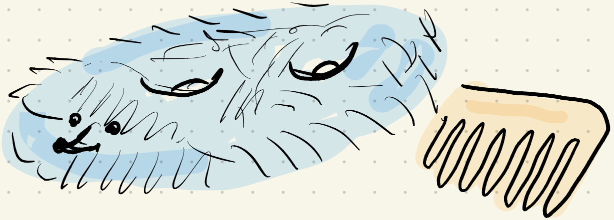
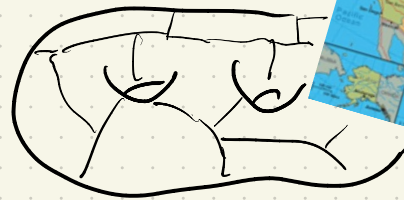
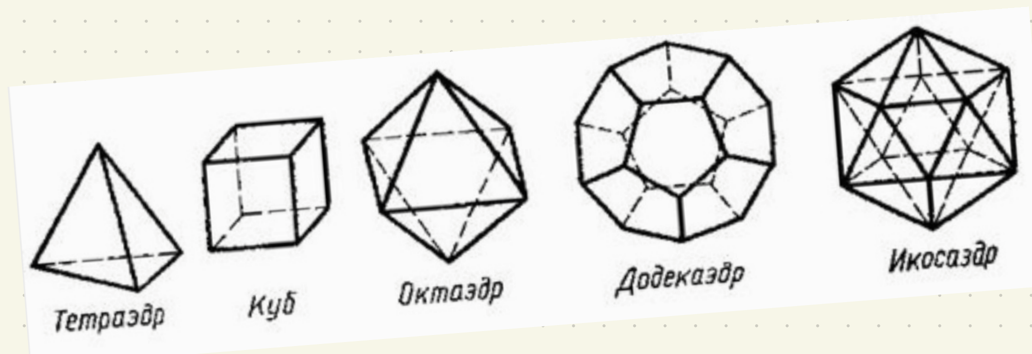




Эйлерова характеристика



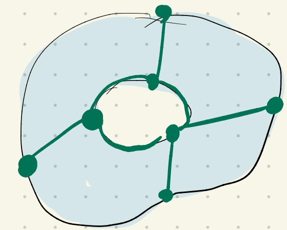
Эйлерова характеристика поверхности S:

- нарисуем на поверхности граф G, делящий S на многоугольники
- В = число вершин графа G

  Р = число рёбер

  Г = число граней
- $\chi(S) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г}$

эйлерова характеристика



В = 7

Р = 11

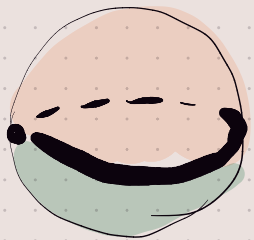
Г = 4

$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 7 - 11 + 4 = 0$

$\chi = В - Р + Г$

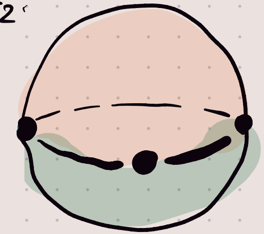
⓪ Найдите эйлерову характеристику сферы, пользуясь графами G_1, G_2 G_3:

G_1:



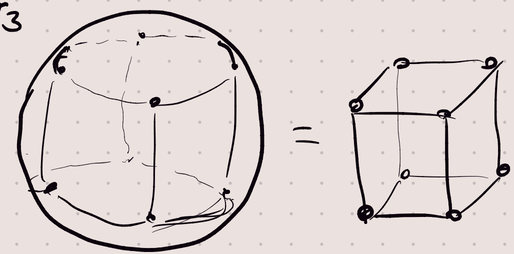
(одно ребро делит на 2 полусферы)

G_2:



(3 ребра делят на 2 полусферы)

