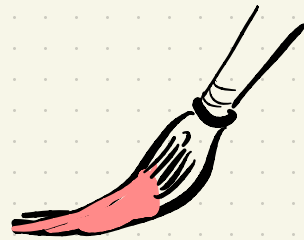


4

Проблема четырёх красок



Проблема четырёх красок



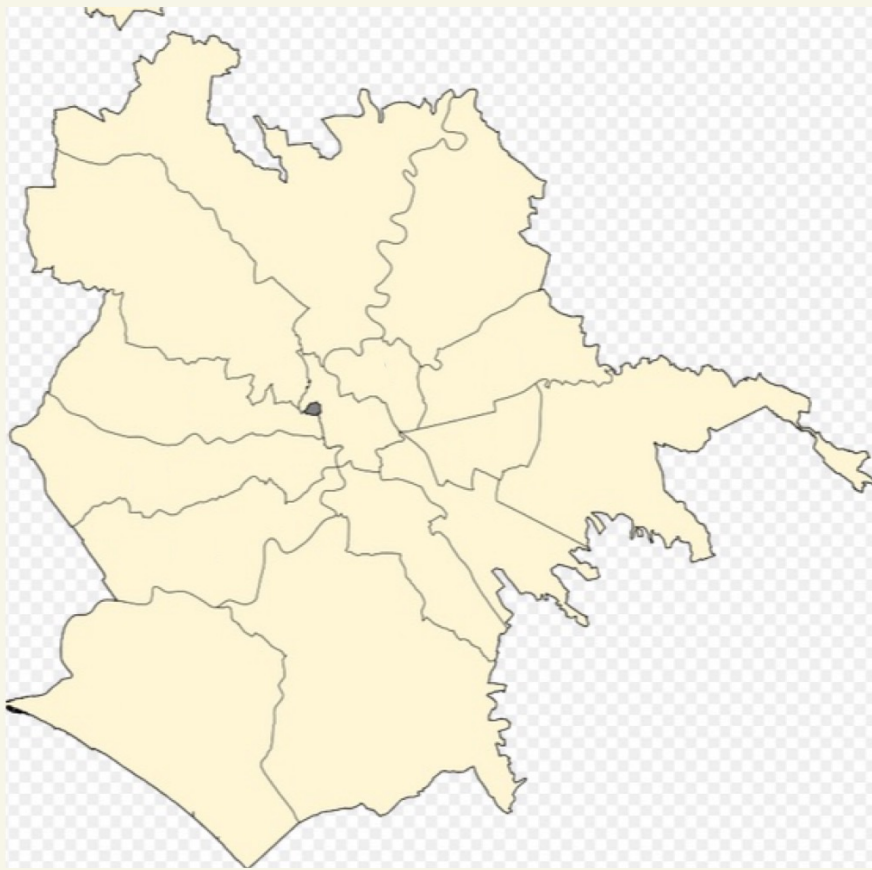
Задача:

раскрасить карту так,
чтобы соседние страны
были разного цвета.



Разминка Римская:

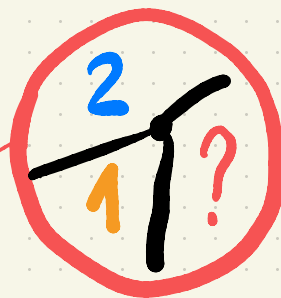
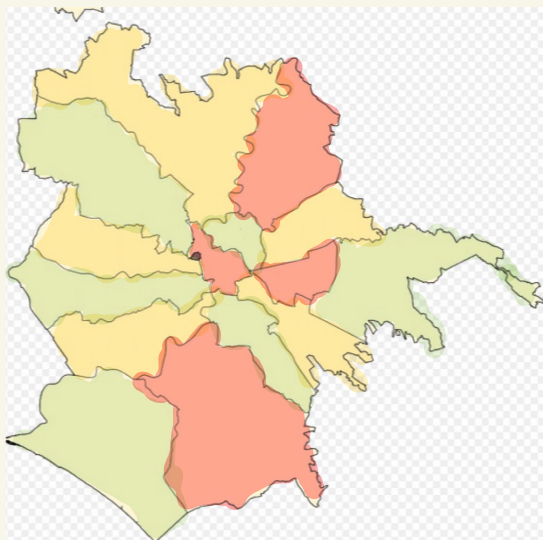
сколько цветов нужно, чтобы раскрасить карту Рима?



