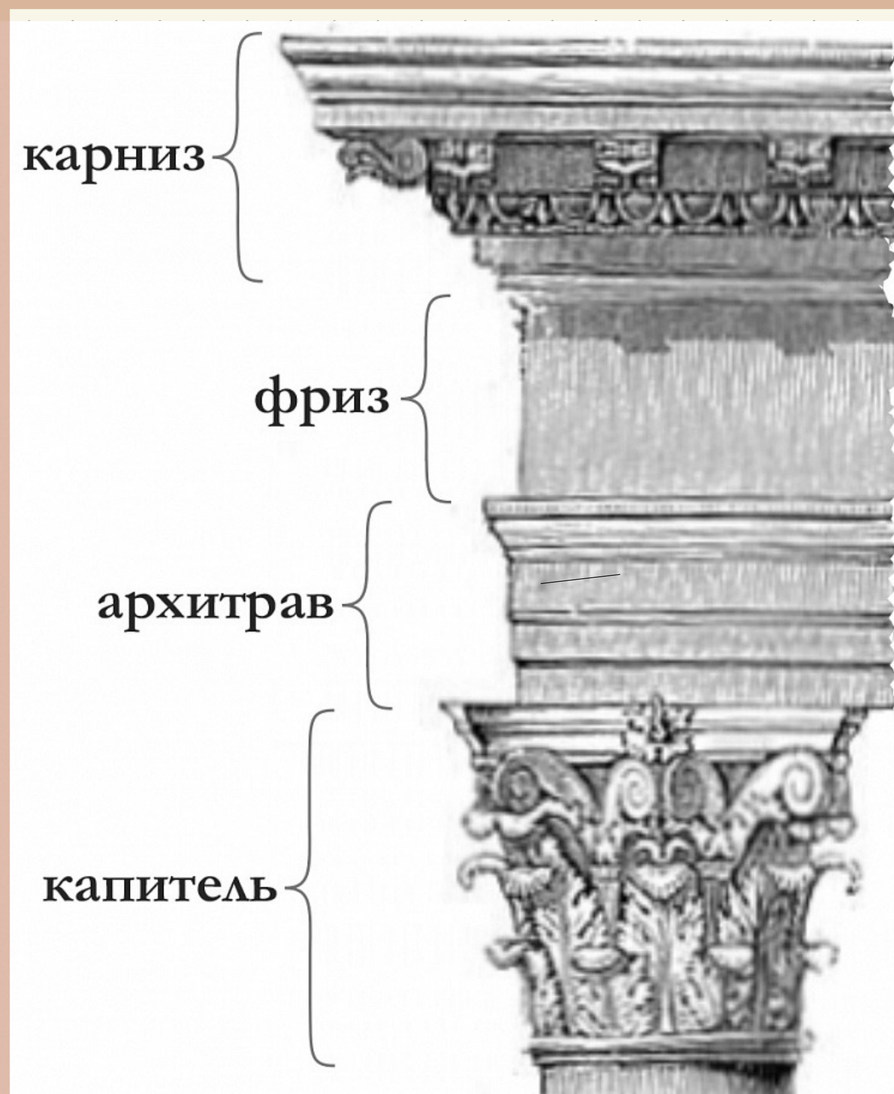
13 Фризы и триангуляции многоугольников



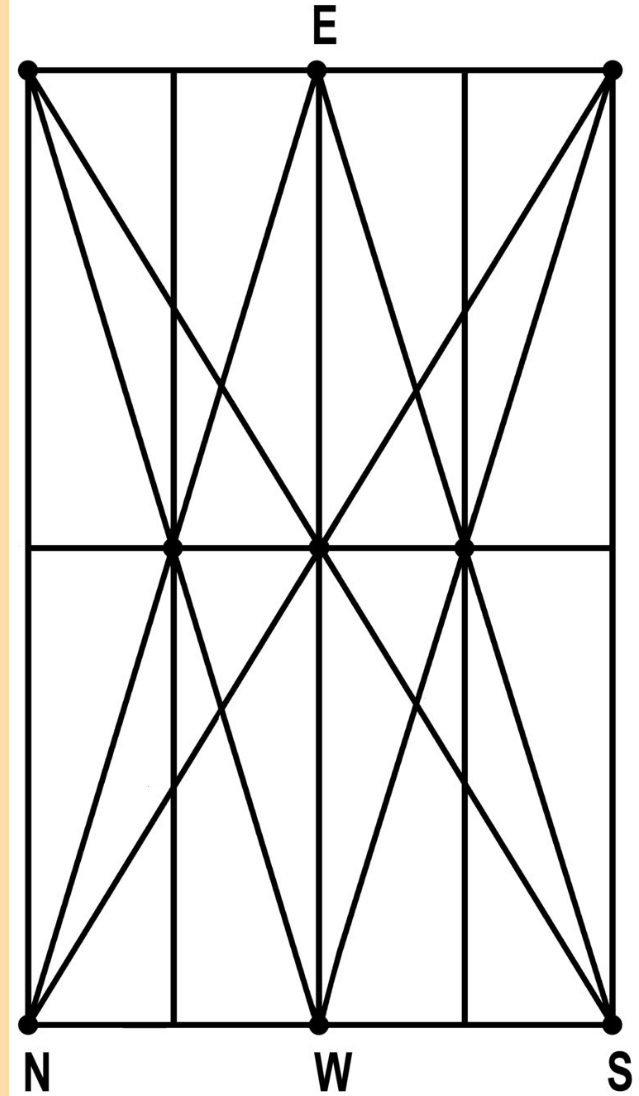
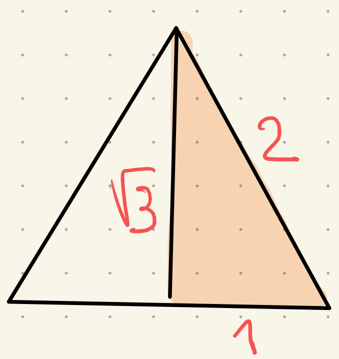
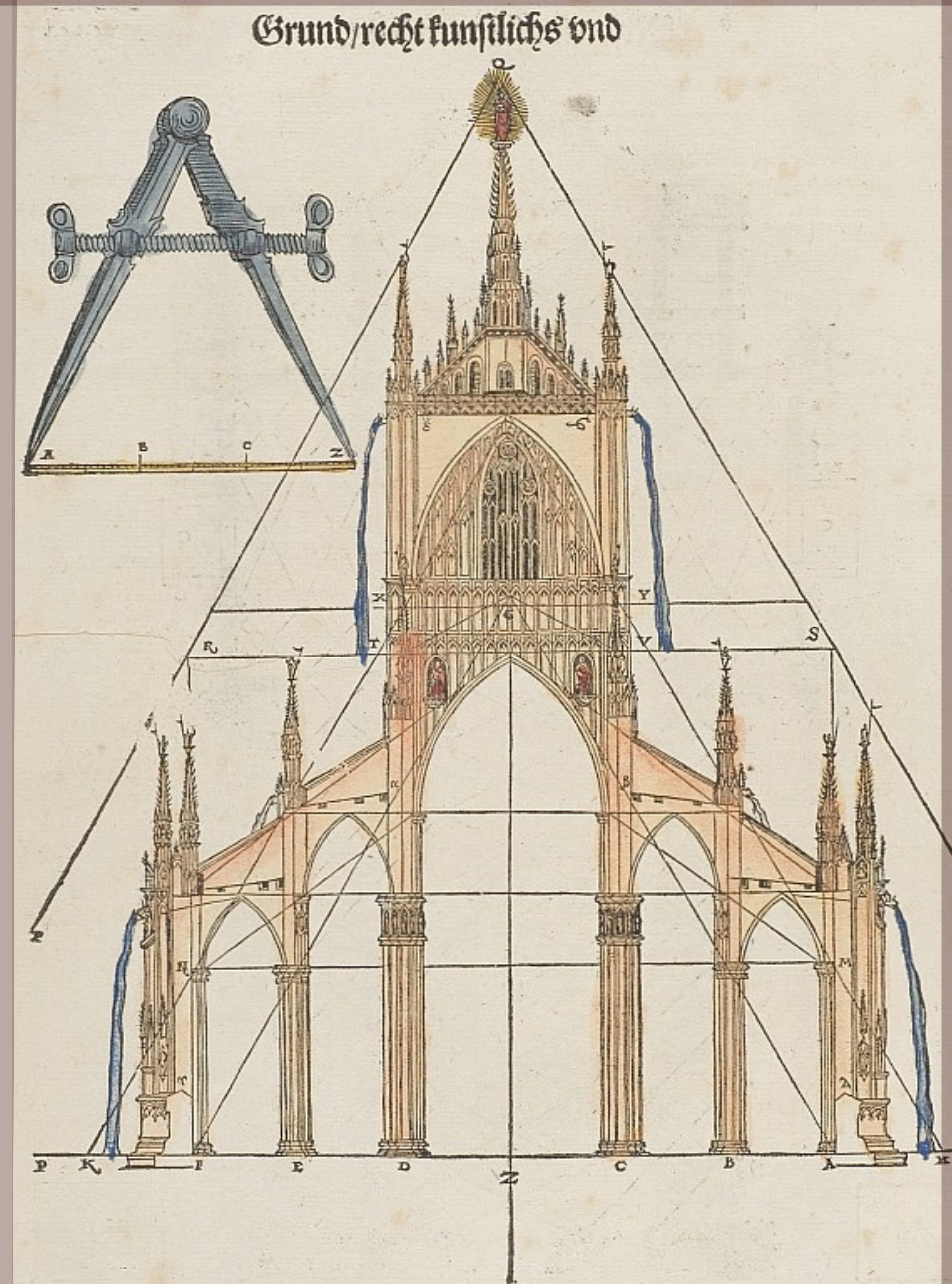


Схема разбивки плана средневекового храма на основе построения равностороннего треугольника.



Триангуляция Миланского собора в поперечном сечении по средокрестию. Чертёж. Ксилография 1547 г.



