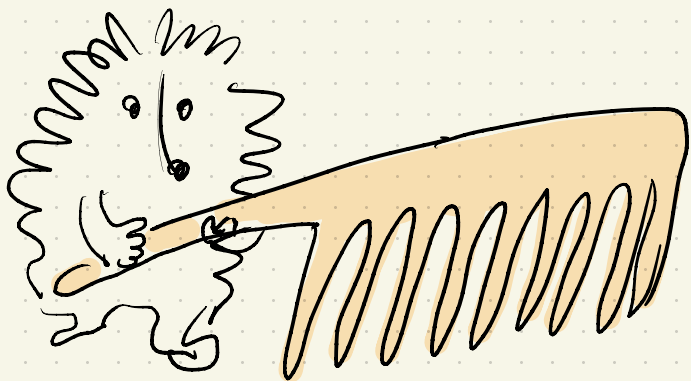


4

Теорема о причёсывании ЕЖА



Но ёж-то ведь знает,
что он не колючий,
Чего они все?...

Владимир Ланцберг, 1988

Причёсывание плоскости

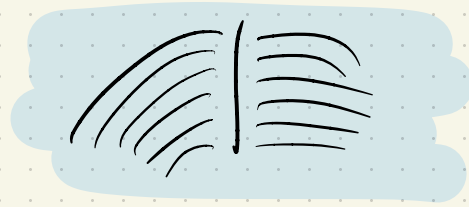
- В каждой точке растёт шерстинка



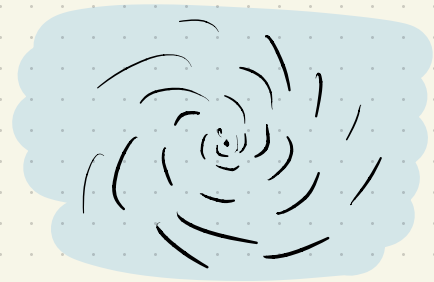
- "Причёсано", если

- все шерстинки лежат (не стоят дыбом)
- шерстинки, растущие близко лежат в близких направлениях

Запрещено



пробор

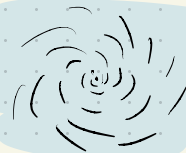


макушка

① Как причесать плоскость
(без проборов и макушек) ?



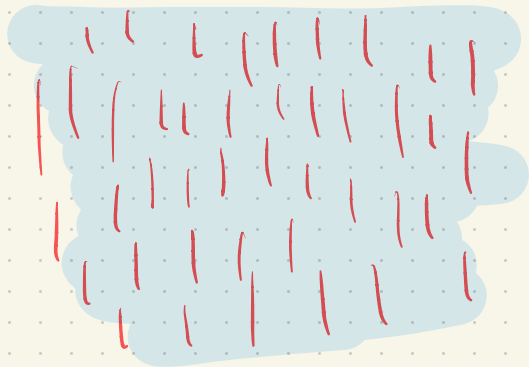
пробор



макушка

① Как причесать плоскость
(без проборов и макушек) ?

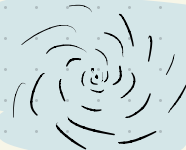
Решение:



направим все шерстинки
в одну сторону ↓



пробор

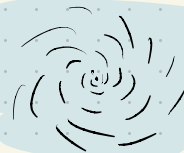


макушка

① Причесайте сферу без проборов.
Сколько макушек получилось?



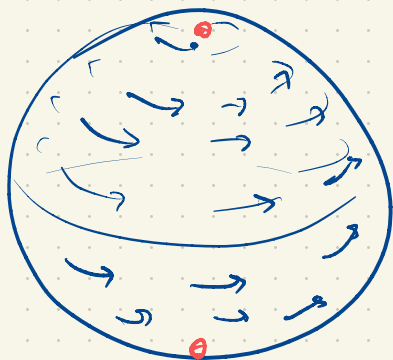
пробор



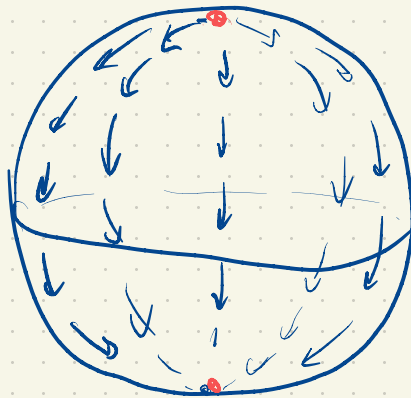
макушка

① Прочешите сферу без проборов.
Сколько макушек получилось?