Разминка Римская:

сколько цветов нужно, чтобы раскрасить карту Рима?

Решение:



Трёх цветов достаточно, а двух точно мало!

Проблема четырёх красок



Задача:

раскрасить карту так,
чтобы соседние страны
были разного цвета.

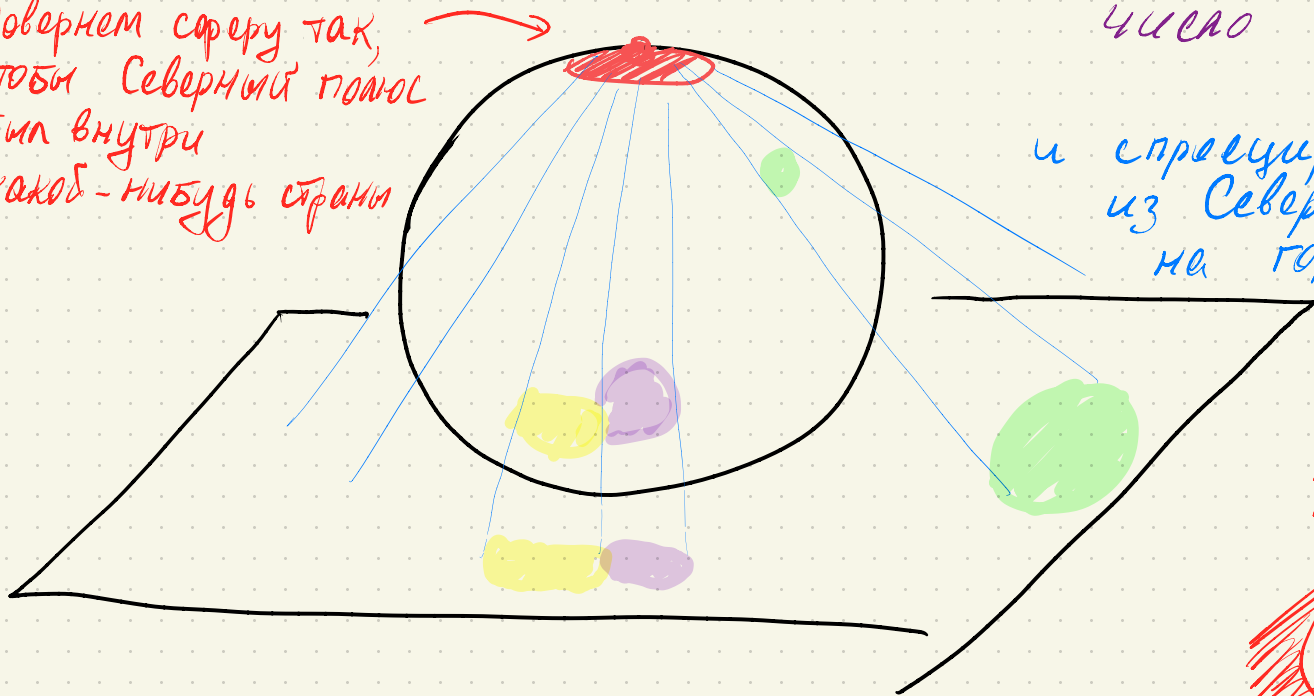
Вопрос:

сколько нужно цветов,
чтобы раскрасить
любую карту
на плоскости?