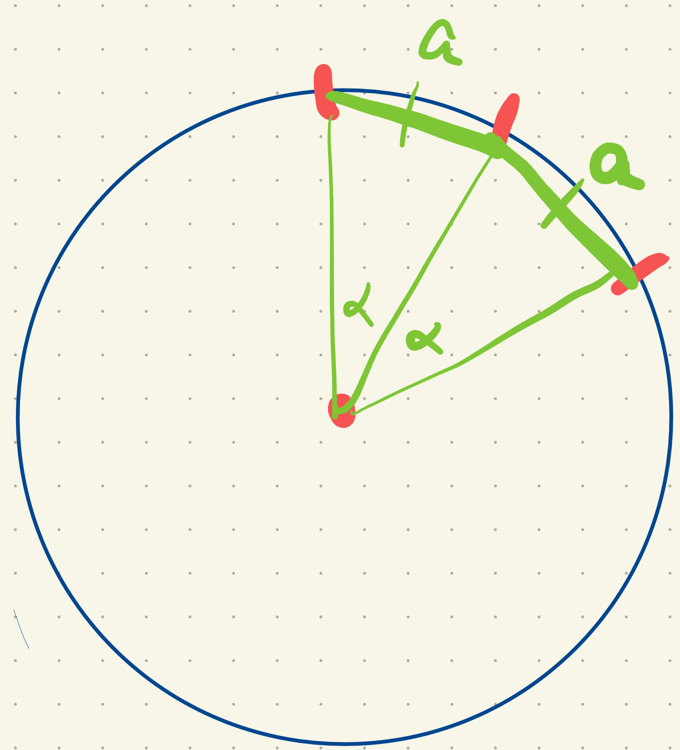
Разминка Евклидова

Пусть P – многоугольник, вписанный в окружность такой, что длины всех сторон P равны 1. Что можно сказать о многоугольнике P?

Разминка Евклидова

Пусть P – многоугольник, вписанный в окружность такой, что длины всех сторон P равны 1. Что можно сказать о многоугольнике P?

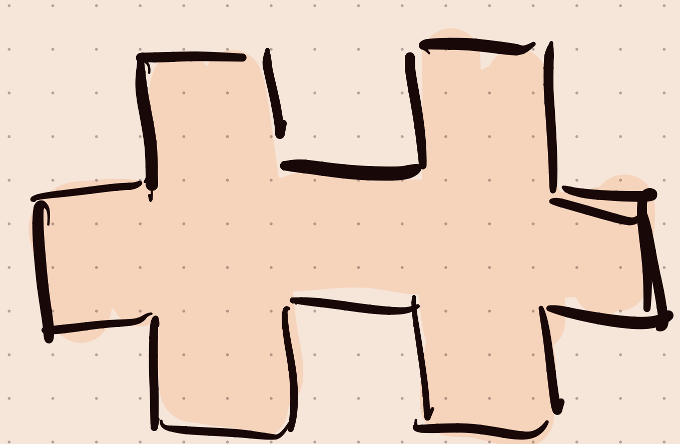
Решение:



многоугольник P - правильный:

если стороны одинаковы, то одинаковы углы, под которым они видны из центра

Заметим, что только из того, что длины всех сторон равны 1 НЕ следует, что многоугольник правильный:



Фризы Конвея-Кокстера:

- Таблицы чисел

(1) по краям ряды единиц

(0) еще дальше — ряды нулей (их часто не пишут)

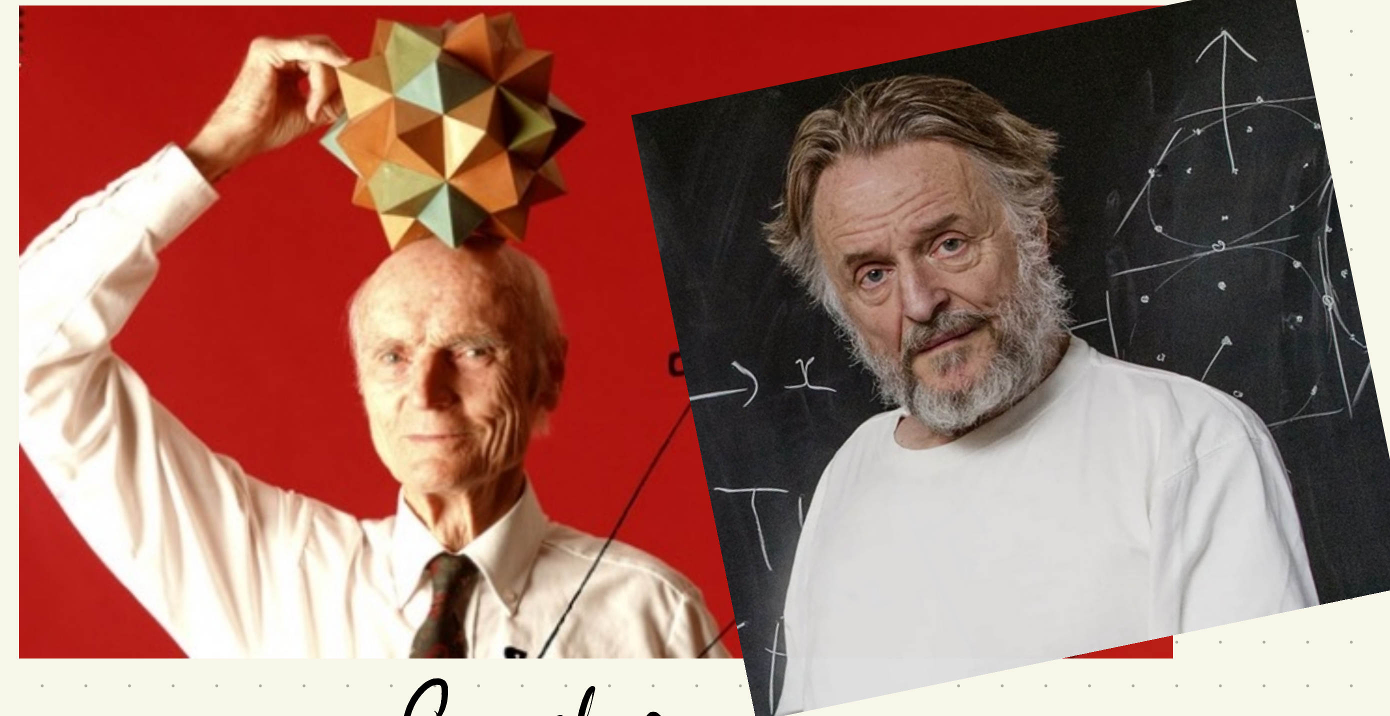
		0		0		0		0		0		
	1		1		1		1		1		1	
…		1		3		1		3		1		…
	2		2		2		2		2		2	
…		3		1		3		1		3		…
	1		1		1		1		1		1	
		0		0		0		0		0		

ширина

(◇) Числа в малых ромбах удовлетворяют арифметическому правилу

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

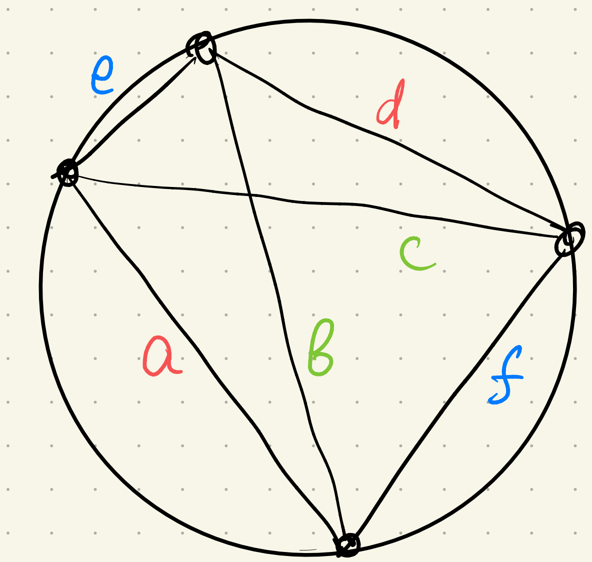
$$ad - bc = 1$$



1907-2003 Coxeter

1937-2020 Conway

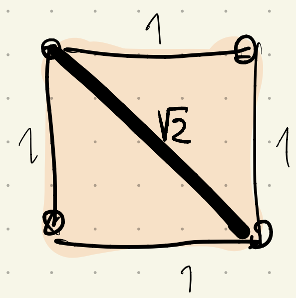
Теорема Птолемея



$$bc = ad + ef$$

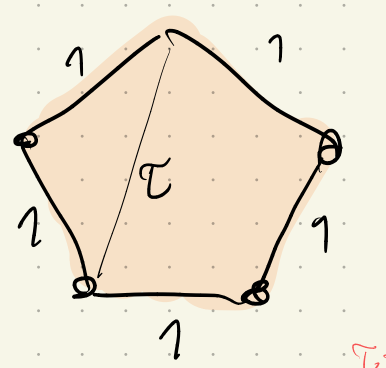
1 Продолжить последовательность: как выглядит n-ный элемент?

1:



1		1		1		1		1	
	$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		
1		1		1		1		1	

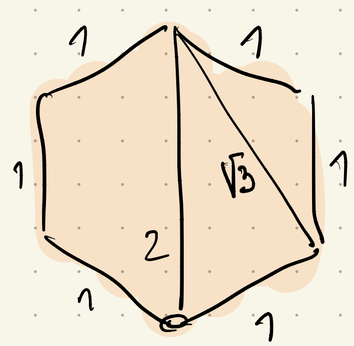
2:



1		1		1		1		1		
	τ		τ		τ		τ			…
τ		τ		τ		τ		τ		
	1		1		1		1			…

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3:

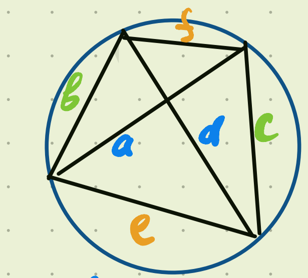


1		1		1		1		1		
	$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$			…
2		2		2		2		2		
	$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$			…
1		1		1		1		1		

n: ? ?

