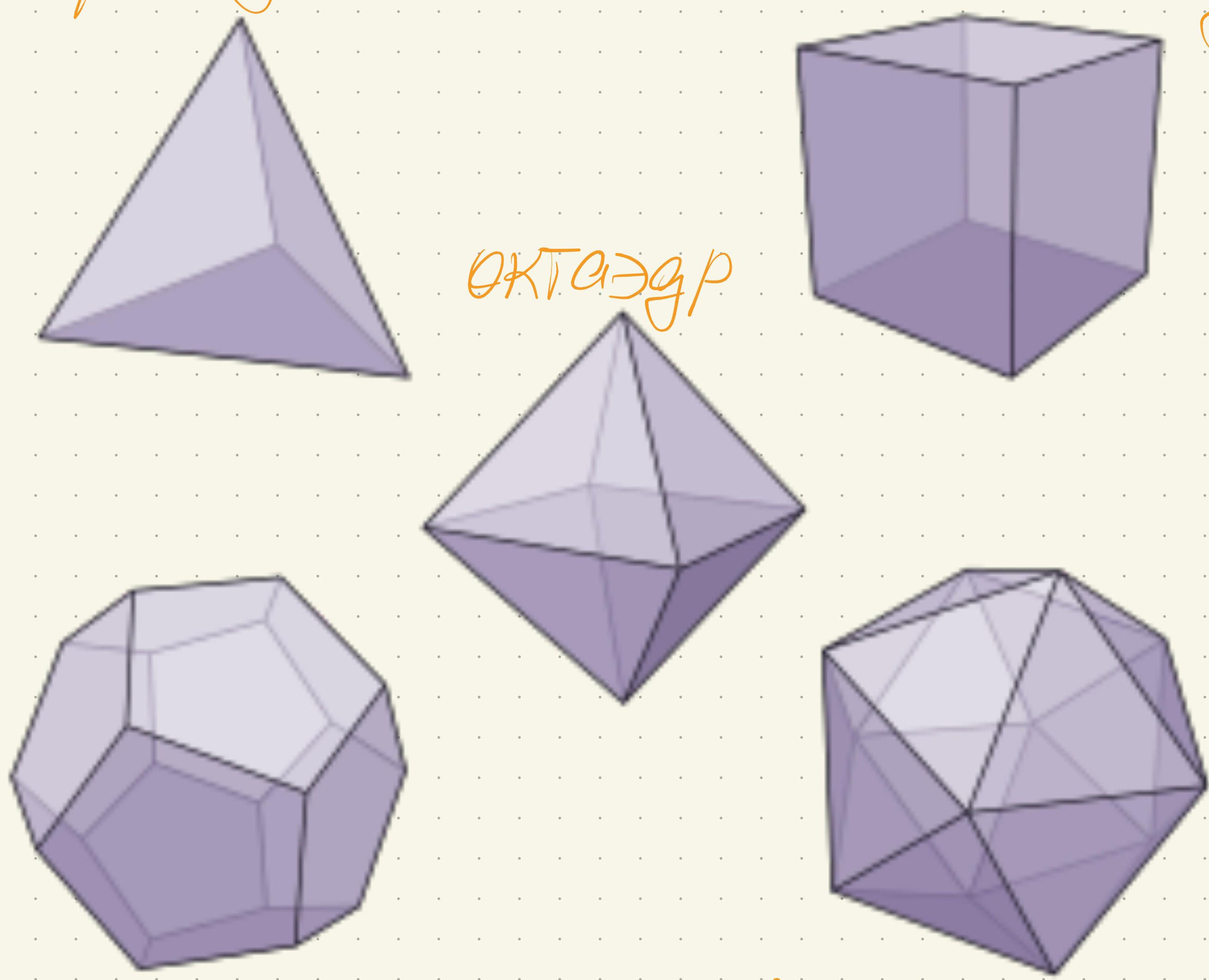
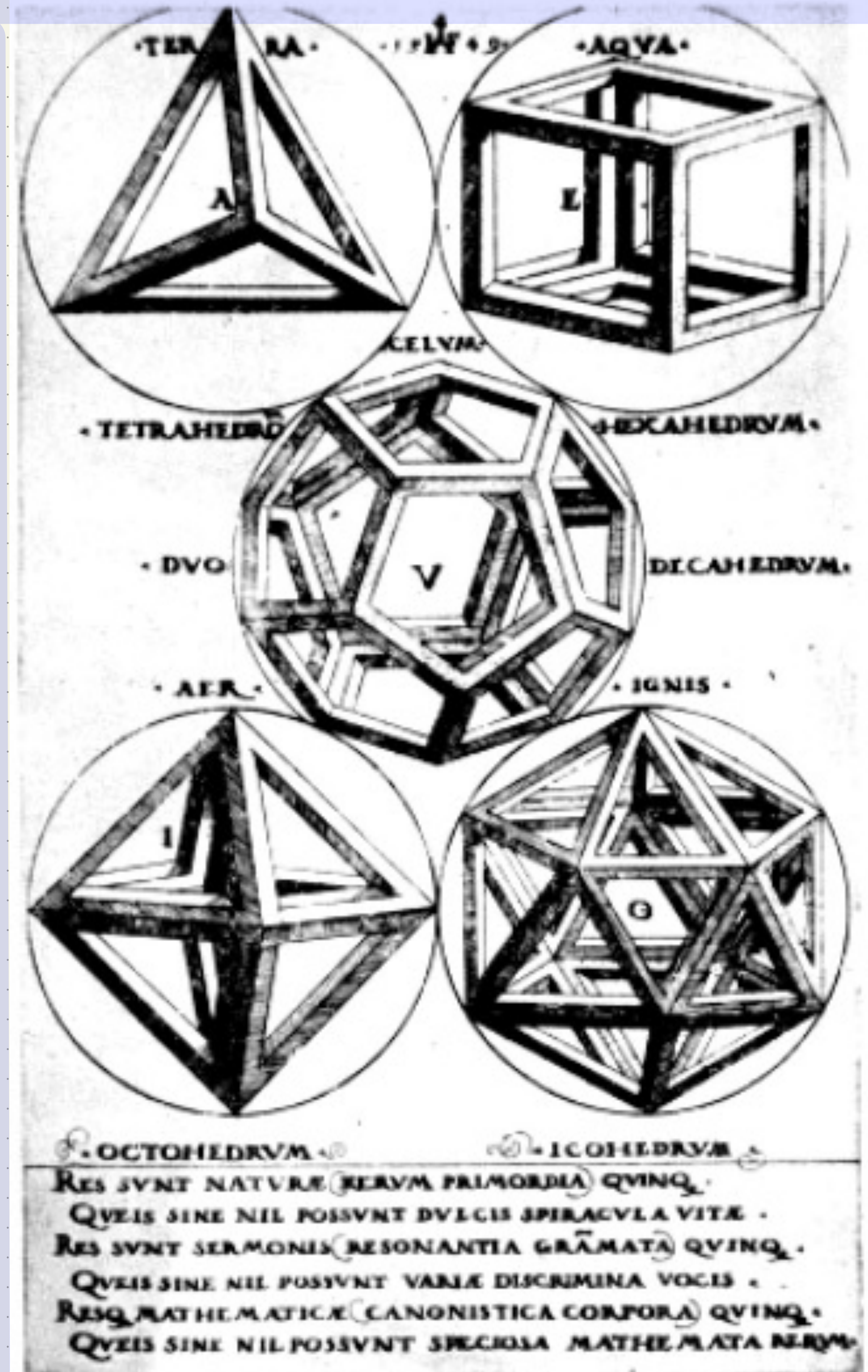
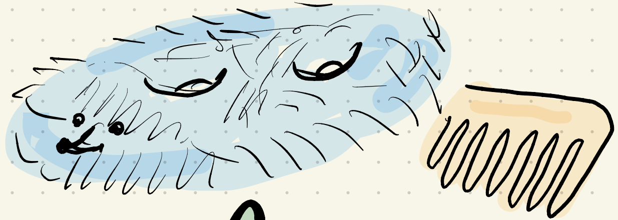
Правильные многогранники