Раскрашивание карты на сфере
эквивалентно раскрашиванию соответствующей
карты на плоскости:

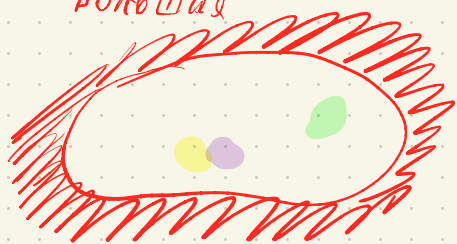
Повернем сферу так,
чтобы Северный полюс
был внутри
какой-нибудь страны



(те нужно то же
число цветов)

и спроецирует
из Северного полюса
на горизонтальную
плоскость

красная страна
получится очень
большая

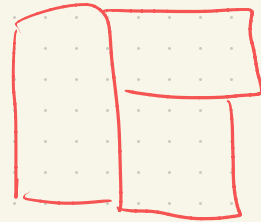


① Придумайте карту, для которой не достаточно
2х цветов:

② то же для 3х цветов:

① Придумайте карту, для которой не достаточно
2х цветов:

Решение:



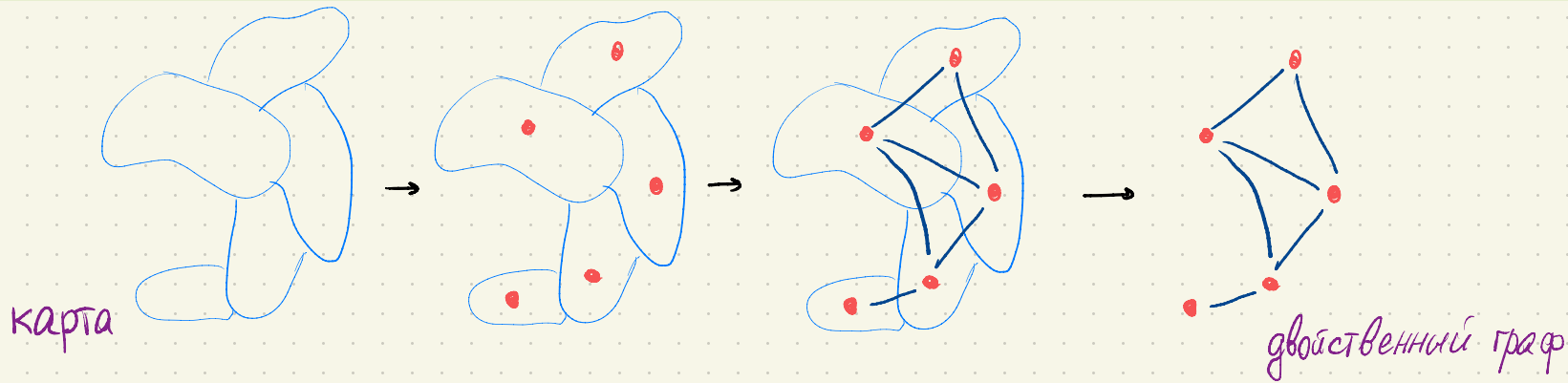
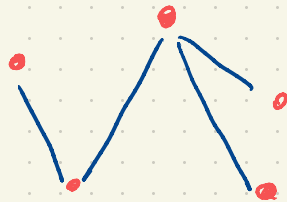
② то же для 3х цветов:

Решение:



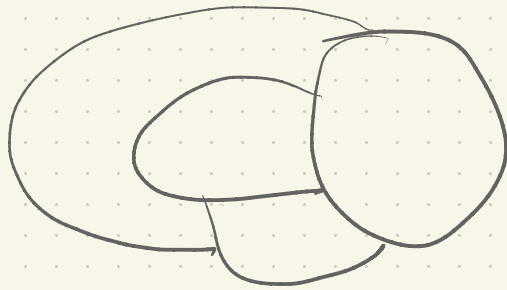
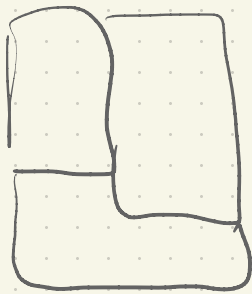
Двойственный граф

