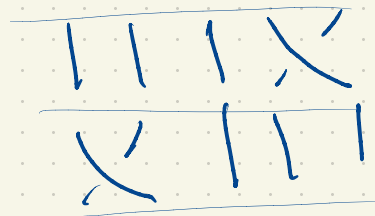
⑤ Правда ли, что $v_i v_j = v_j v_i$?

Решение!

Далекіе сплетення
друг на друга
не вяжэюць!

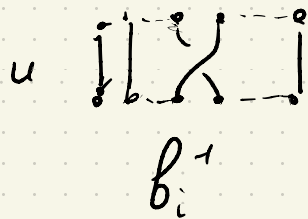
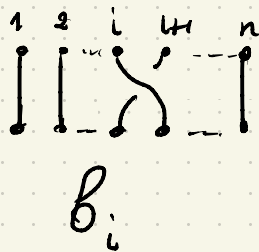
 b, b_s

11


$$b_5 \quad b_1$$

Близкие ???

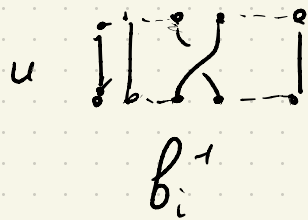
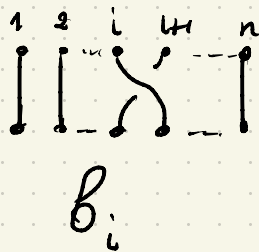
Любая
коса = произведение
кос вида



$i=1, 2, \dots, n-1$

⑥ Если $j > i+1$, то $v_i v_j = v_j v_i$
Покажите, что $v_i v_{i+1} \neq v_{i+1} v_i$

Любая коса = произведение кос вида



$i=1, 2, \dots, n-1$

⑥ Если $j > i+1$, то $v_i v_j = v_j v_i$
Покажите, что $v_i v_{i+1} \neq v_{i+1} v_i$

Решение!

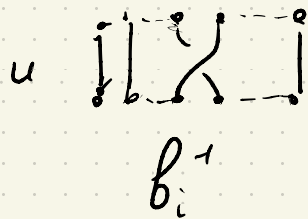
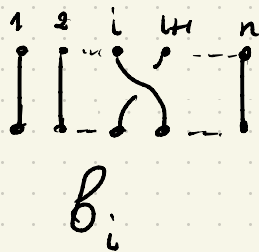


$v_1 v_2$: первая нить
приходит в 3е место



$v_2 v_1$: первая нить
приходит в 2е место

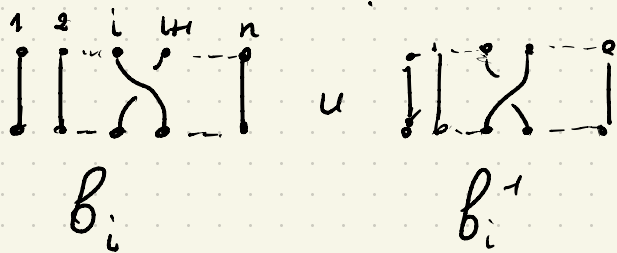
Любая
коса = произведение
кос вида



$i=1, 2, \dots, n-1$

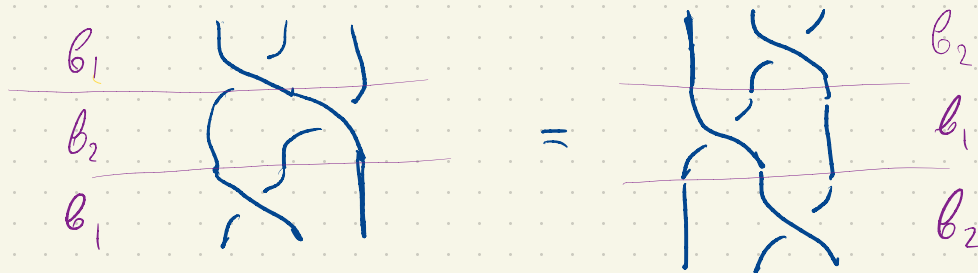
7 Покажите, что $b_1 b_2 b_1 = b_2 b_1 b_2$

Любая коса = произведение кос вида

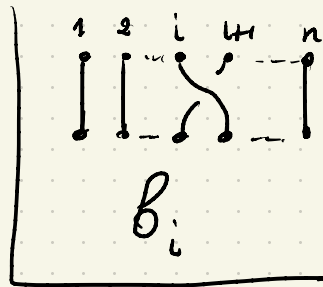

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

7) Покажите, что $b_1 b_2 b_1 = b_2 b_1 b_2$

Решение!



В группе кос из n нитей
выполнено:



$$1. \quad v_i v_j = v_j v_i \quad \text{при } j > i+1$$

$$2. \quad v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}$$

Можно доказать что:

Любое другое равенство в этой группе
является следствием этих соотношений.



кельтский
орнамент