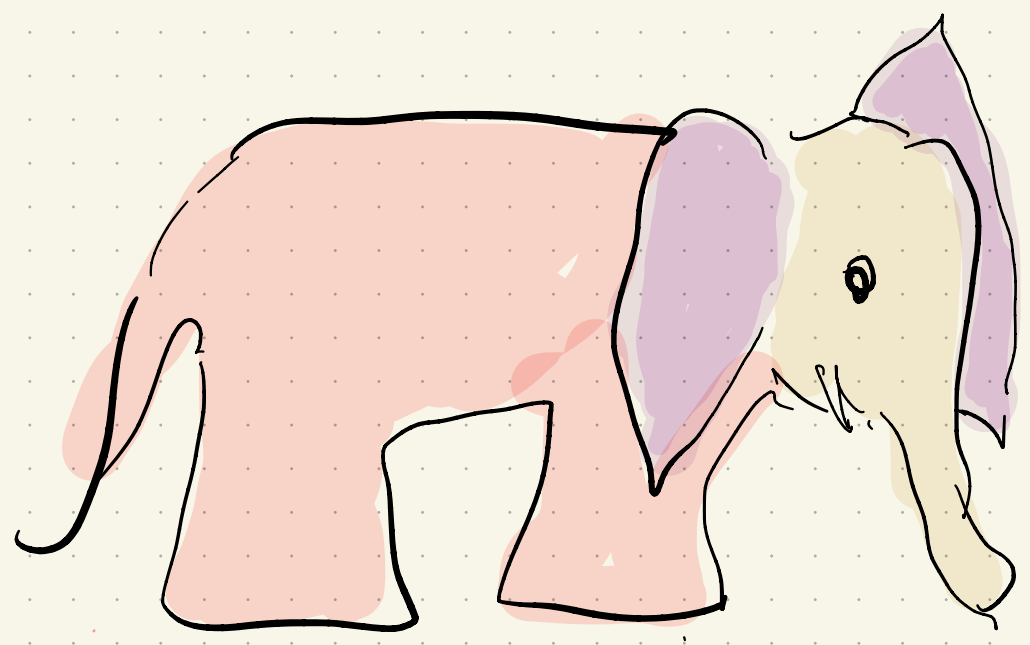
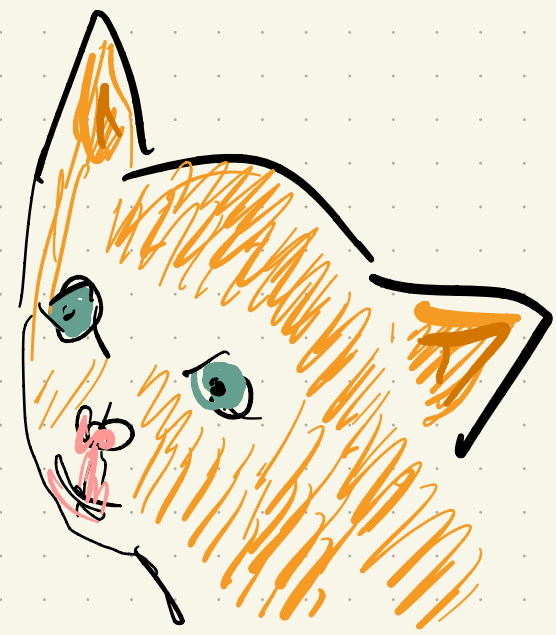
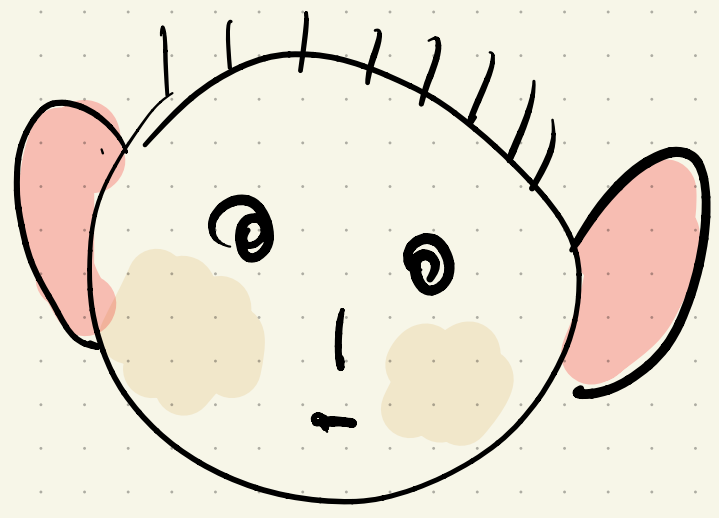


приклеивание и ~~обрывание~~ ушей



A large rectangular area containing a grid of octagons for a craft activity. The octagons are arranged in rows and columns, with some having red or blue lines drawn across them. To the right of the grid are two diagrams of an octagon with internal red lines, showing how to cut or fold it into a specific shape.