Решение:



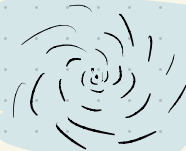
2 макушки



2 макушки



пробор

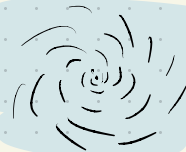


макушка

2. Можно ли причесать сферу так,
чтобы была только одна макушка?



гребень



макушка

2) Можно ли причесать сферу так,
чтобы была только одна макушка?

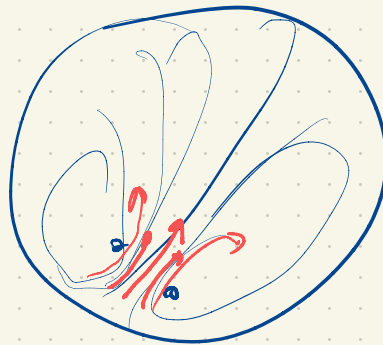
Решение:



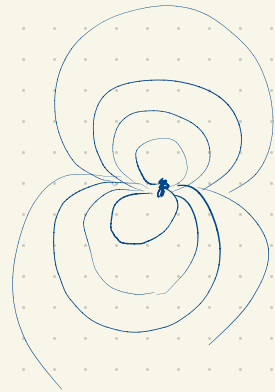
две макушки
в полюсах



постепенно
сдвигаем



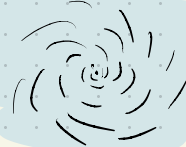
очень близко



одна двойная
макушка



гребень



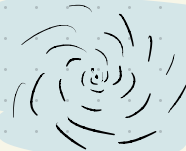
макушка

Теорема о причёсывании ежа:

Невозможно причёсать сферу так,
чтобы не было ни проборов, ни макушек.



пробор



макушка

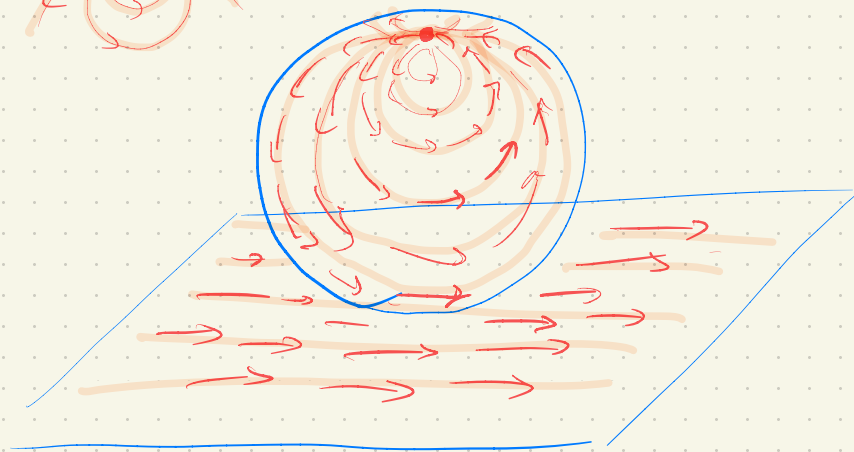
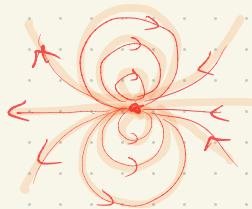
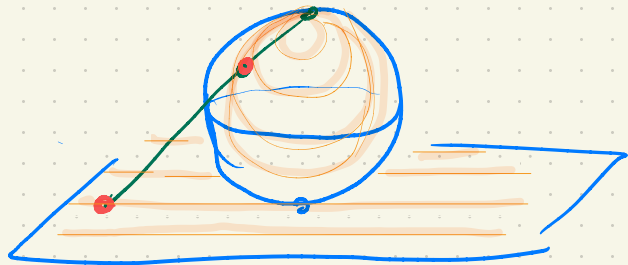
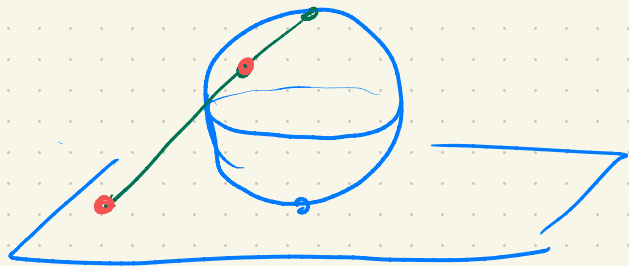
[не существует непрерывного векторного поля
на сфере, не имеющего нулей]