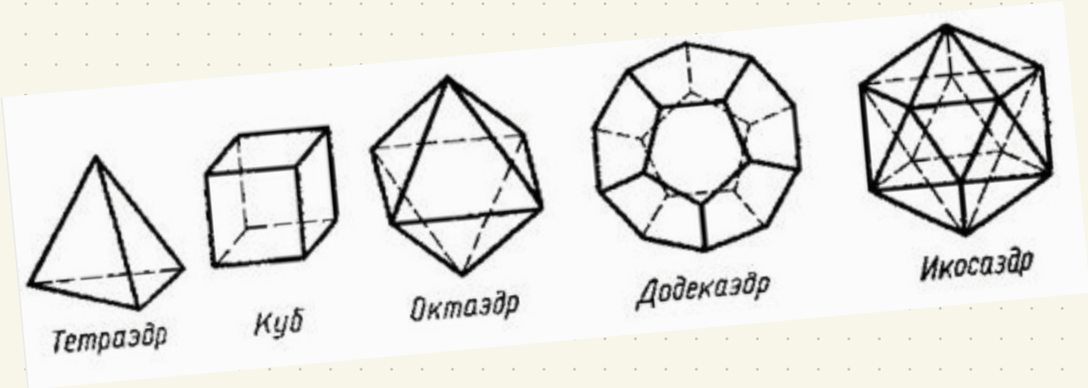


Augustin Herschvogel, 1549

7



Эйлерова характеристика и правильные многогранники



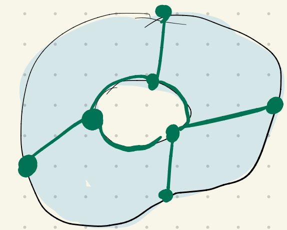
Эйлерова характеристика поверхности S:

- нарисуем на поверхности граф G, делящий S на многоугольники

- В = число вершин графа G
  Р = число рёбер
  Г = число граней

- $$\chi(S) = В - Р + Г$$

эйлерова характеристика



В = 7

Р = 11

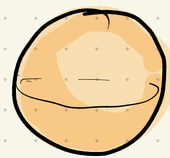
Г = 4

В − Р + Г = 7 − 11 + 4 = 0

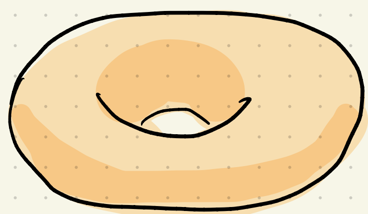
$$\chi(S) = \underbrace{В}_{\text{вершины}} - \underbrace{Р}_{\text{рёбра}} + \underbrace{Г}_{\text{грани}}$$

$$\chi(\overset{\text{поверхность}}{S})$$ не зависит от того, как разбить S (а зависит только от S)

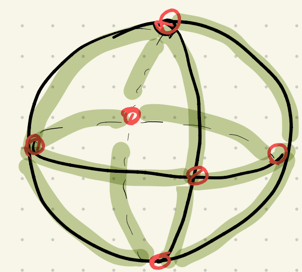
$\chi(\text{сфера}) = 2$



$\chi(\text{тор}) = 0$



Пример:

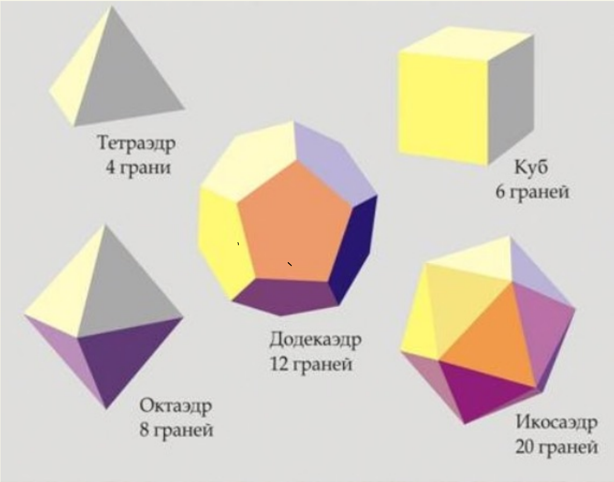


$$\begin{array}{ccccc} В & & Р & & Г \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 6 & - & 12 & + & 8 \end{array} = 2$$

Правильные многогранники

— многогранники с полной симметрией, т.ч.

- любую вершину v
можно симметрией перевести в любую вершину v';
- любое ребро e выходящее из v
в любое ребро e' из v',
- и любую грань, содержащую v и e
в любую грань содержащую v' и e'!



По-другому:

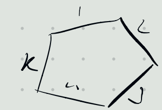
- Все грани — одинаковые правильные многоугольники
- Все углы между гранями одинаковые.