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

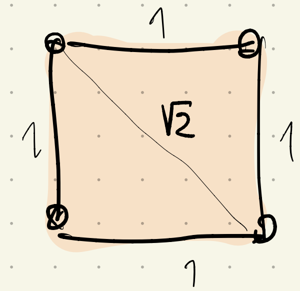
$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$

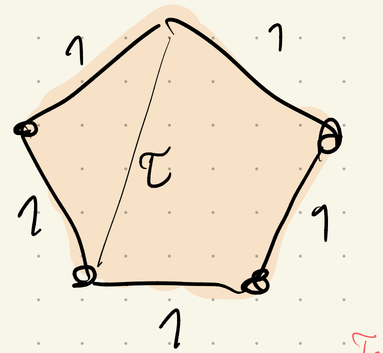
① Продолжить последовательность: как выглядит n-ный элемент?

1:



1		1		1		1		1
	$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
1		1		1		1		1

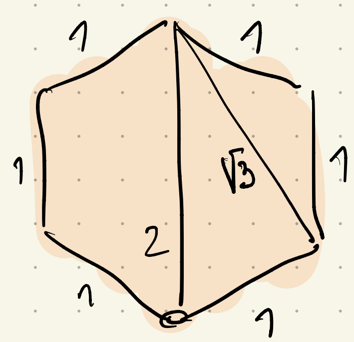
2:



$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1		1		1		1		1		
	τ		τ		τ		τ		…	
τ		τ		τ		τ		τ		
	1		1		1		1		…	

3:

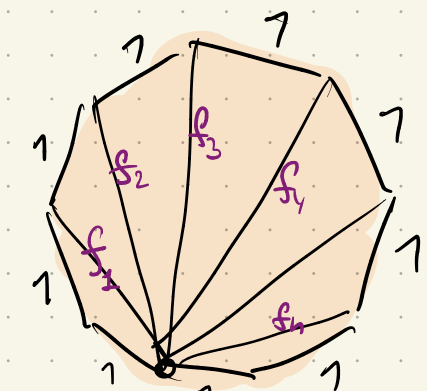


1		1		1		1		1		
	$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		…	
2		2		2		2		2		
	$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		…	
1		1		1		1		1		

n: ? ?

Решение:

n

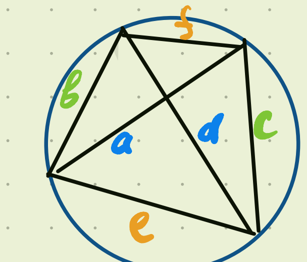


правильный (n+3)-угольник

1	1	1	1	1	1
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3	
…	…	…	…	…	…
f_n	f_n	f_n	f_n	f_n	
1	1	1	1	1	

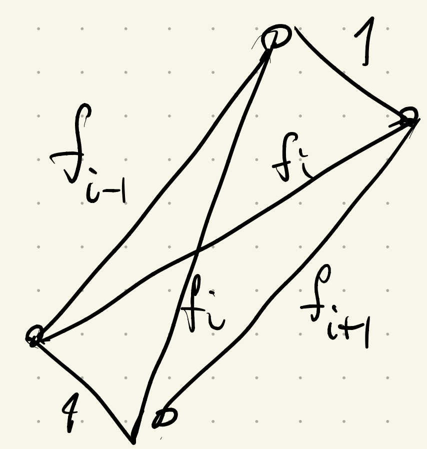
$$a \quad {}^{b}_{c} \quad d$$

$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$

Почему вышел фриз?



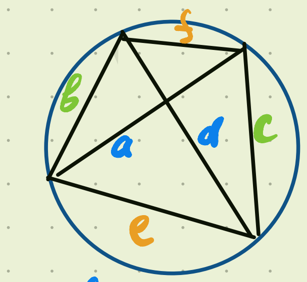
правило фриза = соотношение Птолемея

② Продолжить последовательность: как выглядит предел при числе сторон стремящимся к бесконечности?

Напишите фриз!

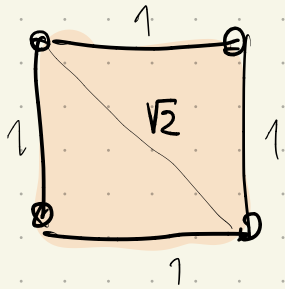
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



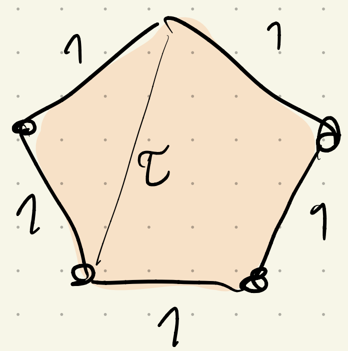
$$ad = bc + ef$$

1



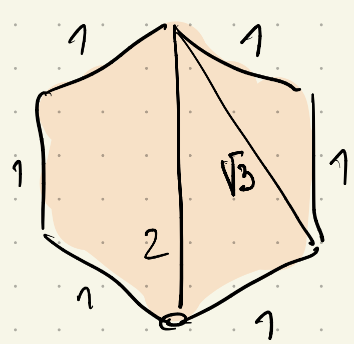
$$\begin{matrix} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{matrix}$$

2



$$\begin{matrix} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & & \dots \\ \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \dots \end{matrix}$$

3



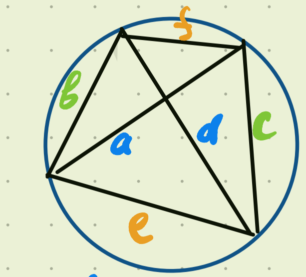
$$\begin{matrix} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \dots \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \dots \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \end{matrix}$$

∞ ? ?

2. Продолжить последовательность: как выглядит предел при числе сторон стремящимся к бесконечности? Напишите фриз!

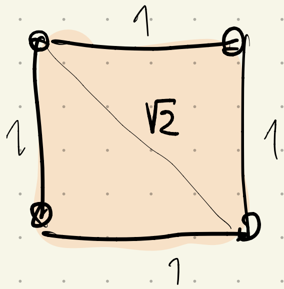
$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

$ad - bc = 1$



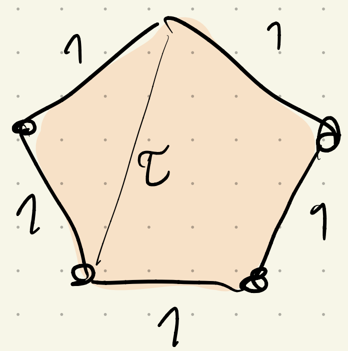
$ad = bc + ef$

1



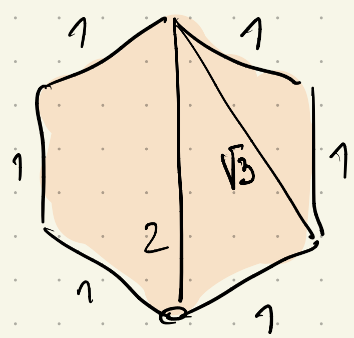
$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

2



$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & & \ldots \\ \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \ldots \end{array}$$

3



$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots \\ & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & & \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \\ & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & & \ldots \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

∞ ? ?

Решение:

Правильный многоугольник со стороной 1 вписан в окружность всё большего размера.

В пределе, ∞-угольник = прямая

Фриз (бесконечно высокий):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \end{array}$$

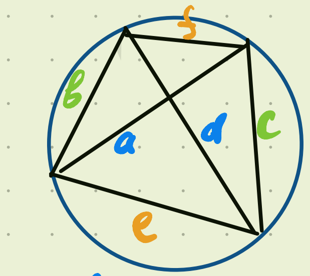
Действительно: $n^2 - (n-1)(n+1) = 1$

Назовем триангулированный многоугольник P хорошим, если

- Все его стороны равны 1;
- все диагонали триангуляции так же равны 1;
- в любом четырехугольнике из его сторон и диагоналей выполнено соотношение Птолемея.

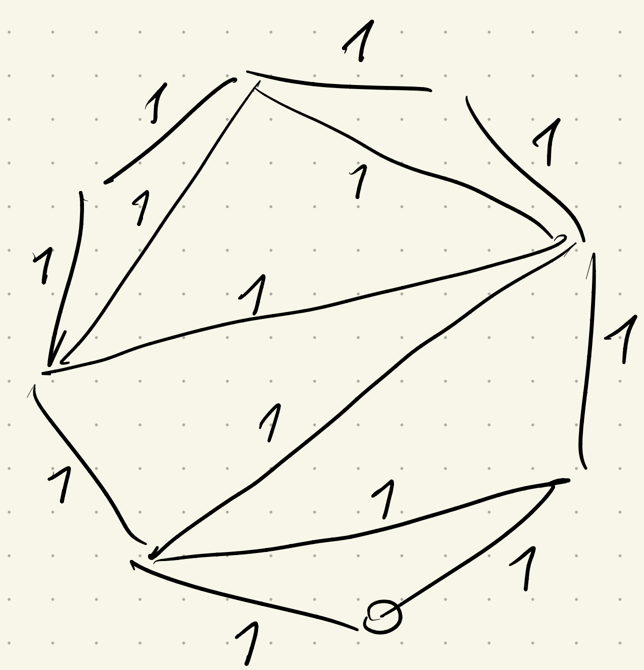
$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$

Такого евклидова многоугольника НЕТ!