Анри Пуанкаре, 1885

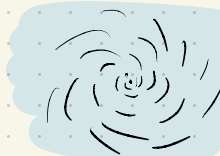


Теорема: невозможно причесать ежа.

Попытка поднять на сферу
прическу с плоскости:



гребень

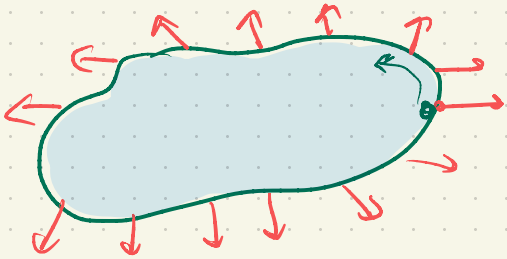


макушка

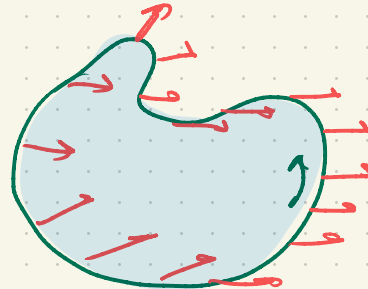
Теорема: невозможно причесать ежа.

Идеи доказательства:

1. Вращение вдоль замкнутой кривой:
= сколько полных оборотов сделает стрелка, пока пройдет вокруг кривой



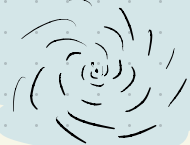
1



0



гребень



макушка

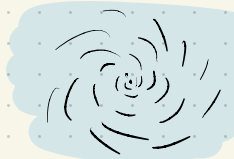
Теорема: невозможно причесать ежа.

Идеи доказательства:

1. Вращение вдоль замкнутой кривой:
= сколько полных оборотов сделает стрелка, пока пройдет вокруг кривой

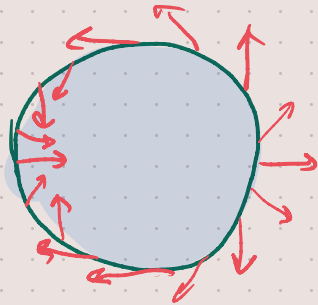
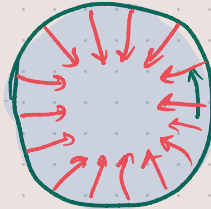
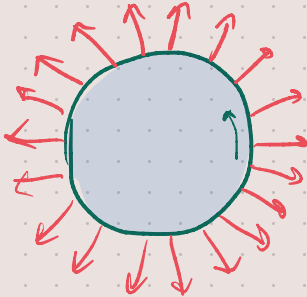
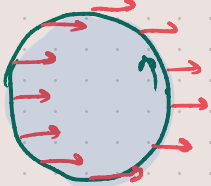


гребень



макушка

- Найдите вращение вдоль кривых:



Теорема: невозможно причесать ежа.