- **Вершины** графа — столицы стран
- Две вершины соединены ребром — если их страны соединены ребром

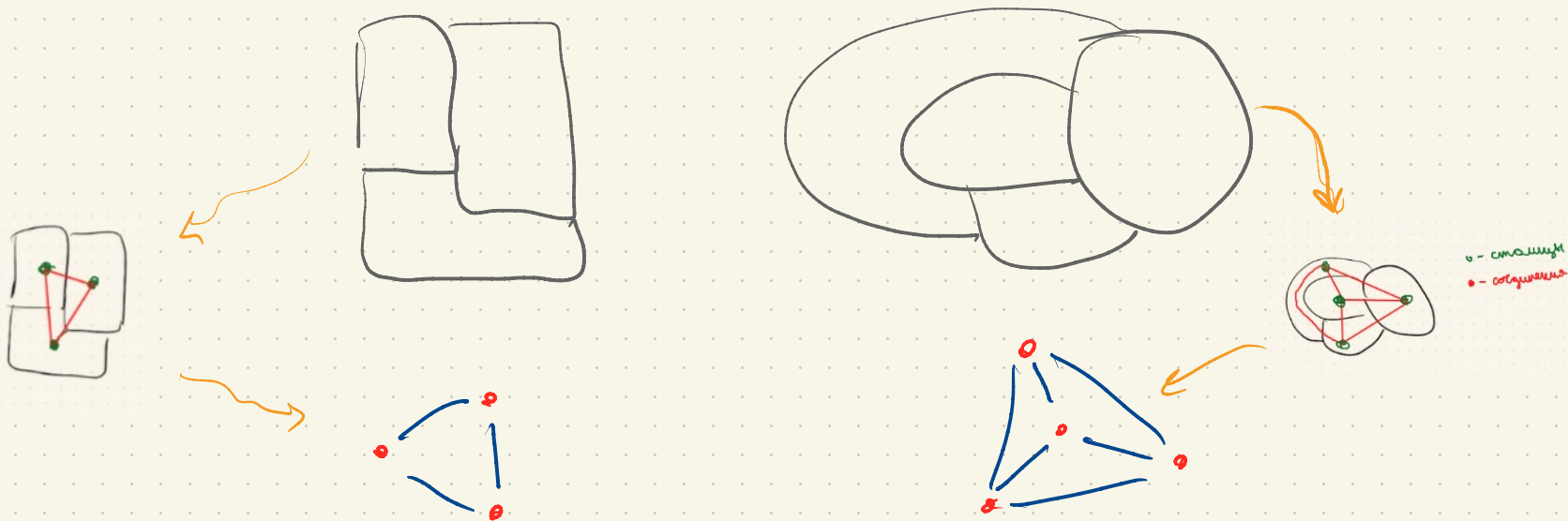


Правильно раскрасить карту $\longleftrightarrow$ правильно раскрасить граф
 $\uparrow$ так, чтобы соседние вершины были разного цвета

2' Нарисуйте двойственные
графы для карт из задач 1 и 2'



2' Нарисуйте двойственные графы для карт из задач 1 и 2)

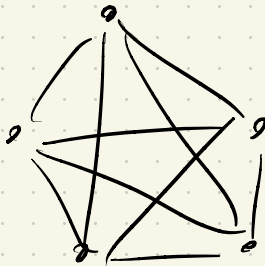


Минимальное число цветов, нужное для раскраски графа, называется **хроматическим числом** этого графа.