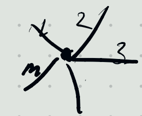
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников
  - по m ребер в каждой вершине





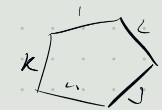
1а Докажите, что $Р = \frac{kГ}{2}$

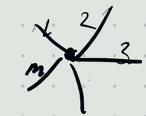
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$= 2$ на сфере

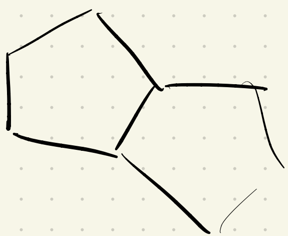
- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине





1а Докажите, что $Р = \frac{kГ}{2}$

Решение:



В каждой грани k ребер, т.е всего $k \cdot Г$.

Но каждое ребро посчитали 2 раза.

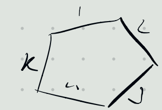
Поэтому $Р = \frac{kГ}{2}$

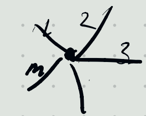
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников
  - по m ребер в каждой вершине





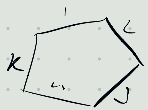
1в Докажите, что $Р = \dfrac{mВ}{2}$

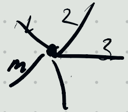
① Найдите **все** правильные многогранники

$\chi = B - P + \Gamma$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

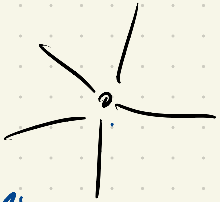
- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине





1б Докажите, что $P = \dfrac{mB}{2}$

Решение:



В каждую вершину приходит m ребер, т.е всего $m \cdot B$

Но каждое ребро сосчитали 2 раза (с двух концов)

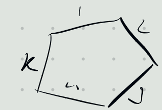
Поэтому $P = \dfrac{m \cdot B}{2}$

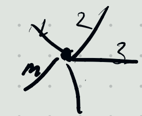
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников
  - по m ребер в каждой вершине





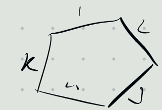
1c Знаем $Р = \frac{kГ}{2}$, $Р = \frac{mВ}{2}$. Докажите:

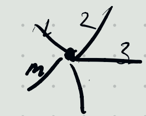
$$\boxed{\frac{2}{m}Р - Р + \frac{2}{k}Р = 2}$$

1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = \text{В} - \text{Р} + \text{Г}$
$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников
  - по m ребер в каждой вершине





1c Знаем $\text{Р} = \frac{k\text{Г}}{2}$, $\text{Р} = \frac{m\text{В}}{2}$. Докажите: $\boxed{\frac{2}{m}\text{Р} - \text{Р} + \frac{2}{k}\text{Р} = 2}$

Решение:

$$\text{Р} = \frac{m\text{В}}{2} \Rightarrow \text{В} = \frac{2\text{Р}}{m}$$

$$\text{Р} = \frac{k\text{Г}}{2} \Rightarrow \text{Г} = \frac{2\text{Р}}{k}$$

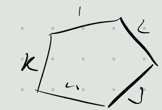
$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = \underbrace{\frac{2\text{Р}}{m}}_{\text{В}} - \text{Р} + \underbrace{\frac{2\text{Р}}{k}}_{\text{Г}} = 2$$

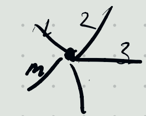
Можно считать, что многогранник нарисован на сфере

1 Найдите **все** правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$
$\parallel$
2 на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине





Получили $\boxed{\frac{2}{m}P - P + \frac{2}{k}P = 2}$, т.е $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$ $\quad \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{P}$

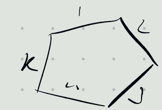
Может ли быть $m \geq 4$ и $k \geq 4$ одновременно?

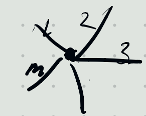
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине



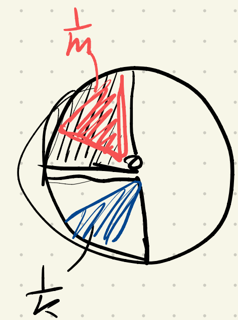


Получили $\boxed{\frac{2}{m}P - P + \frac{2}{k}P = 2}$, т.е $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$,

- Если $m \geq 4$ и $k \geq 4$, то $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} \leq 1 < 1 + \frac{2}{P}$ (Противоречие с $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$)

Решение:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{P}$$



Если $m \geq 4$, то $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}$

$k \geq 4$, то $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{4}$

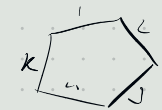
Но $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{P}$, Противоречие

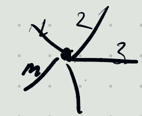
1 Найдите все правильные многогранники

$\boxed{\chi = В - Р + Г}$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине





Получили $\boxed{\frac{2}{m}P - P + \frac{2}{k}P = 2}$, т.е $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$

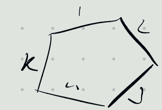
- Если $m \geq 4$ и $k \geq 4$, то $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} \leq 1 < 1 + \frac{2}{P}$ (Противоречие с $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$)

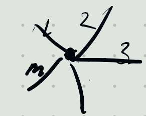
Если $m = 3$, то каким может быть k?