Идеи доказательства:

1. Вращение вдоль замкнутой кривой:
= сколько полных оборотов сделает стрелка, пока пройдет вокруг кривой

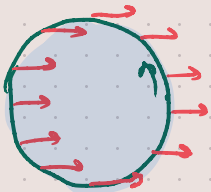


гребень

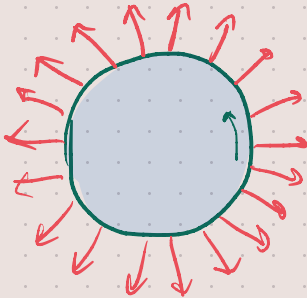


макушка

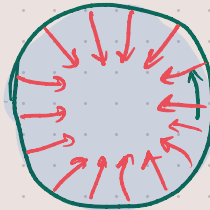
- Найдите вращение вдоль кривых:



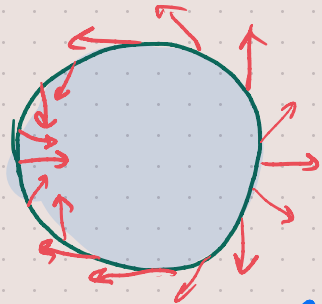
0



1



1



2

Теорема: невозможно причесать ежа.

Идеи доказательства:

1. Вращение вдоль замкнутой кривой:

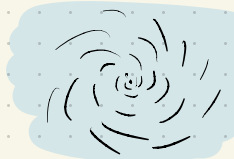
2. Если нет особых точек,
то при плавной деформации кривой
вращение вдоль неё не поменяется

вращение должно меняться без скачков
[поменяли кривую чуть-чуть, т.е. направления
стрелок изменилось чуть-чуть]

но целое число поменяется без скачка
не может



гребень



макушка

Теорема: невозможно причесать ежа.

Идеи доказательства:

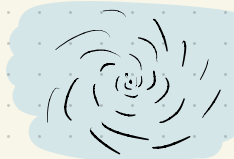
1. Вращение вдоль замкнутой кривой:

2. Если нет особых точек, то при плавной деформации кривой вращение вдоль неё не поменяется

3. Предположим, что причесать можно.
Найдём две кривых, для которых вращение ^{этой принажи} разное.
Продеформируем одну кривую в другую..
Противоречие покажет, что причесать нельзя.



гребень



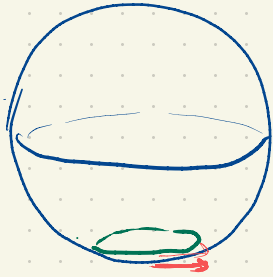
макушка

Теорема: невозможно причесать ежа.

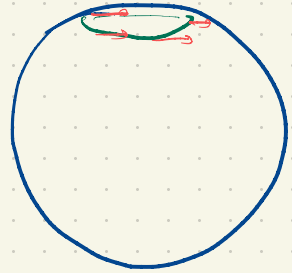
Идеи доказательства:

3. Найдём две кривых, для которых
вращение разное

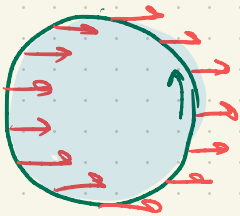
A: ЮГ:



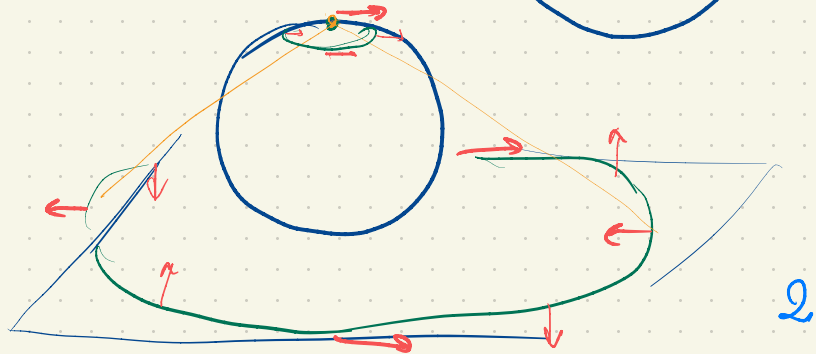
B: север



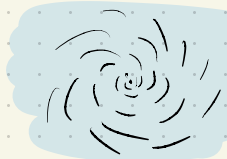
Почти то же, что



til 0



гребень

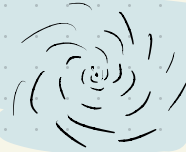


макушка

③ Докажите, что на Земле
всегда есть хотя одна точка,
в которой не дует ветер.