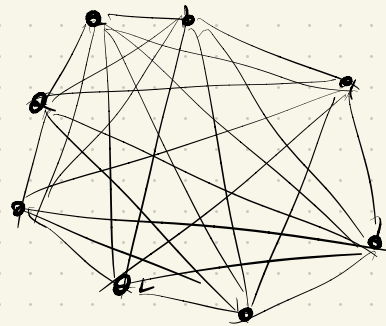
③ Придумайте граф, который невозможно
правильно раскрасить в 4 цвета

③ Придумайте граф, который невозможно правильно раскрасить в 4 цвета

Решение:

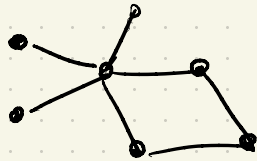


не хватит 4х цветов,
т.к 5 вершин,
каждая соседняя с
остальными 4мя



не хватит 7ми цветов
(7+1 вершина,
все соединены)

Граф называется планарным, если его можно нарисовать на плоскости без самопересечений.



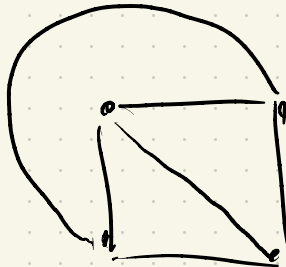
планарный

④ является ли планарным этот граф:

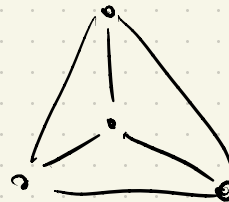


?

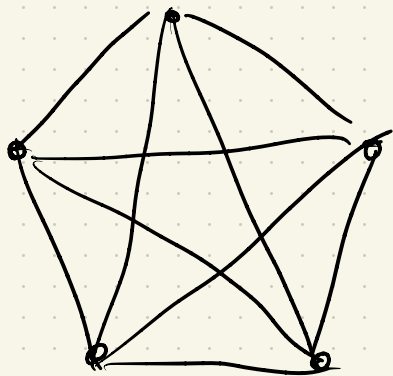
Решение: Да! Его можно перерисовать так:



или



⑤ Является ли планарным этот граф

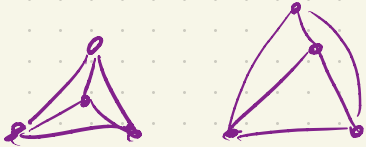


⑤ Является ли планарным этот граф



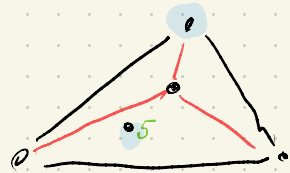
Решение:

Нет! 3 вершины образуют треугольник,
Поместим четвертую внутрь или снаружи:



В обоих случаях плоскость поделена на
4 треугольные области.

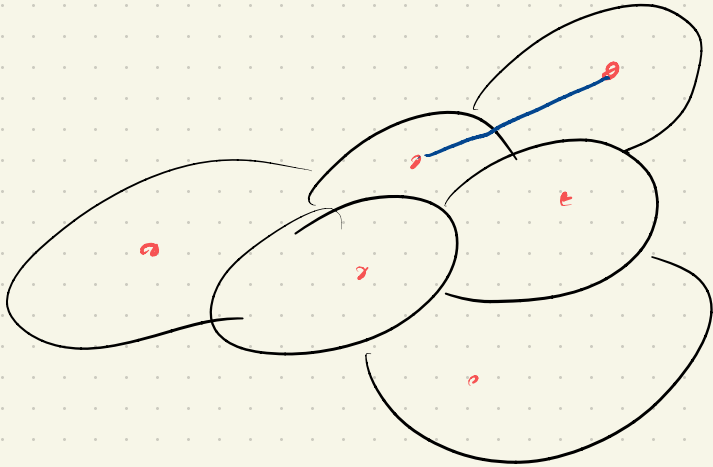
Пятая вершина лежит в одной из них —
и её невозможно соединить с вершиной,
не являющейся вершиной этого треугольника!