① Найдите все правильные многогранники $\chi = В - Р + Г$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине





Получили $\boxed{\frac{2}{m}P - P + \frac{2}{k}P = 2}$, т.е $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{p}$

$m = 2$

- Если $m \geq 4$ и $k \geq 4$, то $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} \leq 1 < 1 + \frac{2}{p}$ (Противоречие с $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{p}$)

- Если $m = 3$, то $\frac{2}{3} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{p} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{p} \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{p}$

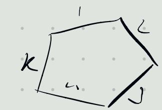
  $\frac{1}{k} > \frac{1}{6} \Rightarrow k < 6$, $k = 3, 4$ или 5.

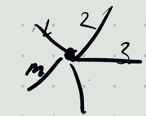
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$= 2$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине





Получили $\boxed{\frac{2}{m}P - P + \frac{2}{k}P = 2}$, т.е $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$

$m = 2$

- Если $m \geq 4$ и $k \geq 4$, то $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} \leq 1 < 1 + \frac{2}{P}$ (Противоречие с $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$)

- Если $m = 3$, то $\frac{2}{3} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{P} \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{P}$

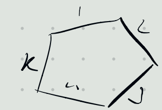
  $\frac{1}{k} > \frac{1}{6} \Rightarrow k < 6$, $k = 3, 4$ или 5.

Если $K = 3$, то каким может быть m?

1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г = 2$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине



Получили $\boxed{\frac{2}{m}P - P + \frac{2}{k}P = 2}$, т.е $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$

- Если $m \geq 4$ и $k \geq 4$, то $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} \leq 1 < 1 + \frac{2}{P}$ (Противоречие с $\frac{2}{m} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P}$)
- Если $m = 3$, то $\frac{2}{3} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{P} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{P} \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{P}$

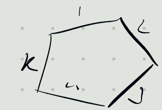
  $\frac{1}{k} > \frac{1}{6} \Rightarrow k < 6$, $k = 3, 4$ или 5.
- Если $k = 3$, то $m = 3, 4, 5$.
- Т.е (k, m) – одно из $(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$

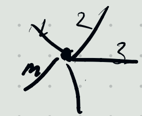
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$= 2$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине

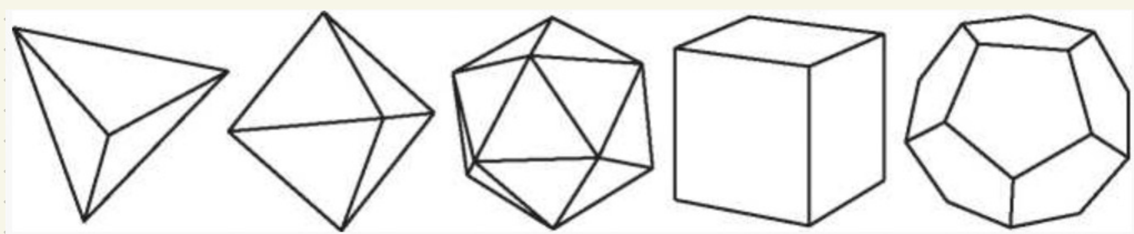




- Т.е (k,m) − одно из $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$

1a

Соедините пару (k,m) с соответствующим многогранником.