G_3

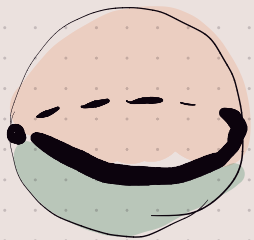


(куб)

$\chi = В - Р + Г$

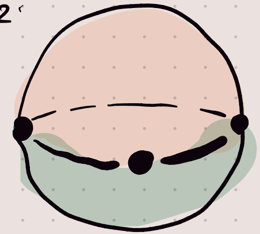
0 Найдите эйлерову характеристику сферы, пользуясь графами G_1, G_2, G_3:

G_1:



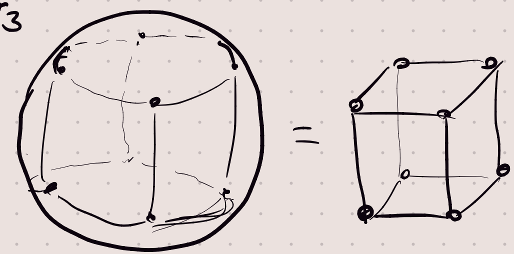
(одно ребро делит на 2 полусферы)

G_2:



(3 ребра делят на 2 полусферы)

G_3



(куб)

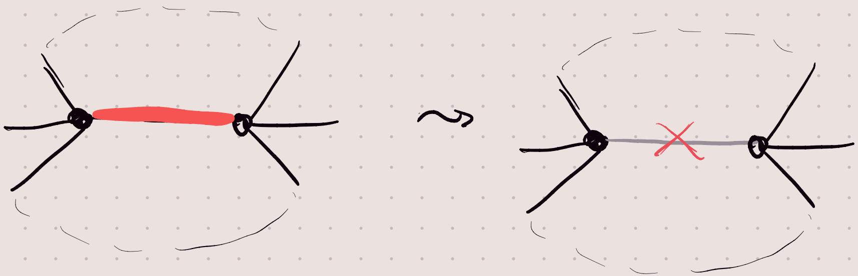
Решение:

$В = 1 \quad Р = 1 \quad Г = 2$	$В = 3 \quad Р = 3 \quad Г = 2$	$В = 8 \quad Р = 12 \quad Г = 6$
$1 - 1 + 2 = 2$	$3 - 3 + 2 = 2$	$8 - 12 + 6 = 2$

Получилось одно и то же! $\chi(\text{сфера}) = 2$

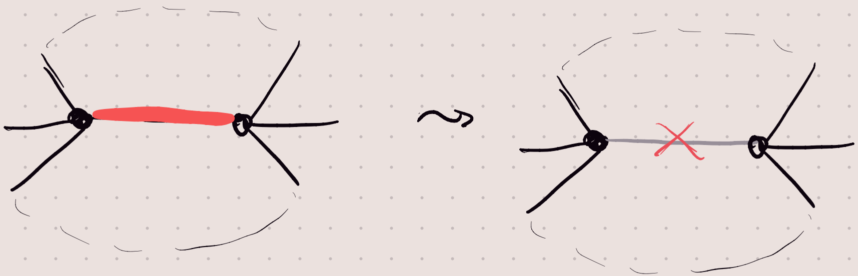
$\chi = В - Р + Г$

① Из графа G выкинули одно ребро.
(так, что все области остались многоугольниками)
Покажите, что величина $В - Р + Г$ не изменилась



$\chi = В - Р + Г$

1. Из графа G выкинули одно ребро (так, что все области остались многоугольниками). Покажите, что величина $В - Р + Г$ не изменилась



Решение:

число вершин $В'$ в новом графе: $В' = В$

ребер $Р'$: $Р' = Р - 1$

граней $Г'$: $Г' = Г - 1$

$$\chi_{новая} = В' - Р' + Г' = В - (Р-1) + (Г-1) = В - Р + Г = \chi_{старая}$$

$\chi = В - Р + Г$

2. Из графа выкинули вершину валентности 2:

Покажите, что величина $В - Р + Г$ не изменилась

$\chi = В - Р + Г$

2 Из графа выкинули вершину валентности 2:

Покажите, что величина $В-Р+Г$ не изменилась

Решение:

число вершин $В'$ в новом графе: $В' = В - 1$

ребер $Р'$: $Р' = Р - 1$

граней $Г'$: $Г' = Г$

$$\chi_{\text{новая}} = В' - Р' + Г' = (В-1) - (Р-1) + Г = В - Р + Г = \chi_{\text{старая}}$$

3 Выкинули свободно висящее ребро:

$\chi = В - Р + Г$

$\chi = В - Р + Г$

③ Выкинули свободно висящее ребро:

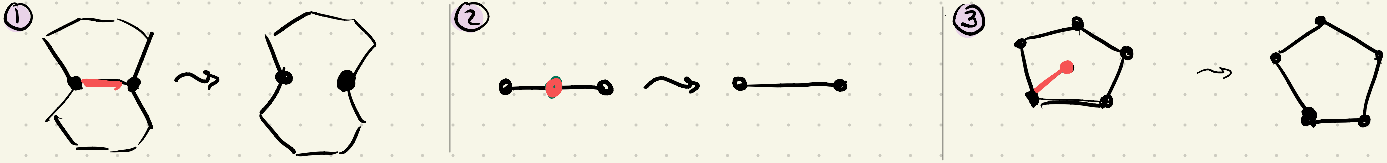
Решение:

число вершин $В'$ в новом графе: $В' = В - 1$

ребер $Р'$: $Р' = Р - 1$

граней $Г'$: $Г' = Г$

$$\chi_{новая} = В' - Р' + Г' = (В-1) - (Р-1) + Г = В - Р + Г = \chi_{старая}$$

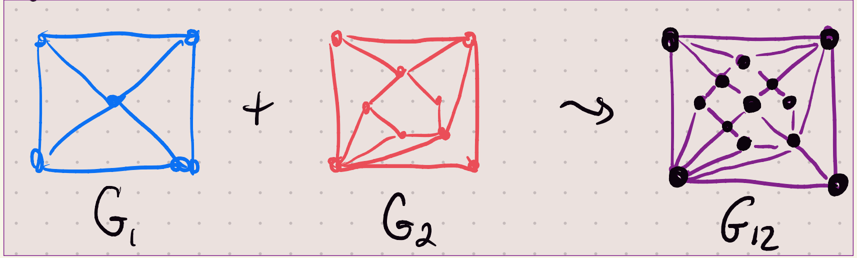


$\chi = В - Р + Г$

Утверждение В−Р+Г не зависит от выбора графа G.

Идея доказательства Пусть есть два графа, G_1 и G_2

- Рассмотрим объединение G_{12} графов G_1 и G_2:



- G_{12} является подразбиением G_1
  ①, ②, ③ показывает, что G_{12} можно превратить в G_1 без изменения величины В−Р+Г.
- Аналогично G_2 имеет ту же величину В−Р+Г, что G_{12}
- Т.е у произвольных двух графов G_1 и G_2 результат одинаков!