Таким образом,

- граф  нельзя раскрасить 4-мя цветами
- но он не планарный

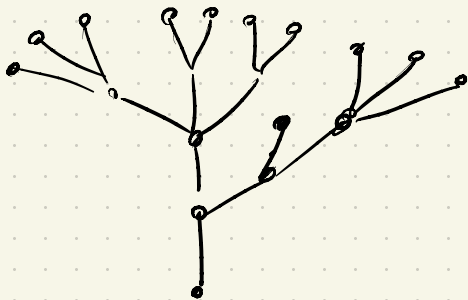
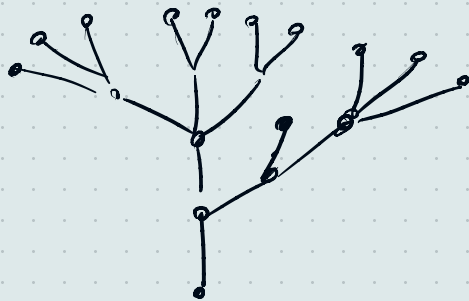
А граф, полученный из любой карты — планарный:



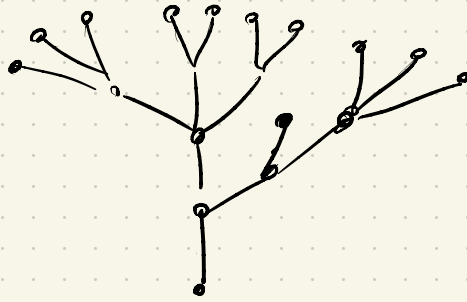
История:

- 1852, Фрэнсис Гутри : составлял карту графств Англии, заметил, что достаточно 4х цветов
 - его брат сообщил об этом математику Огастесу де Моргану
- 1878, Артур Кэли - опубликовал гипотезу
- 1879, Альфред Кемпе : доказал теорему о 4^х красках
- 1890, Перси Хивуд :
 - нашел ошибку в доказательстве Кемпе,
 - доказал теорему о 5^{ти} красках (простое доказательство, см стр 290-291 в книге Куратта и Якобинга "Что такое математика?")
- 1976, Кеннет Appel, Вольфганг Хаген : доказали теорему о 4^х красках
 - первая важная теорема, доказанная с помощью компьютера

6. Сколько красок нужно для раскраски
дерева ?

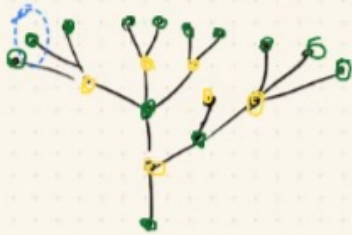


6. Сколько красок нужно для раскраски дерева?



Решение:

Достаточно 2х цветов:

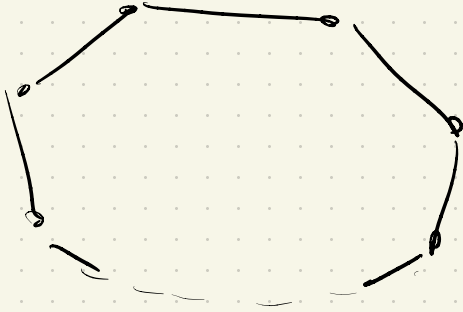


2х цветов достаточно для любого дерева:

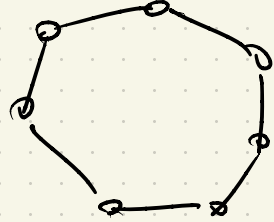
- покрасим корень первым цветом
- ~ второй уровень - вторым
- третий - первым
- и т.д.

7

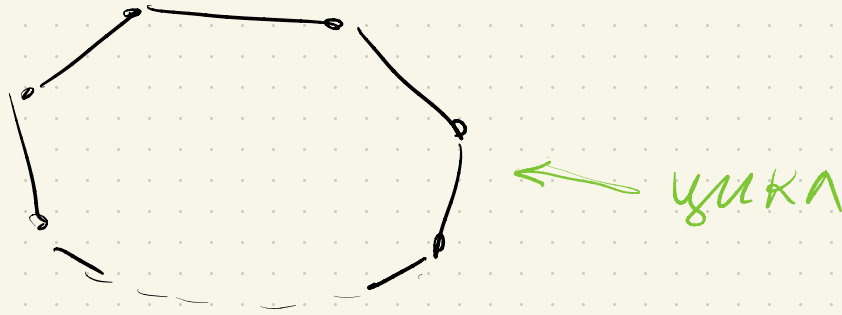
Можно ли цикл раскрасить в 2 цвета?