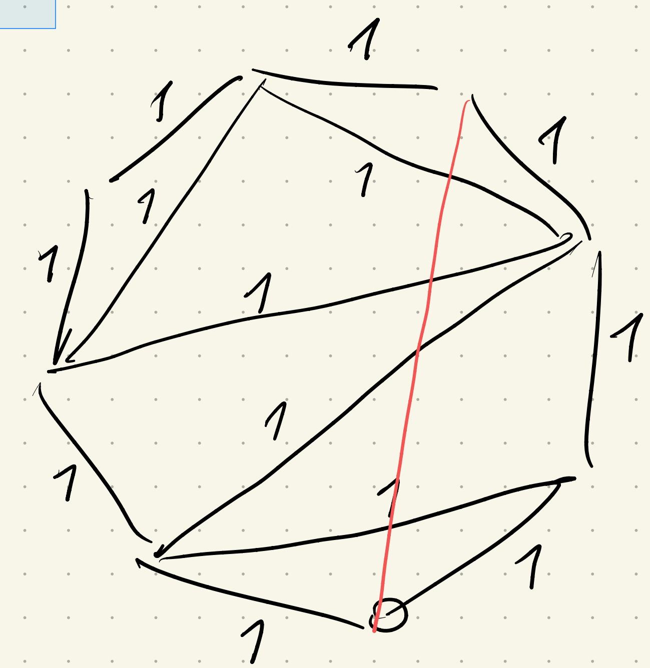
(Но так бывает на гиперболической плоскости).

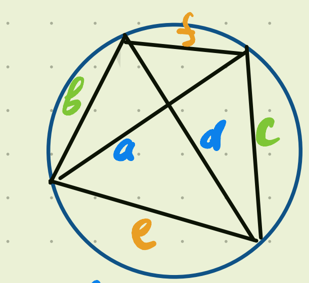
③ Докажите, что в хорошем многоугольнике все диагонали целые.

Хороший = 1 на сторонах и рёбрах триангуляции + Птолемей

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$





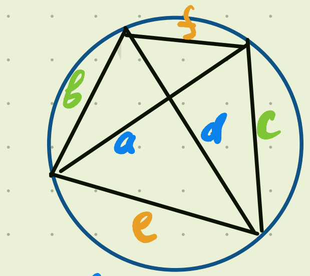
$$ad = bc + ef$$

③ Докажите, что в хорошем многоугольнике все диагонали целые.

Хороший =
1 на сторонах и ребрах треангуляции
+ Птолемей

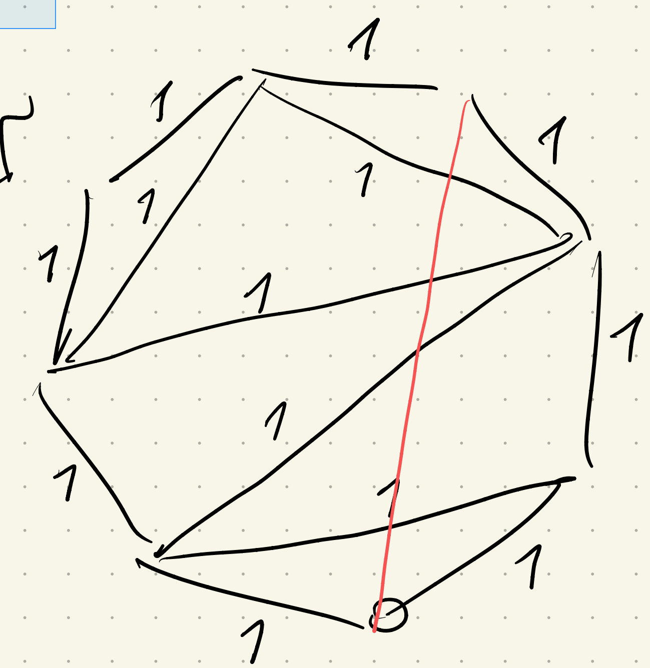
$$a \; {}^{b}_{c} \; d$$

$$ad - bc = 1$$



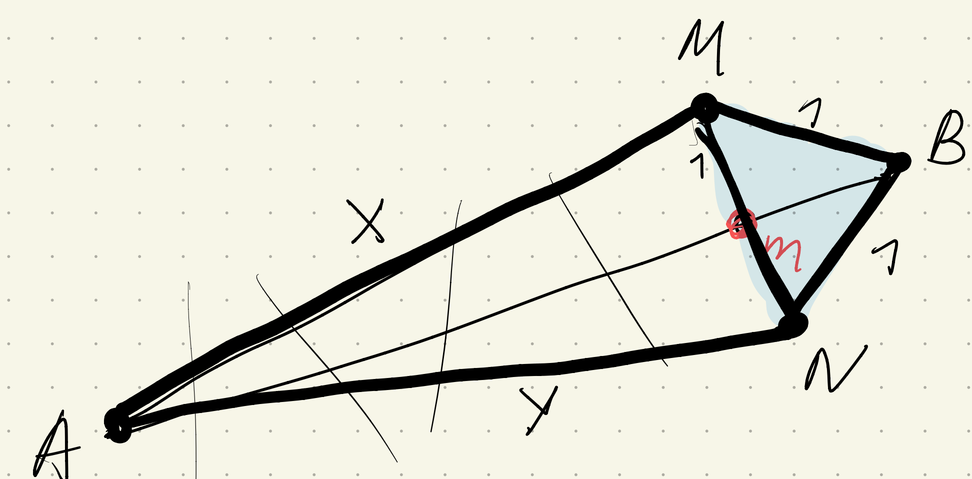
$$ad = bc + ef$$

Решение: Индукция по числу m пересечений диагонали и триангуляции



- Если $m=0$, то диагональ лежит в треангуляции и её "длина" $= 1$.
- Пусть для всех $k<m$ доказано, что диагонали, пересекающие триангуляцию k раз — целые.

Возьмем диагональ AB, пересекающую m раз и рассмотрим "последний" треугольник BMN из триангуляции на его пути:



$$AB \cdot MN = AM \cdot BN + AN \cdot MB$$

$$AB \cdot 1 = \text{целое} \cdot 1 + \text{целое} \cdot MB$$

$\Rightarrow AB$ — целое!

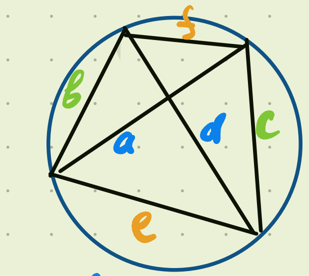
по предположению индукции

(4) Сосчитайте "длины" диагоналей хорошего шестиугольника и составьте из них фриз:

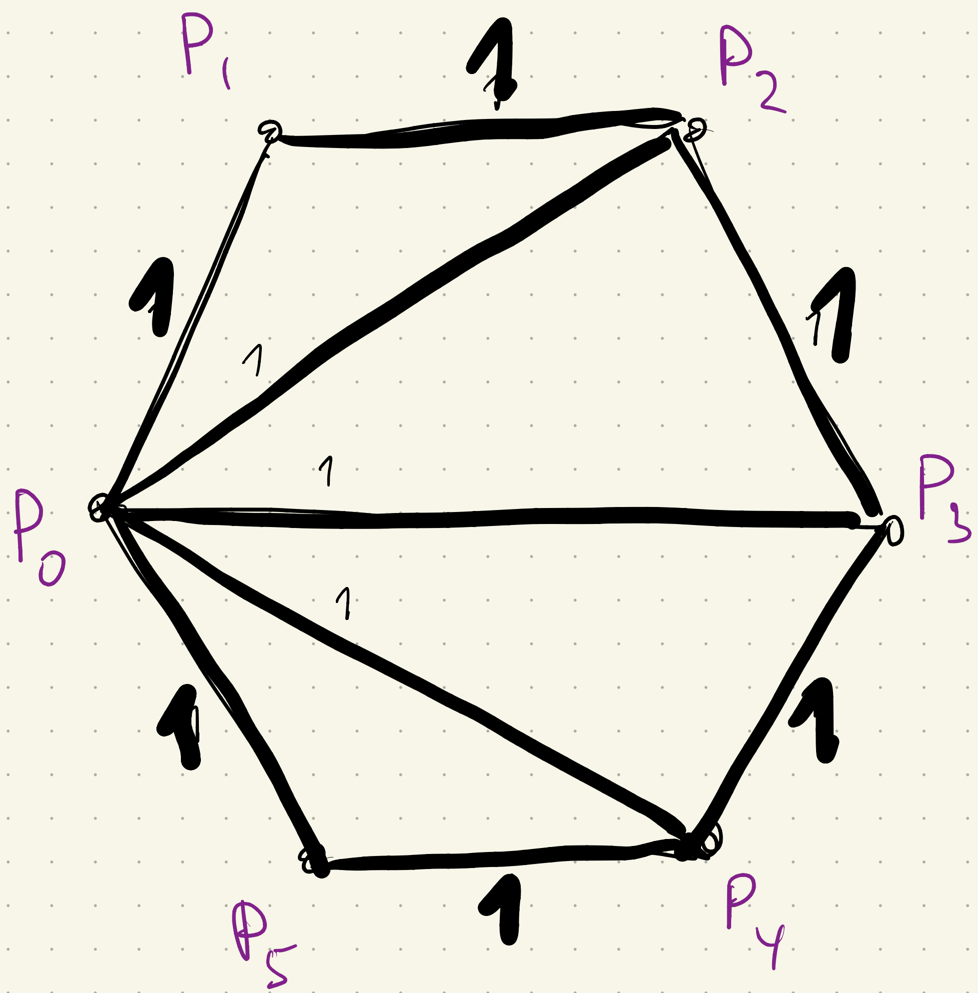
Хороший = 1 на сторонах и ребрах триангуляции + Птолемей