гребень

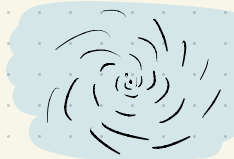


макушка

③ Докажите, что на Земле
всегда есть хотя одна точка,
в которой не дует ветер.



пробор



макушка

Решение:

Пусть такой точки нет.
Причешем сферу, уложив все волоски по ветру.
Это невозможно!

← по теореме о тричесывании уха.

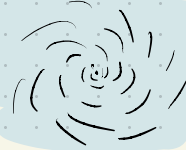
Замечание: настоящий ветер в "макушке" может
не исчезнуть, а сформировать торнадо



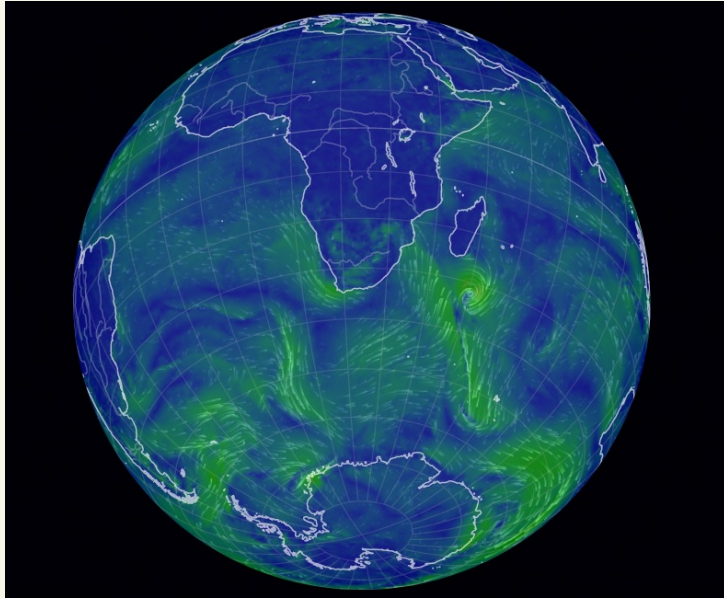
③ Докажите, что на Земле
всегда есть хотя одна точка,
в которой не дует ветер.



гребор



макушка



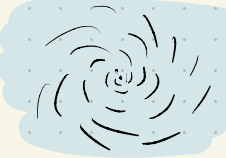
Global-wind-map

④ Каждое непрерывное отображение сферы в себя
либо имеет неподвижную точку,
либо отображает какую-то точку
в диаметрально противоположную.

← ничего не рвёт
но может растягивать

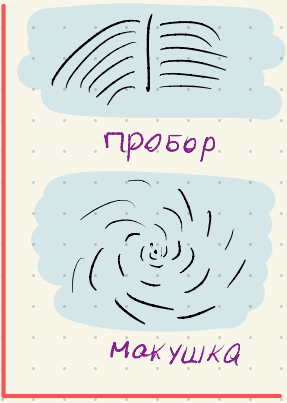


гребер

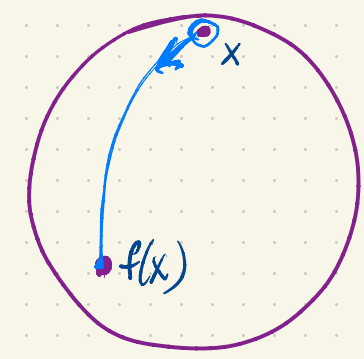


макушка

(4) Каждое непрерывное ^{← ничего не рвёт, но может растягивать} отображение сферы в себя
 либо имеет неподвижную точку,
 либо отображает какую-то точку
 в диаметрально противоположную.