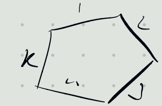


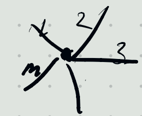
1 Найдите все правильные многогранники

$\chi = В - Р + Г$

$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

- Пусть многогранник
  - сделан из k-угольников,
  - по m ребер в каждой вершине



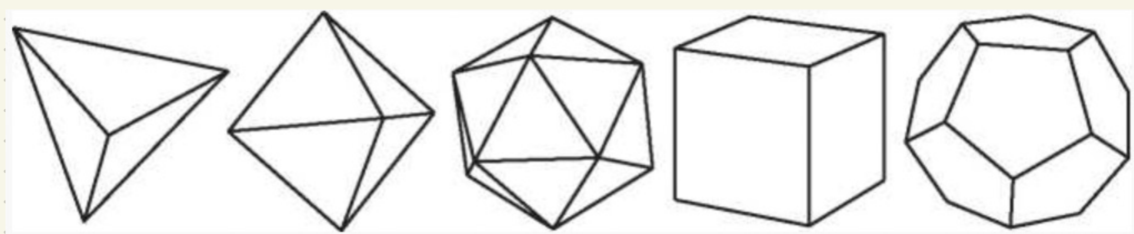


- Т.е (k, m) - одно из $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$

Решение:

1a

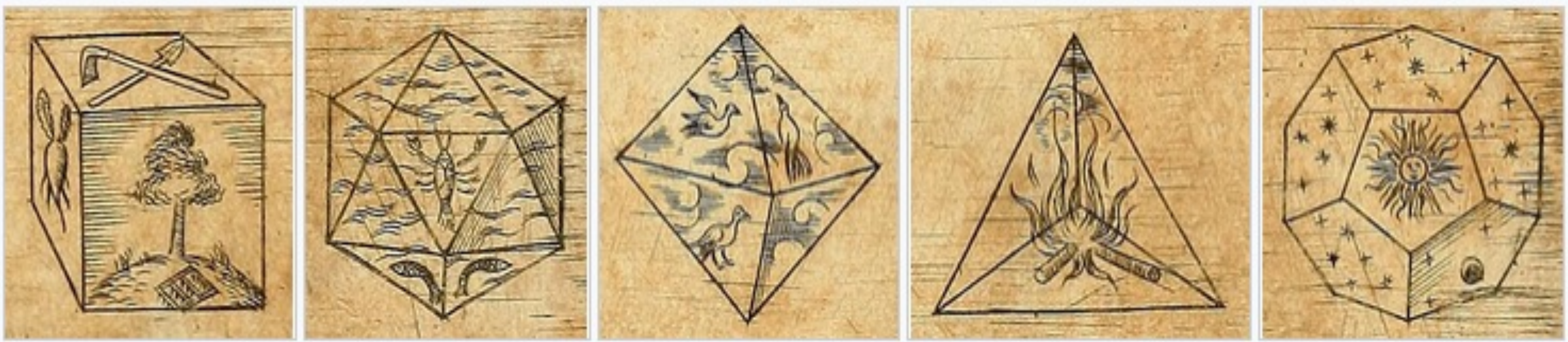
Соедините пару (k, m) с соответствующим многогранником.



тетраэдр октаэдр икосаэдр куб додекаэдр

Платоновы тела

Платон (диалог „Тимей“, 360 B.C)



Assignment to the elements in Kepler's *Harmonice Mundi*

Земля вода воздух огонь

Бог использовал его для расположения созвездий

Neolithic Carved Stone Polyhedra

≈ 2000 B.C

(найдены в основном в Шотландии,

(назначение неизвестно)

2 Докажите, что у любого многогранника есть треугольная, четырёхугольная или пятиугольная грань.

$\chi = В - Р + Г$

$\overset{..}{2}$ на сфере

(2) Докажите, что у любого многогранника есть треугольная, четырёхугольная или пятиугольная грань.

$\chi = В - Р + Г$

2 на сфере

- Предположите, что это не так (т.е. все грани имеют 6 или больше сторон)

- Оцените Р через Г
- Оцените Р через В
- Проверьте $В - Р + Г$ (выразив В и Г через Р)

2 Докажите, что у любого многогранника есть треугольная, четырёхугольная или пятиугольная грань.

$\chi = В - Р + Г$
$\overset{\shortparallel}{2}$ на сфере

Решение:

- Пусть <u>все</u> грани имеют 6 или больше сторон.
  Тогда $Р \geq \frac{6Г}{2}$, т.е. $Г \leq \frac{1}{3}Р$

- Так как в каждую вершину приходит хотя бы 3 ребра,
  $Р \geq \frac{3В}{2}$, т.е $В \leq \frac{2}{3}Р$