$$a \;\overset{b}{\underset{c}{}}\; d$$

$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$



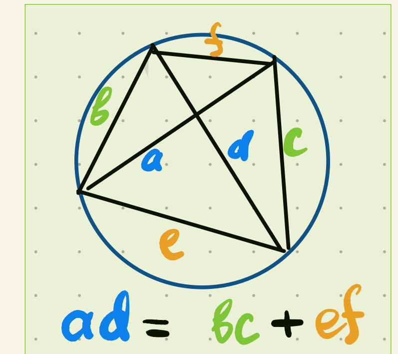
Обозначим $u_{ij} = |P_i P_j|$

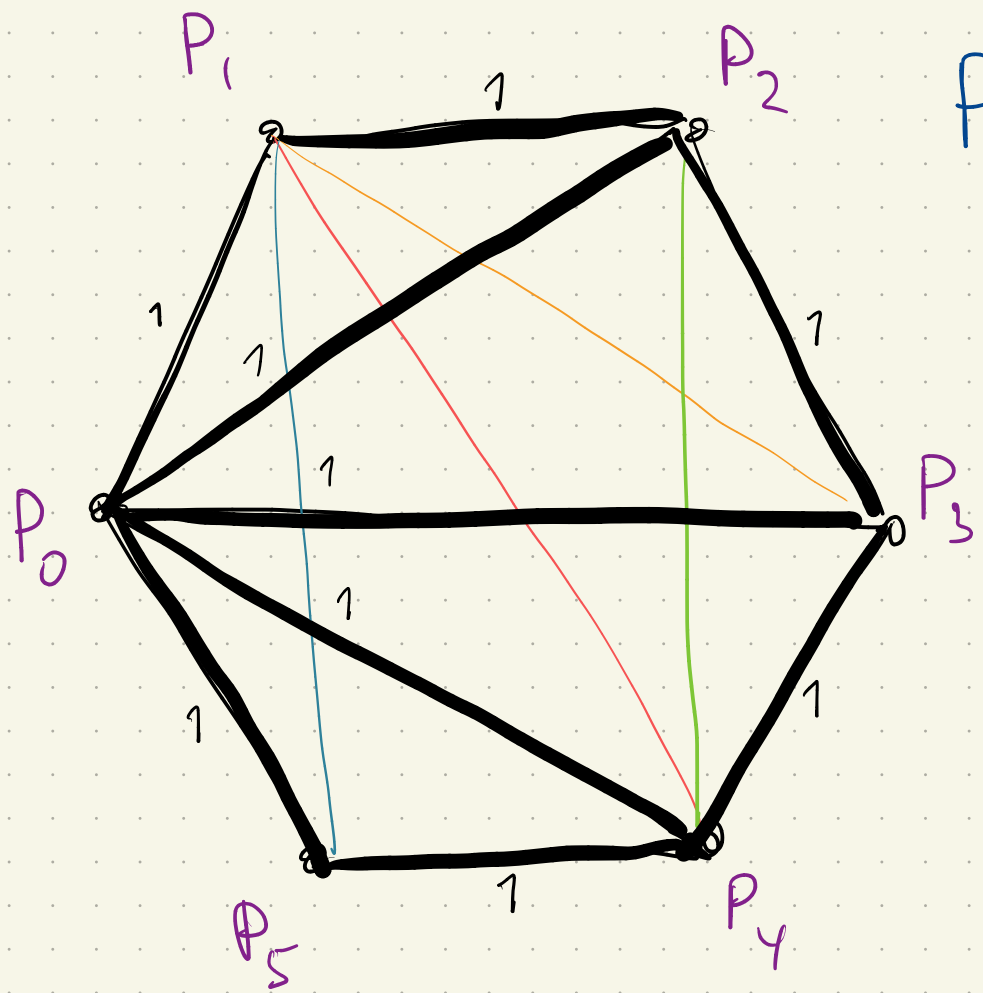
④ Сосчитайте "длины" диагоналей хорошего шестиугольника и составьте из них фриз:

Хороший = 1 на сторонах и ребрах триангуляции + Птолемей

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$





Решение: 1. Ищем "длины":

"длина" P_iP_j

обозначим $u_{ij} = |P_iP_j|$

$P_0P_1P_2P_3$: $u_{13} \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$ $u_{13} = 2$

$P_0P_1P_3P_4$: $u_{14} \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2$ $u_{14} = 3$

$P_0P_1P_4P_5$: $u_{15} \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3$ $u_{15} = 4$

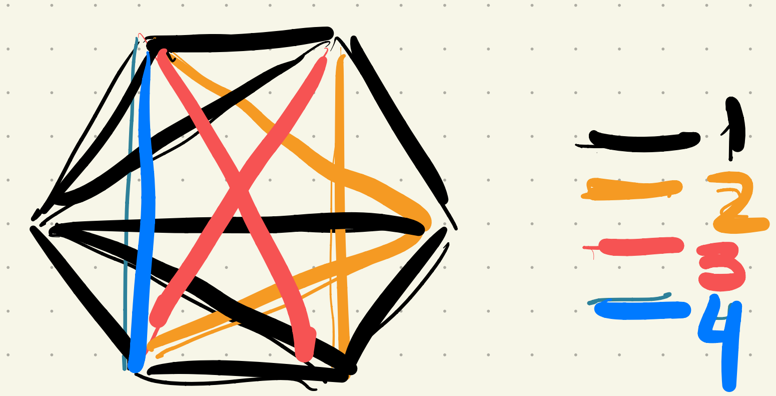
$P_0P_2P_3P_4$: $u_{24} \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$ $u_{24} = 2$

Достаточно сосчитать:

u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{24}

Остальное по симметрии

т.е. "длины" равны:

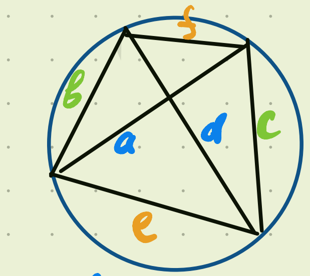


④ Сосчитайте "длины" диагоналей хорошего шестиугольника и составьте из них фриз:

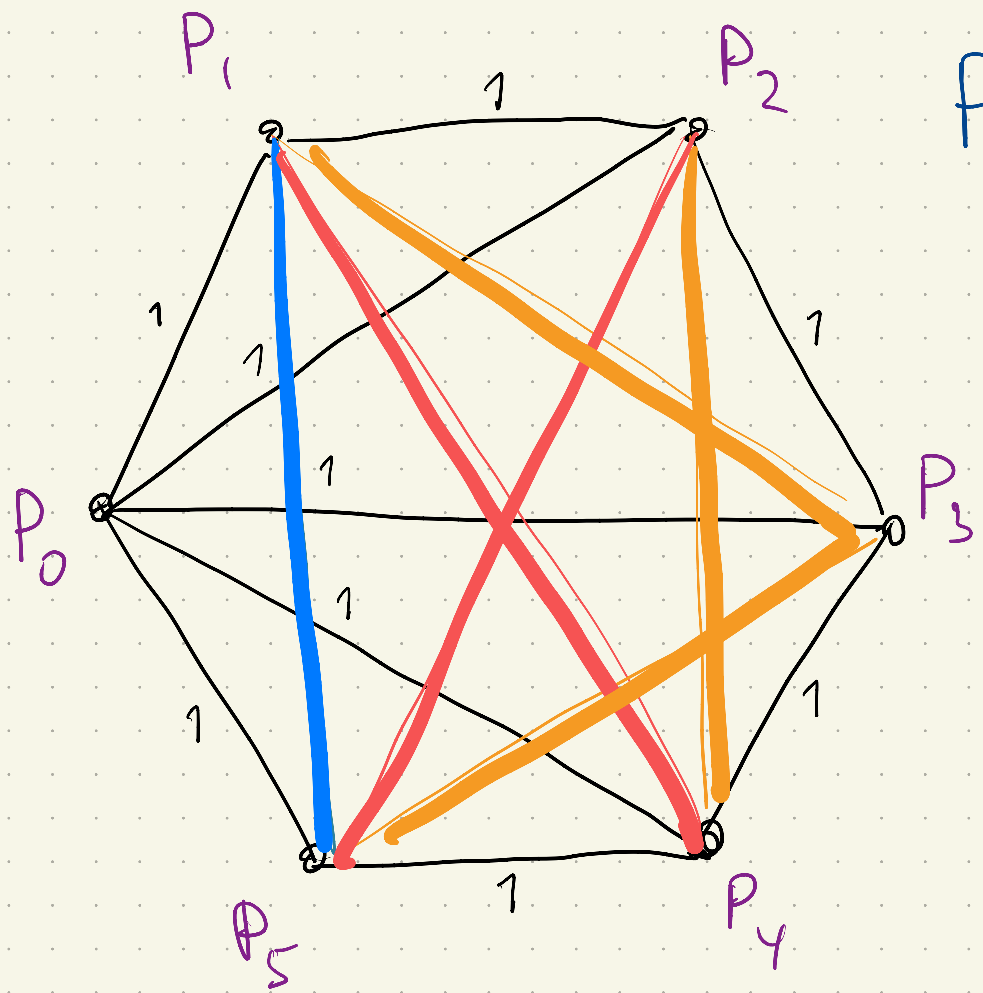
Хороший = 1 на сторонах и ребрах триангуляции + Птолемей

$$a \quad {}^{b}_{c} \quad d$$

$$ad - bc = 1$$

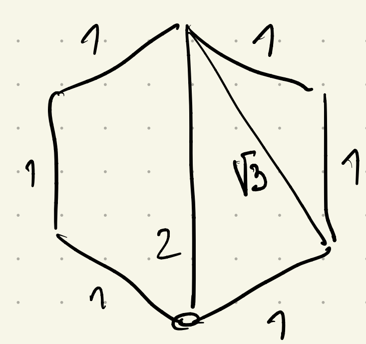


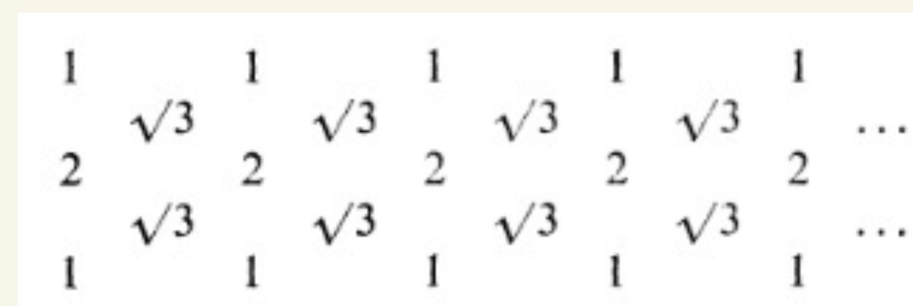
$$ad = bc + ef$$



Решение: 2. Составляем фриз:

• В примере с правильными многоугольниками было:





1		1		1		1		1	
	$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		...
2		2		2		2		2	
	$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		...
1		1		1		1		1	

← граница
← короткие диагонали
← длинные
← короткие
← граница

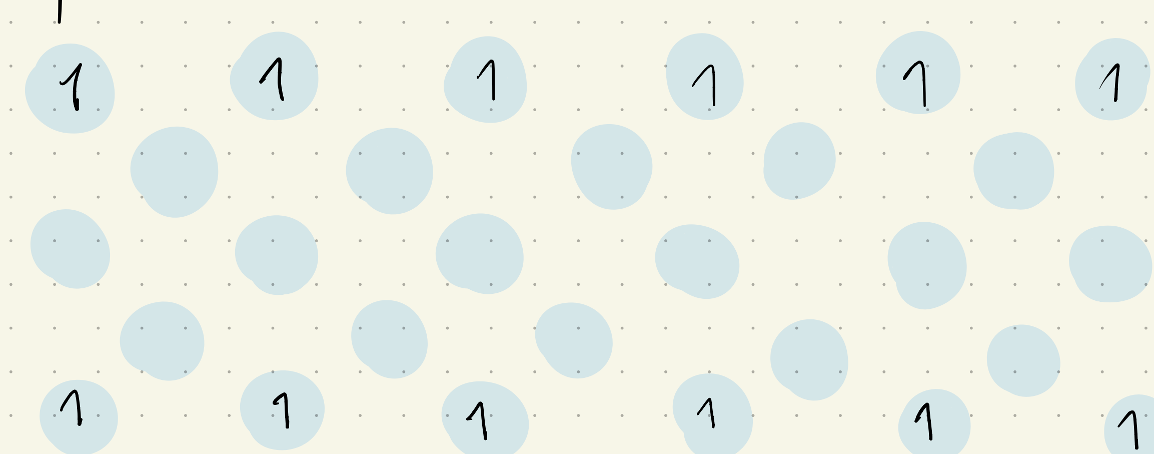
Т.е надо расставить:

— 1
— 2
— 3
— 4

4 1 2 2 2 1 →

3 3 1 →

4 1 2 2 2 1 →

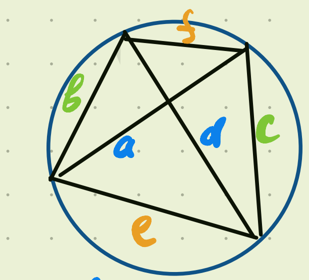


4. Сосчитайте "длины" диагоналей хорошего шестиугольника и составьте из них фриз:

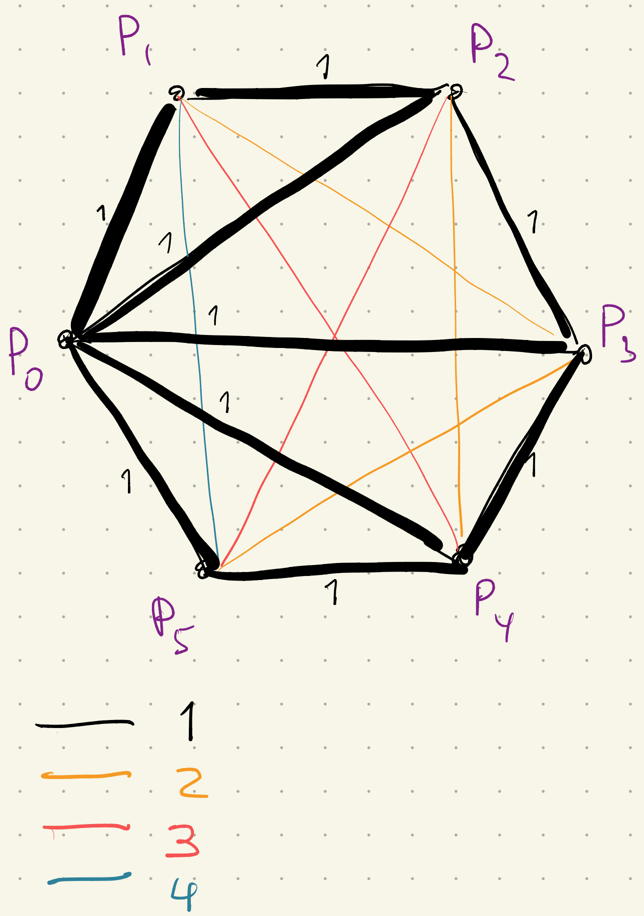
Хороший = 1 на сторонах и ребрах триангуляции + Птолемей

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

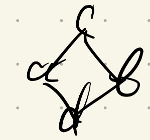
$ad - bc = 1$

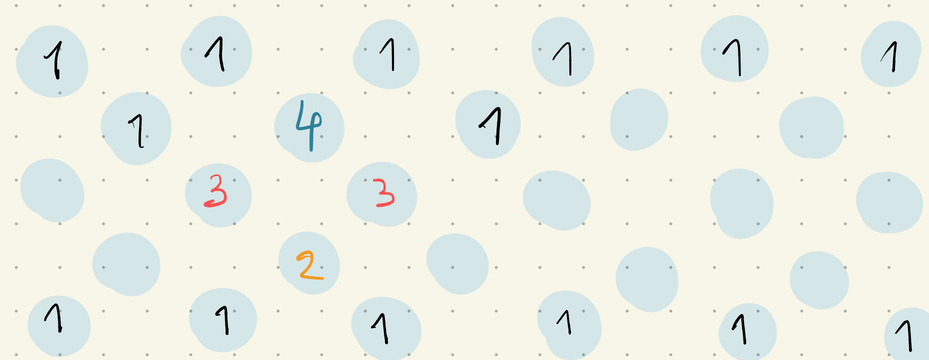


$ad = bc + ef$



Решение: 2. Составляем фриз:

- Ставим 4, соседи д.б. 1 (иначе  не выполнится)



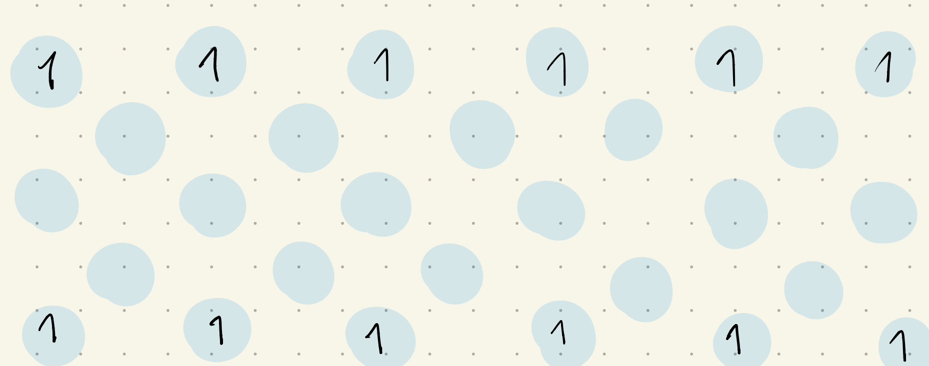
- под. 1 и 4 → 3
- под 3 и 3 → 2
- Теперь считаем остальные числа фриза

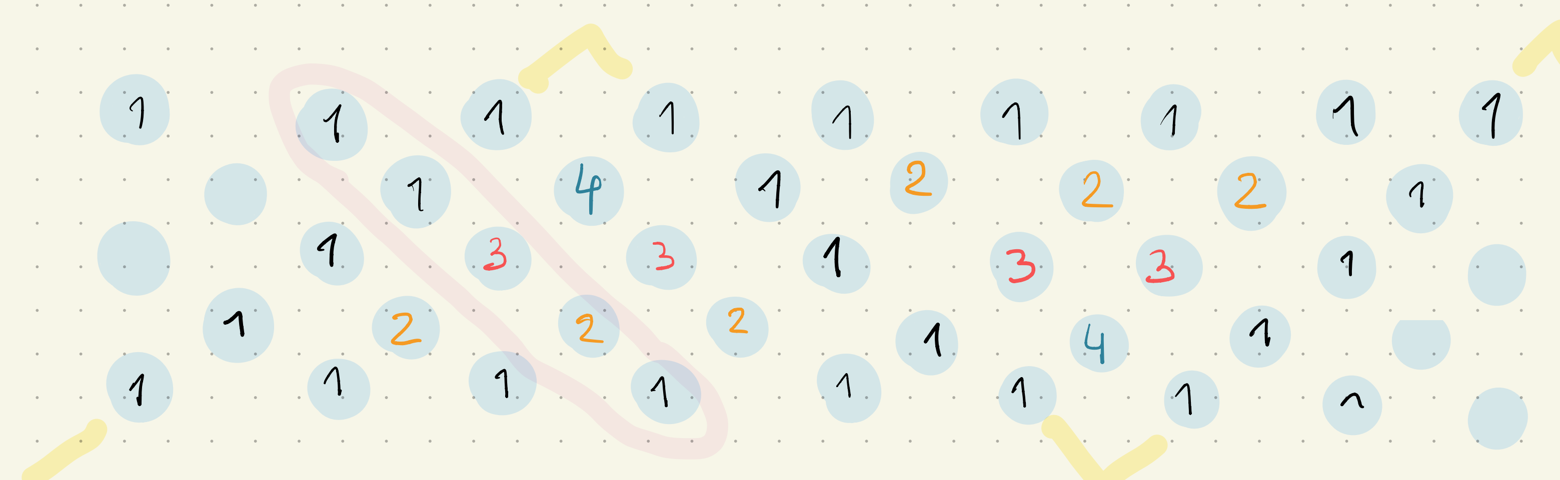
Т.е надо расставить:

4 1 2 2 2 1 →

3 3 1 →

4 1 2 2 2 1 →



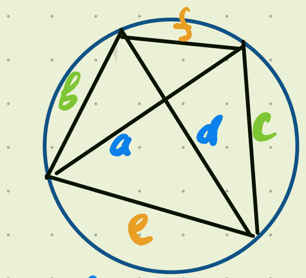


⑤ Как из "длин" u_{ij} диагоналей хорошего триангулированного $(n+3)$-угольника составить фриз ширины n?