цикл

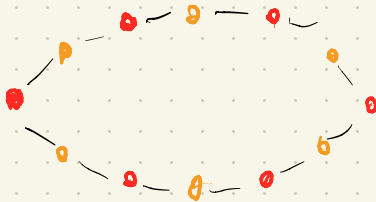


7 Можно ли цикл раскрасить в 2 цвета?



Решение:

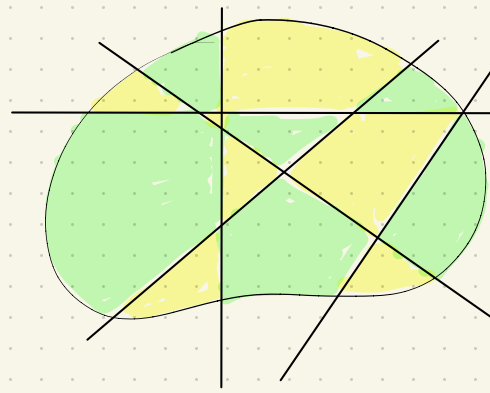
четный — да



нечетный — нет



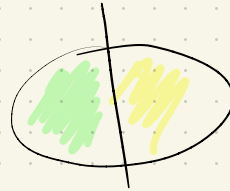
8 Карта получена пересечением области конечным числом прямых. Доказать, что для нее достаточно 2х цветов.



8 Карта получена пересечением области конечным числом прямых. Доказать, что для нее достаточно 2х цветов.

Решение:

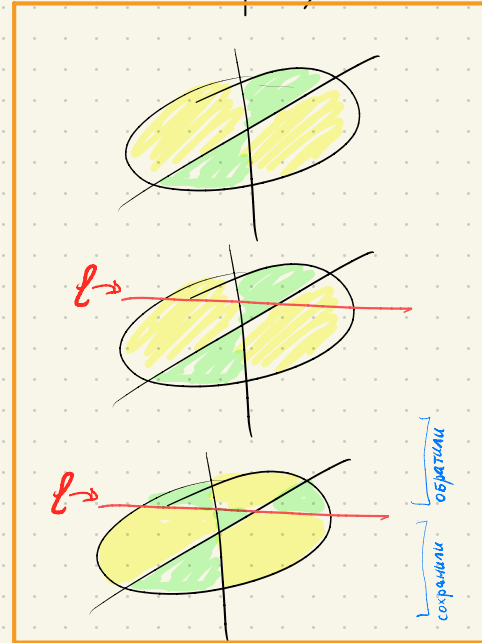
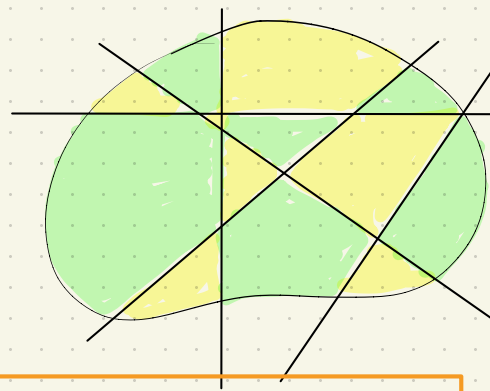
- Если прямая одна - получится!