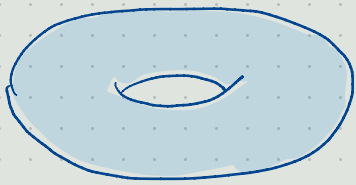


Решение: Пусть f - отображение, не оставляющее
 на месте ни одну точку,
 и такое, что никакая точка
 не отображается в противоположную

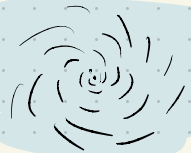


- Соединим каждую точку x на сфере с тем местом, куда она отобразилась
- Направим шерстинку в точке x вдоль полученного отрезка
- получим, что причесали сферу — а это невозможно!

5) Причешите бублик (төр)

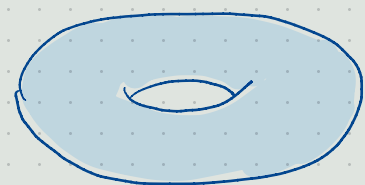


гребень



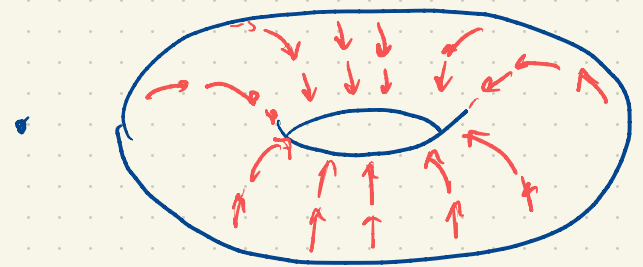
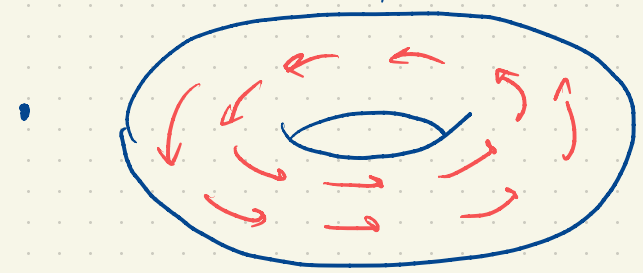
макушка

5) Причесайте бублик (тор)

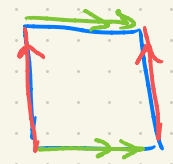


Решение:

Разные прически:



можно склеить тор из квадрата



и причесать квадрат вдоль любого направления



сумма чисел вращения по кривым,
обходящим все особые точки (макушки)
на поверхности,
равна Эйлеровой характеристике поверхности.

Эйлерова характеристика поверхности = $V - P + \Gamma$

- разрежем поверхность на многоугольники

- обозначим V - число их вершин на поверхности
(т.е. после склейки)

P - " - - " - рёбер - " -

Γ - "граней" - т.е. многоугольников

Можно доказать, что $V - P + \Gamma$ не зависит от разрезания

⑥ Найдите Эйлерову характеристику

(а) сферы

(б) тора (т.е. бублика)

$$B - P + \Gamma$$

6) Найдите Эйлерову характеристику

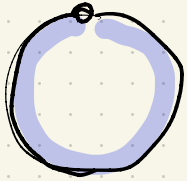
$B - P + \Gamma$

(а) сферы

(б) тора (т.е. бублика)

Решение

(а)

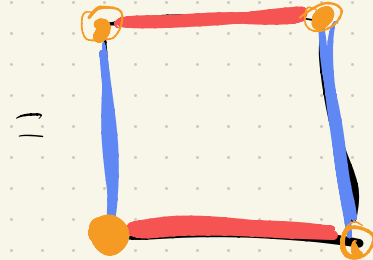


склеим из двух кругов
(одноугольников)

$$B - P + \Gamma =$$

$$1 - 1 + 2 = 2$$

(б)