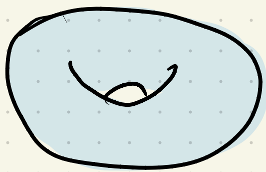
4 Найдите эйлерову характеристику тора

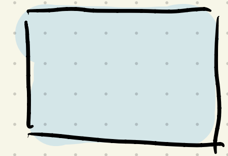
$\chi = В - Р + Г$

4 Найдите эйлерову характеристику тора

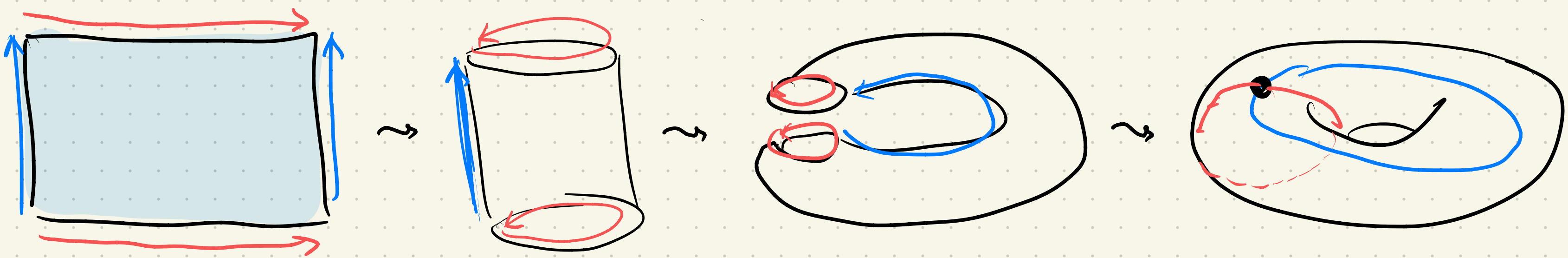
$\chi = В - Р + Г$

Решение:





тор можно склеить из квадрата:



$В = 1$ (все вершины склеются в одну)

$Р = 2$ (красное и синее)

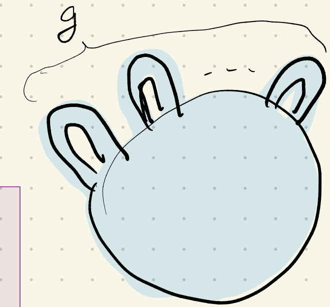
$Г = 1$

$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$

Поверхностью рода g называется сфера с g ручками.

Её можно склеить из $4g$-угольника.

$\chi = В - Р + Г$

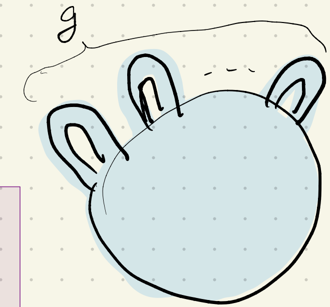


5 Найдите эйлерову характеристику поверхности рода g.

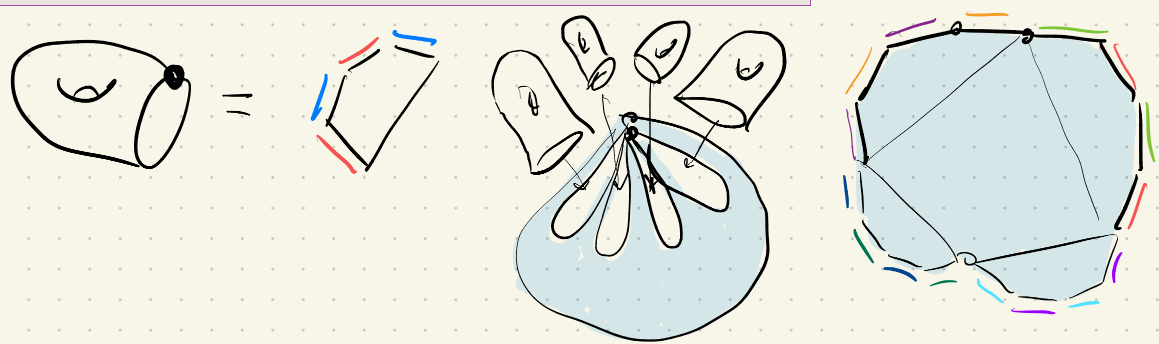
$\chi = В - Р + Г$

Поверхностью рода g называется сфера с g ручками.

Её можно склеить из $4g$-угольника.



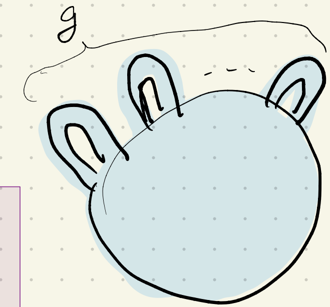
5 Найдите эйлерову характеристику поверхности рода g.