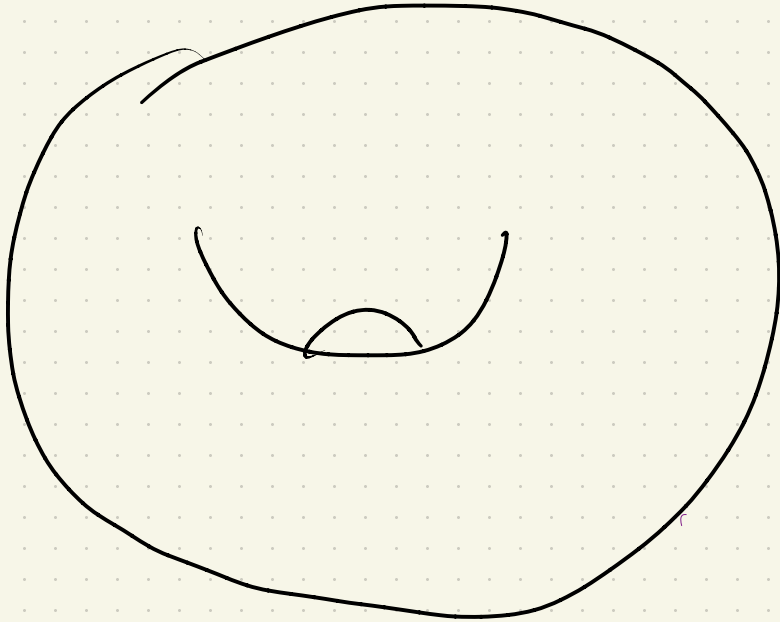
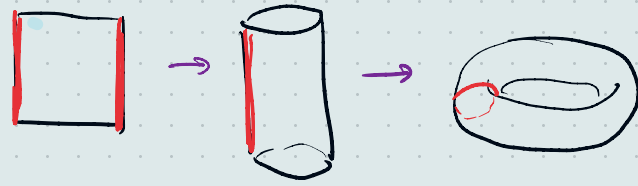
- Пусть уже доказано для N прямых.

- Возьмем правильную раскраску для карты, где N прямых, добавим прямую ℓ

- Прямая ℓ делит плоскость на две полуплоскости:
 - в одной из них раскраску сохраним,
 - а в другой - изменим на обратную!

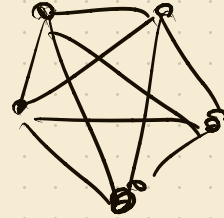


9 Склеим из квадрата трубу,
а из трубы бублик ("тор").
Покажите, что на торе 4х красок не хватит.



Подсказка:

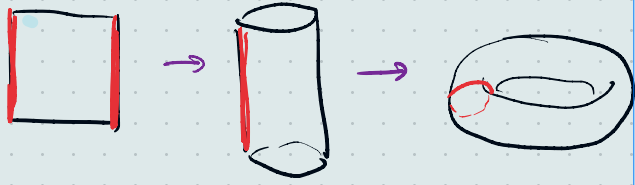
Нарисуйте граф



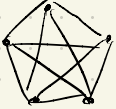
на торе

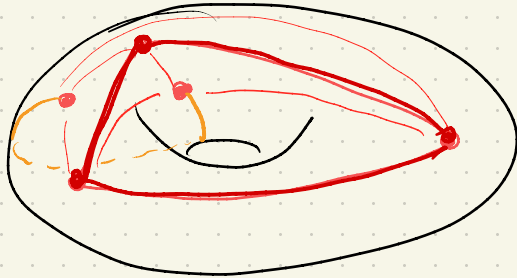
БЕЗ пересечений

9) Склеим из квадрата трубу,
а из трубы бублик ("тор").
Покажите, что на торе 4х красок не хватит.



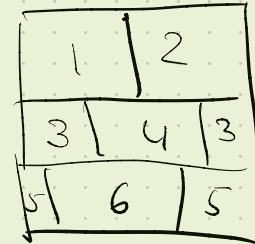
Решение:

Граф  можно вложить
в тор без самопересечений.



На самом деле,
не хватит даже
5 цветов:

склеим тор из этой карты



в ней 6 стран,
каждая граничит с каждой

- Игра — А рисует страну
- В ее закрашивает и пририсовывает новую страну
 - А закрашивает и пририсовывает новую

Прогрывает тот, кому пришлось использовать
пятый цвет.



Смотри мультфильм !