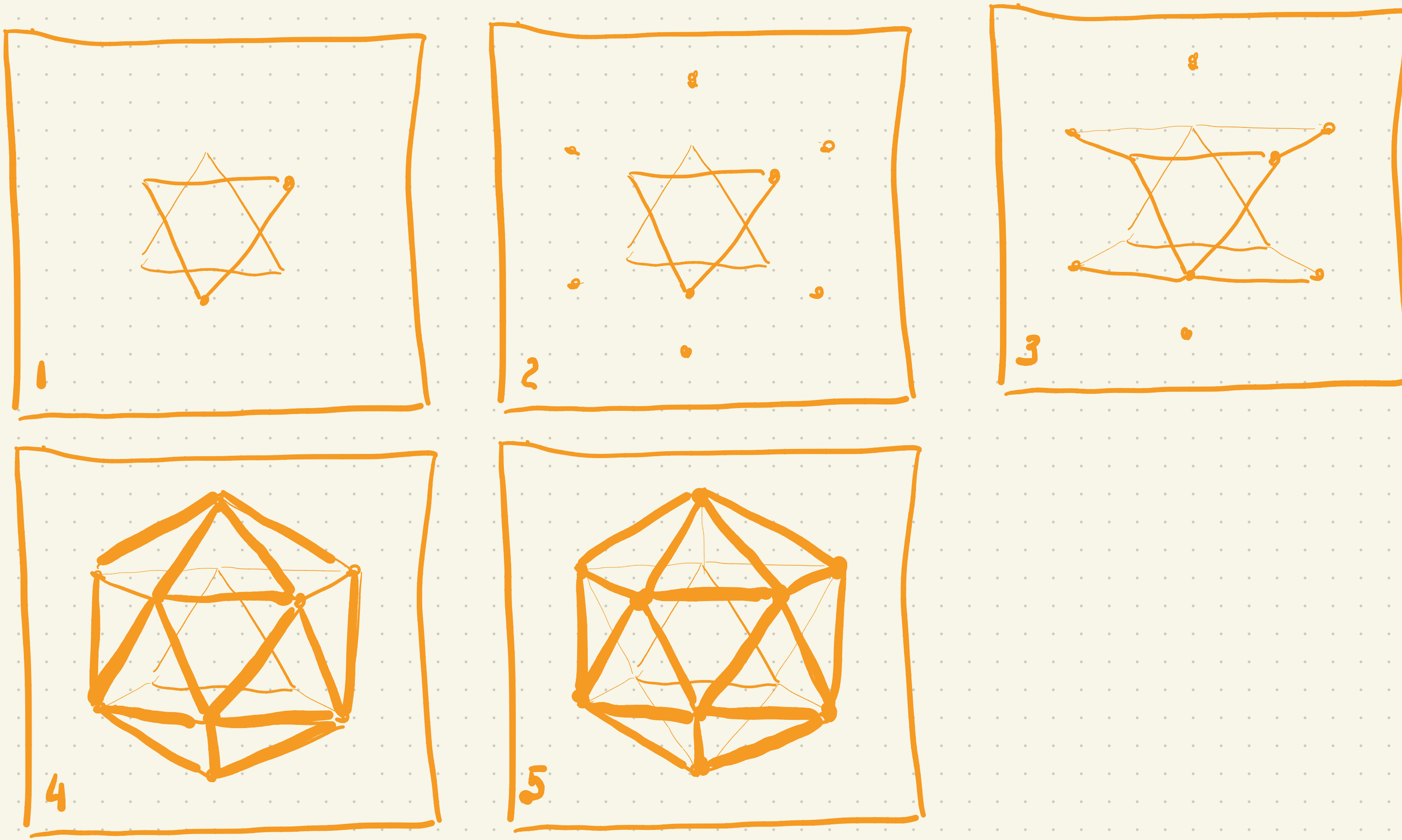
- Т.е. $В - Р + Г \leq \frac{2}{3}Р - Р + \frac{1}{3}Р = Р - Р = 0 < 2$, что противоречит формуле Эйлера

Задания:

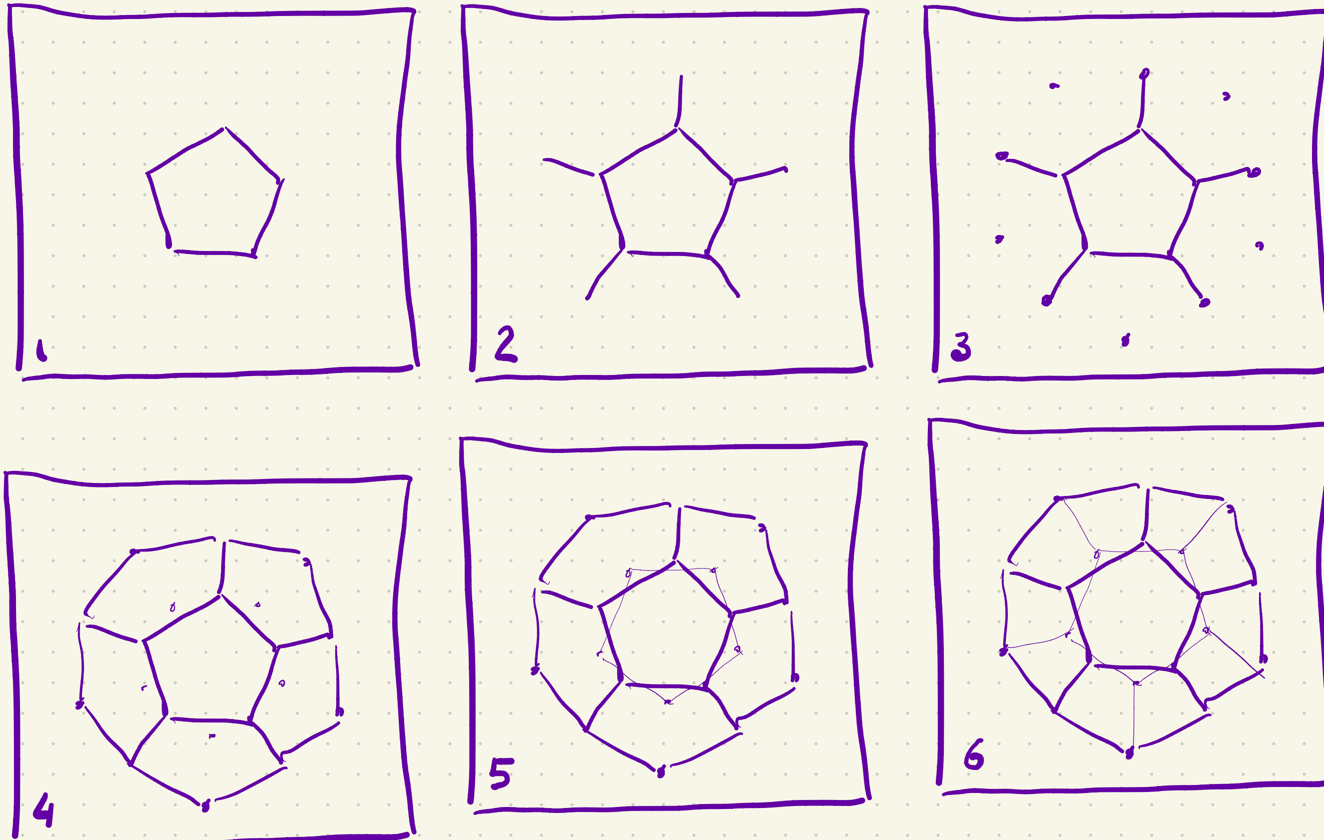
1. Нарисуйте тетраэдр, куб, октаэдр.

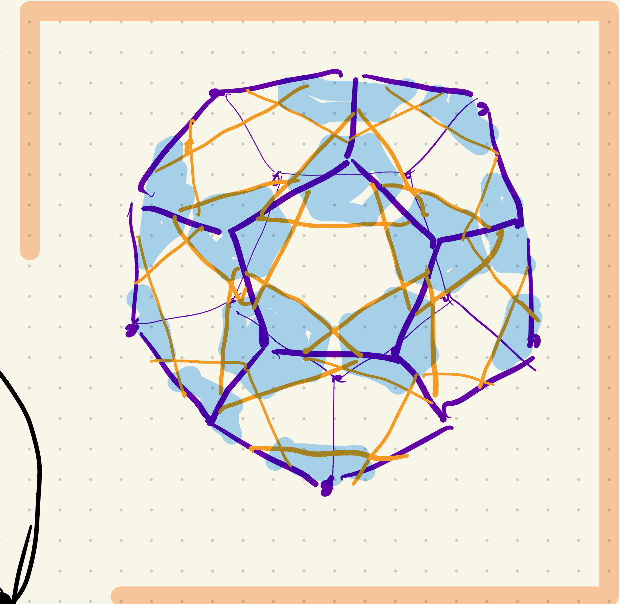
2. Научитесь рисовать икосаэдр и додэкаэдр по схемам на следующих страницах.

Как нарисовать икосаэдр:



Как нарисовать додэкаэдр:






спасибо!