Поверхностью рода g называется сфера с g ручками.

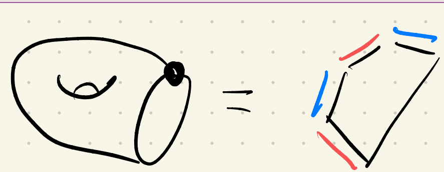
Её можно склеить из $4g$-угольника.

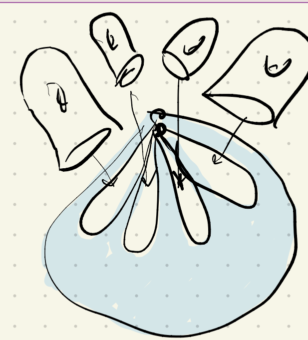
$\chi = В - Р + Г$

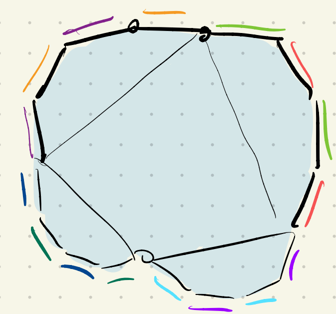


5 Найдите эйлерову характеристику поверхности рода g.

Решение:







$В = 1$

$Р = 2g$

$Г = 1$

$\chi = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

Проверка:

 $2 - 2 \cdot 0 = 2$

Тор: $2 - 2 \cdot 1 = 0$

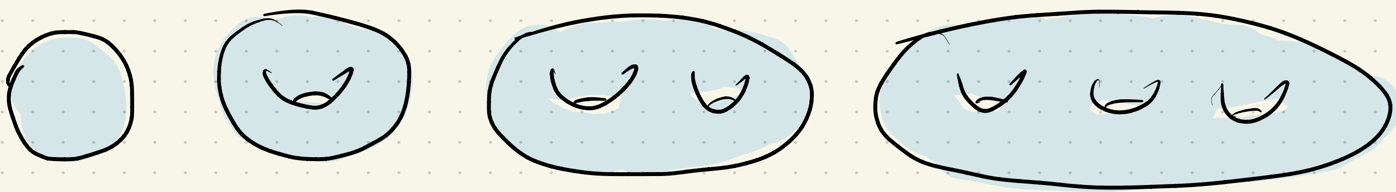
 $2 - 2 \cdot 2 = -2$

Причесывание поверхностей:

$\chi = В - Р + Г$

Сумма индексов вращения вокруг всех макушек $= \chi(S)$

Т.е

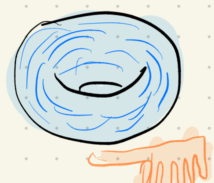


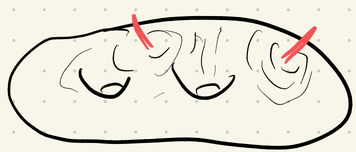
...

$\chi(S) = 2 - 2g$

2   0 -2 -4

не причесывается

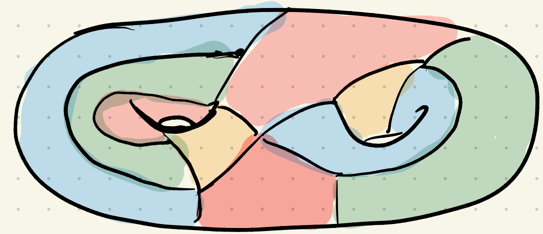




не причесывается

не причесывается

Раскраска карт на поверхностях:



<u>Теорема</u> (Heawood, 1890)

Пусть S – сфера с g ручками, $g \geq 1$.
Тогда для раскраски любой карты на S
достаточно $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g(S)}}{2} \right\rfloor$ цветов.

$$\chi = 2 - 2g$$

здесь $\lfloor x \rfloor$ = целая часть x,
например $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 1$

Спасибо!