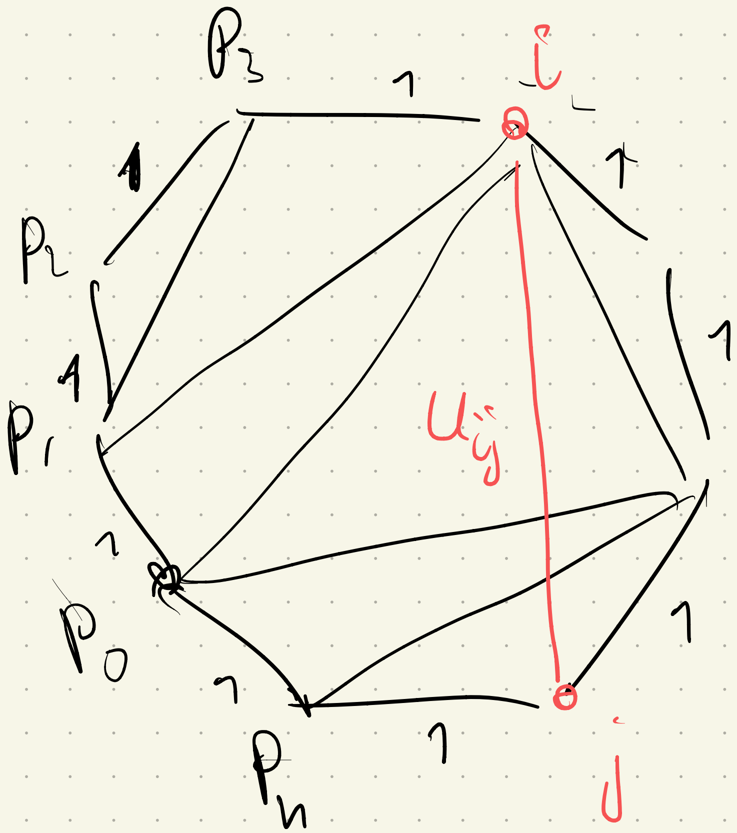
Хороший =
1 на сторонах и ребрах триангуляции
+ Птолемей

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

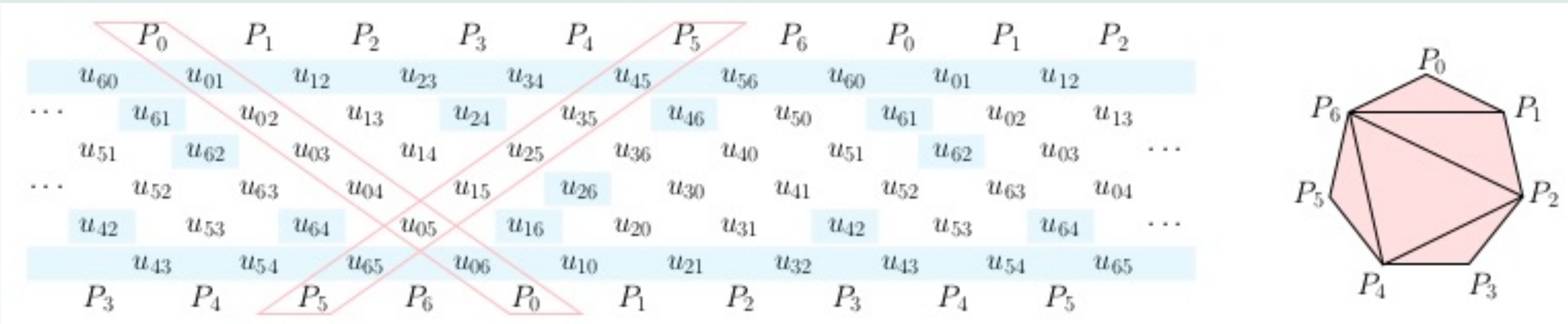
$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$



5' Из "длин" u_{ij} диагоналей хорошего триангулированного $(n+3)$-угольника составили таблицу как в примере:

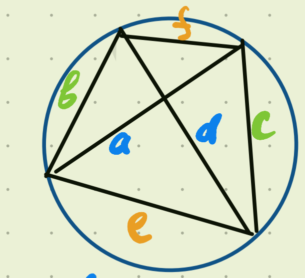


Покажите, что получился фриз ширины n.

Хороший = 1 на сторонах и ребрах триангуляции + Птолемей

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

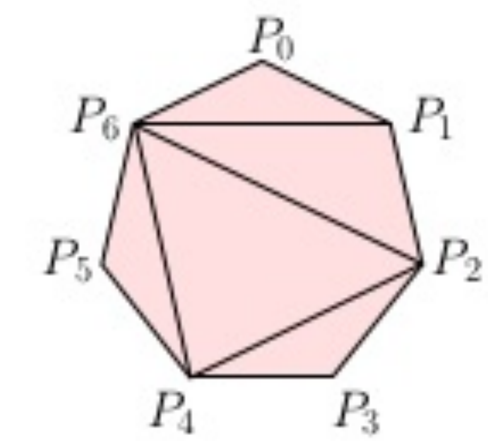
$ad - bc = 1$



$ad = bc + ef$

5' Из "длин" u_{ij} диагоналей хорошего триангулированного $(n+3)$-угольника составили таблицу как в примере:

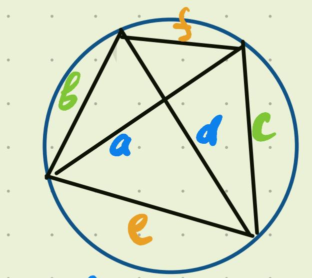
	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	P_1	P_2
	u_{60}	u_{01}	u_{12}	u_{23}	u_{34}	u_{45}	u_{56}	u_{60}	u_{01}	u_{12}
…	u_{61}	u_{02}	u_{13}	u_{24}	u_{35}	u_{46}	u_{50}	u_{61}	u_{02}	u_{13}
	u_{51}	u_{62}	u_{03}	u_{14}	u_{25}	u_{36}	u_{40}	u_{51}	u_{62}	u_{03} …
…	u_{52}	u_{63}	u_{04}	u_{15}	u_{26}	u_{30}	u_{41}	u_{52}	u_{63}	u_{04}
	u_{42}	u_{53}	u_{64}	u_{05}	u_{16}	u_{20}	u_{31}	u_{42}	u_{53}	u_{64} …
	u_{43}	u_{54}	u_{65}	u_{06}	u_{10}	u_{21}	u_{32}	u_{43}	u_{54}	u_{65}
	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5



Хороший = 1 на сторонах и ребрах триангуляции + Птолемей

$a \; {}^{b}_{c} \; d$

$ad - bc = 1$



$ad = bc + ef$

Покажите, что получился фриз ширины n.