$$B - P + \Gamma =$$

$$1 - 2 + 1 = 0$$

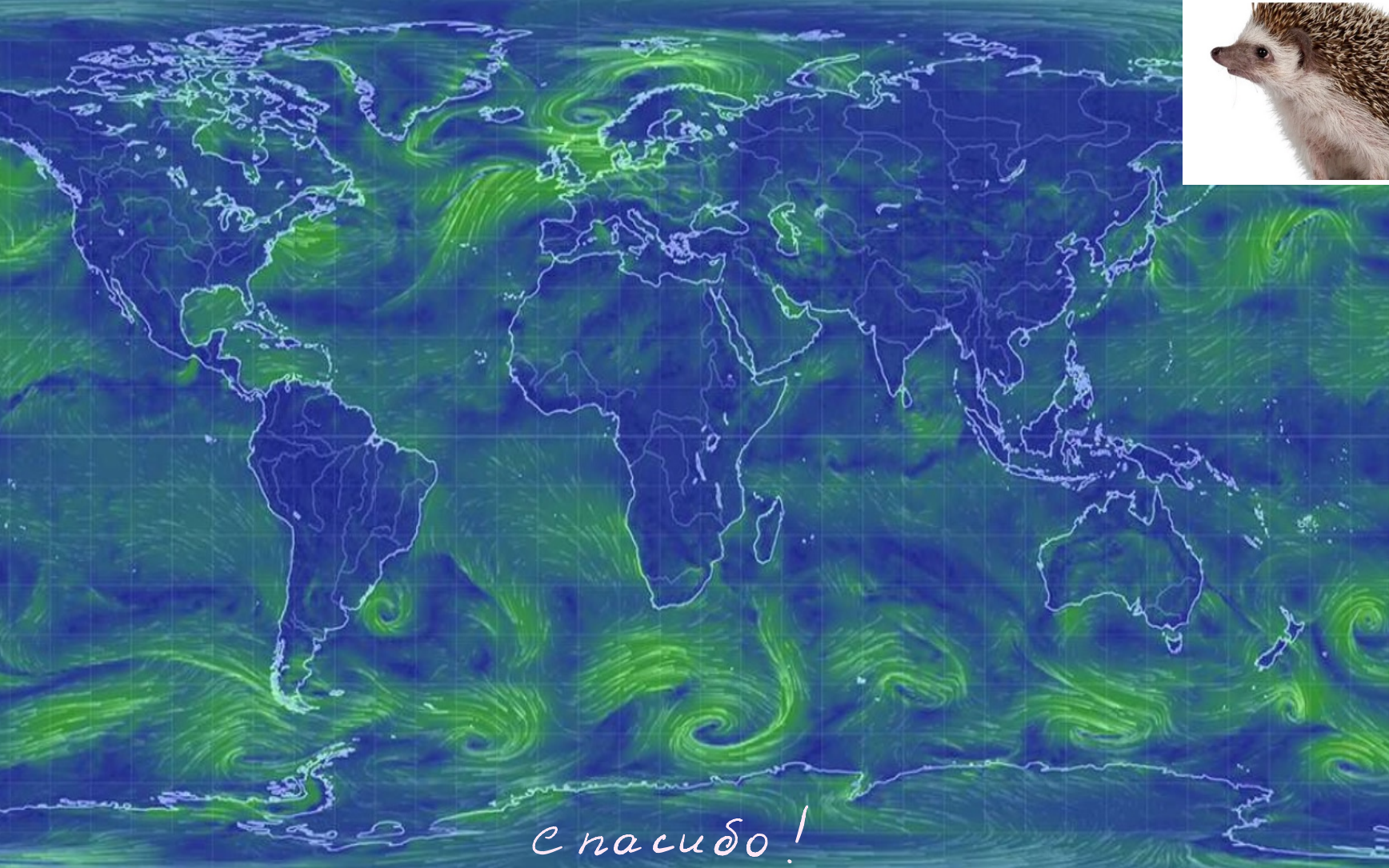
сумма чисел вращения по кривой
обходящей все особые точки (макушки)
на поверхности
равна **Эйлеровой характеристике** поверхности.

• Для сферы это 2,
поэтому без макушек не получится.

• Для тора это 0 — поэтому получилось

• Других замкнутых поверхностей — $2-2g$

где $g \geq 2$ число ручек
 $2-2g \neq 0$, поэтому причесать не получится.



спасибо!