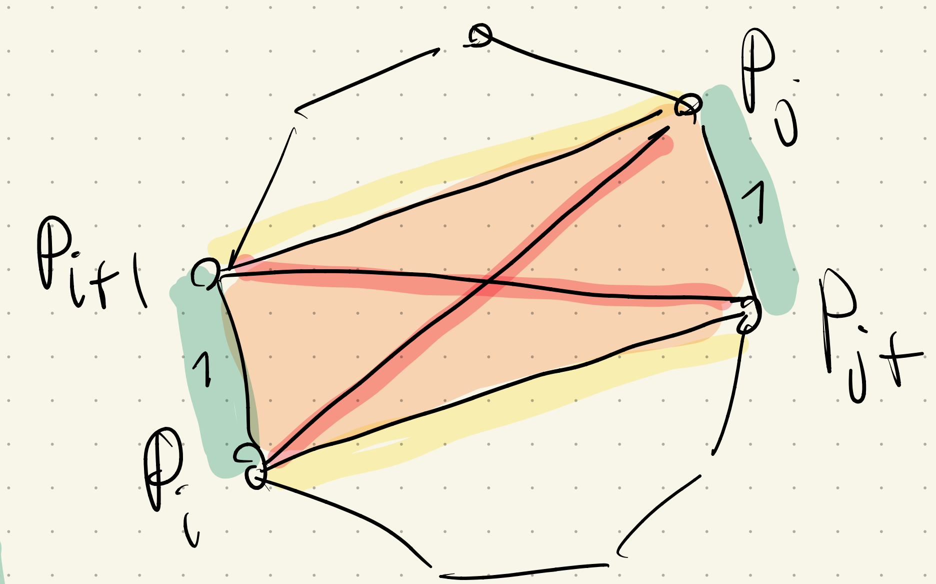
Решение: Так как многоугольник хороший

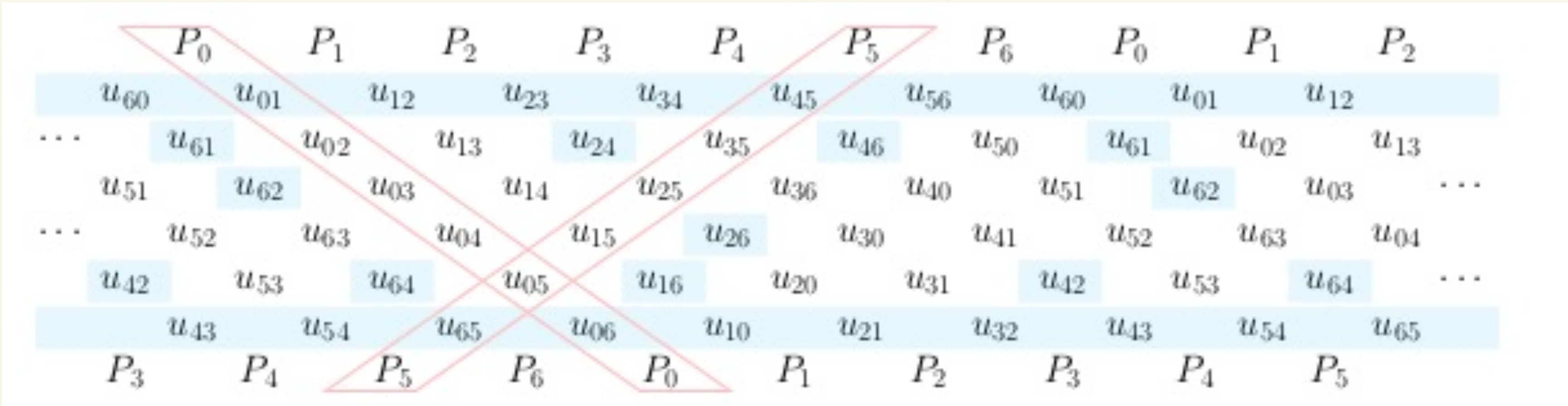
- $u_{i,i+1} = 1$
- $u_{i,j}$ – целые

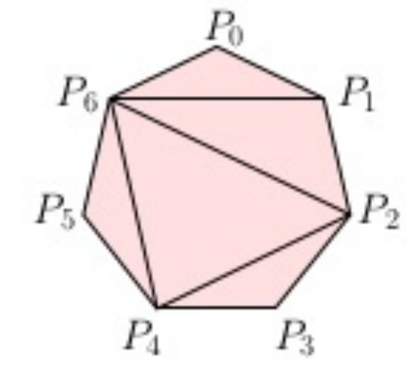
и выполнено правило фриза:

$$\begin{matrix} & u_{i+1,j} & \\ u_{i,j} & & u_{i+1,j+1} \\ & u_{i,j+1} & \end{matrix}$$

$$u_{ij} \cdot u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} \cdot u_{i,j+1} = 1$$



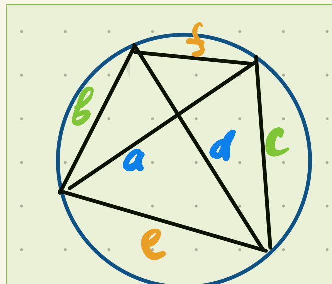




Хороший =
1 на сторонах
и ребрах
триангуляции
+ Птолемей

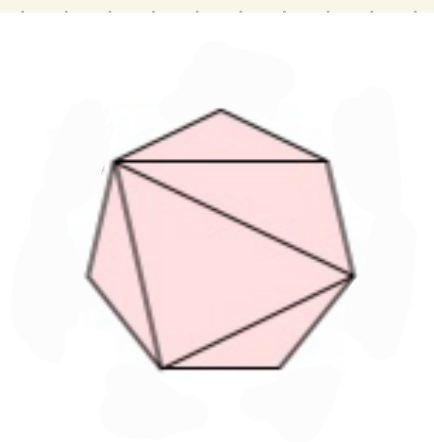
$a \, {}^{b}_{c} \, d$

$ad - bc = 1$

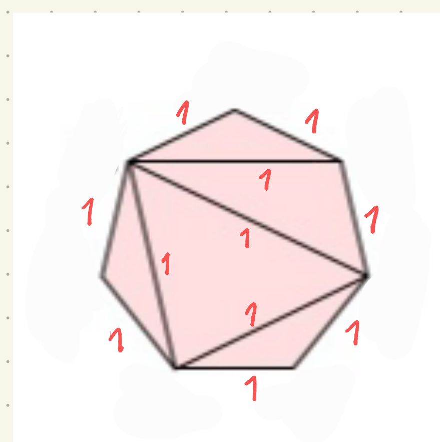


$ad = bc + ef$

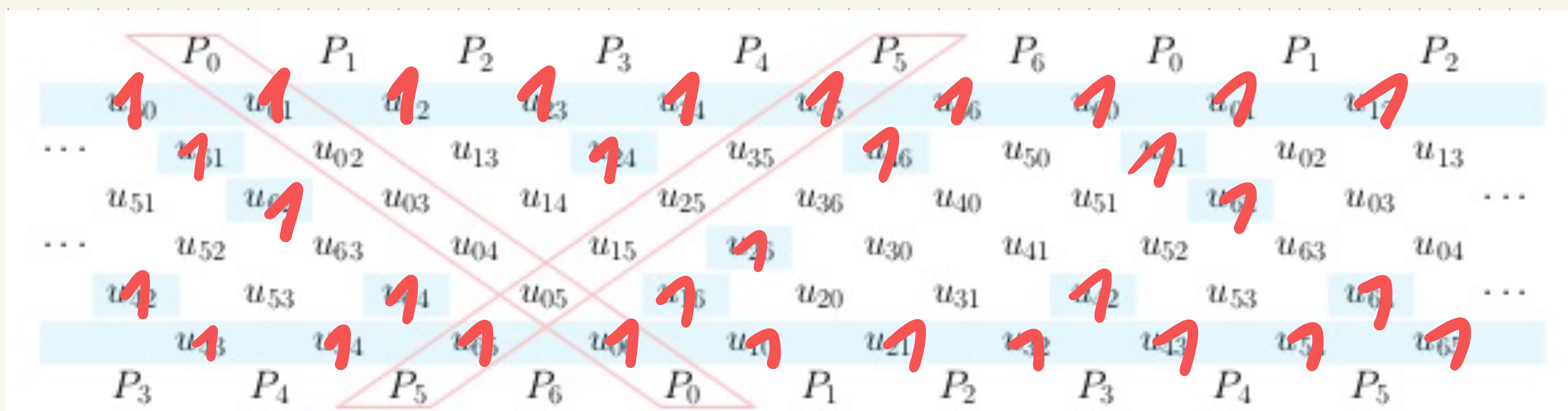
Тем самым, мы научились строить целочисленный фриз по каждому! триангулированному многоугольнику:

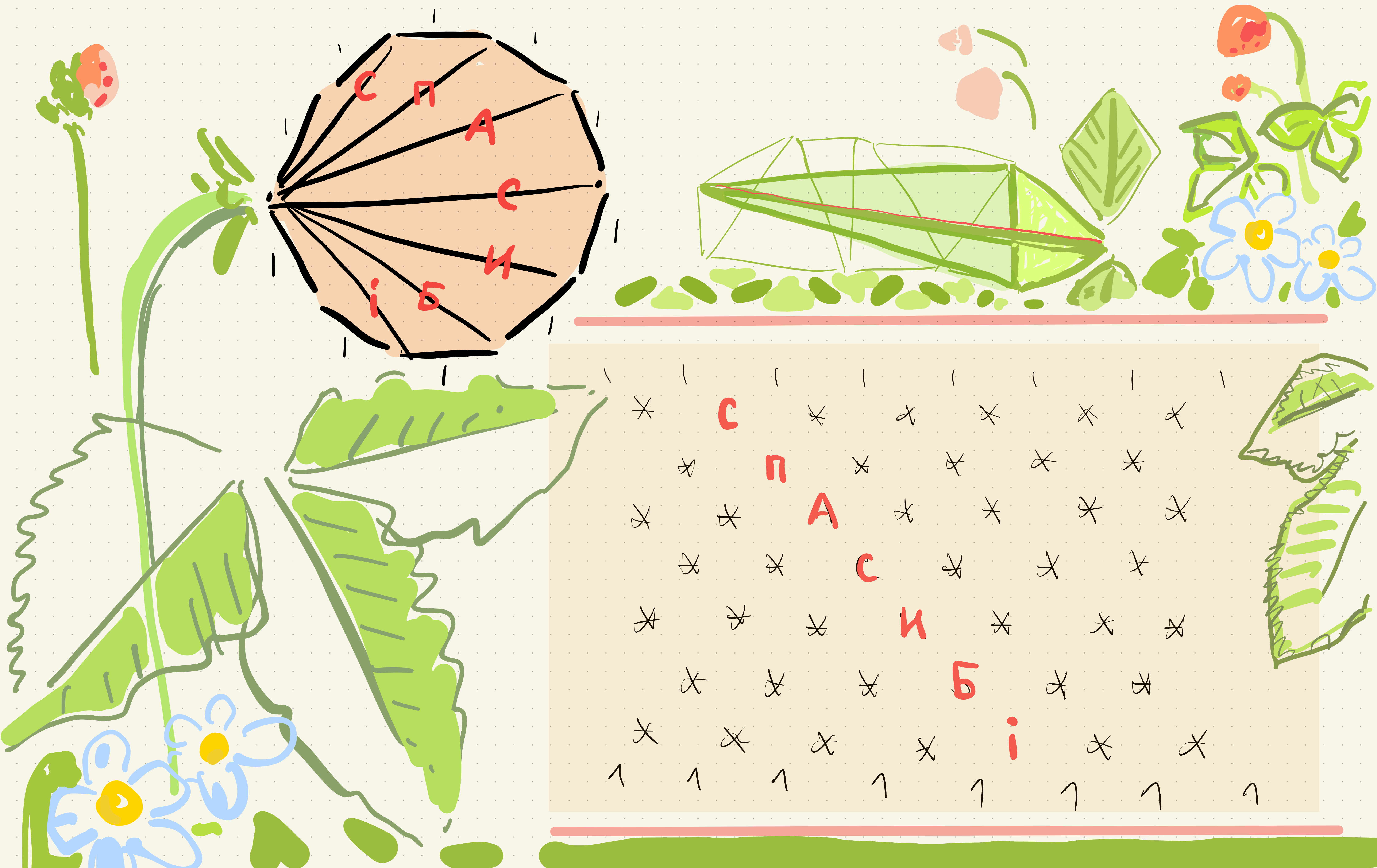


→



— Поставим **1** вместо всех u_{ij} лежащих в триангуляции
— досчитаем остальное по соотношению Птолемея (выйдут целые числа по задаче 3)




спасибі
спасибі