Фризы Конвея-Кокстера:

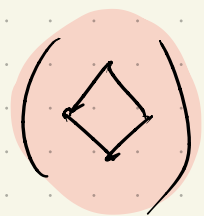
- Таблицы чисел

(1) по краям ряды единицы

(2) еще дальше - ряды нулей
(их часто не пишут)

	○	○	○	○	○	○	○	
1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	3	1	3	1	3	1	...
2	2	2	2	2	2	2	2	
...	3	1	3	1	3	1	3	...
1	1	1	1	1	1	1	1	
	○	○	○	○	○	○	○	

ширина n



Числа в малых ромбах
удовлетворяют
арифметическому правилу

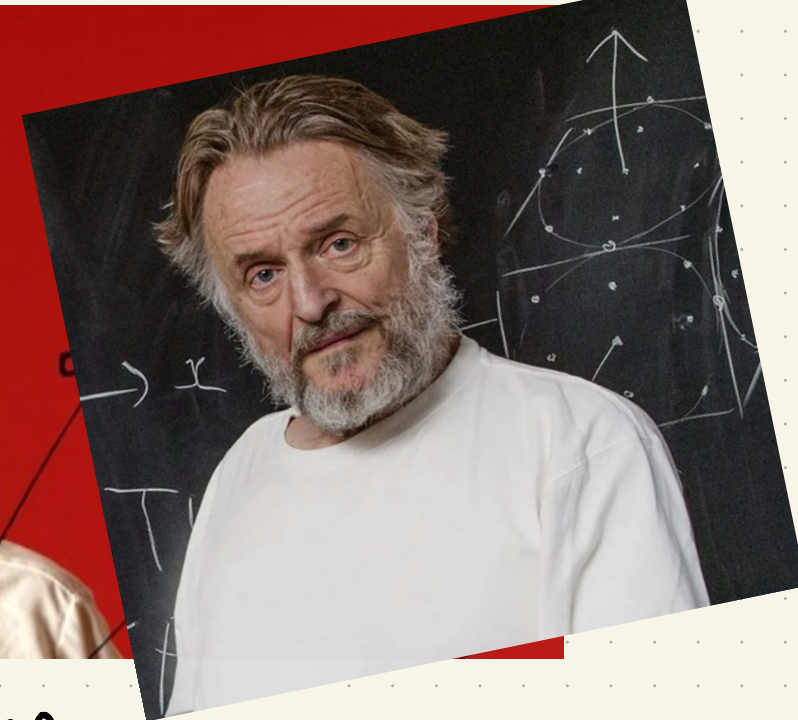
a b d
 c

$$ad - bc = 1$$



Coxeter

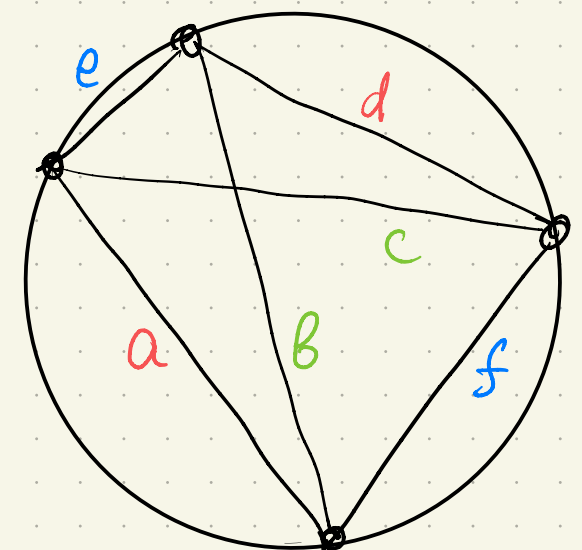
1907-2003



Conway

1937-2020

Теорема Птолемея



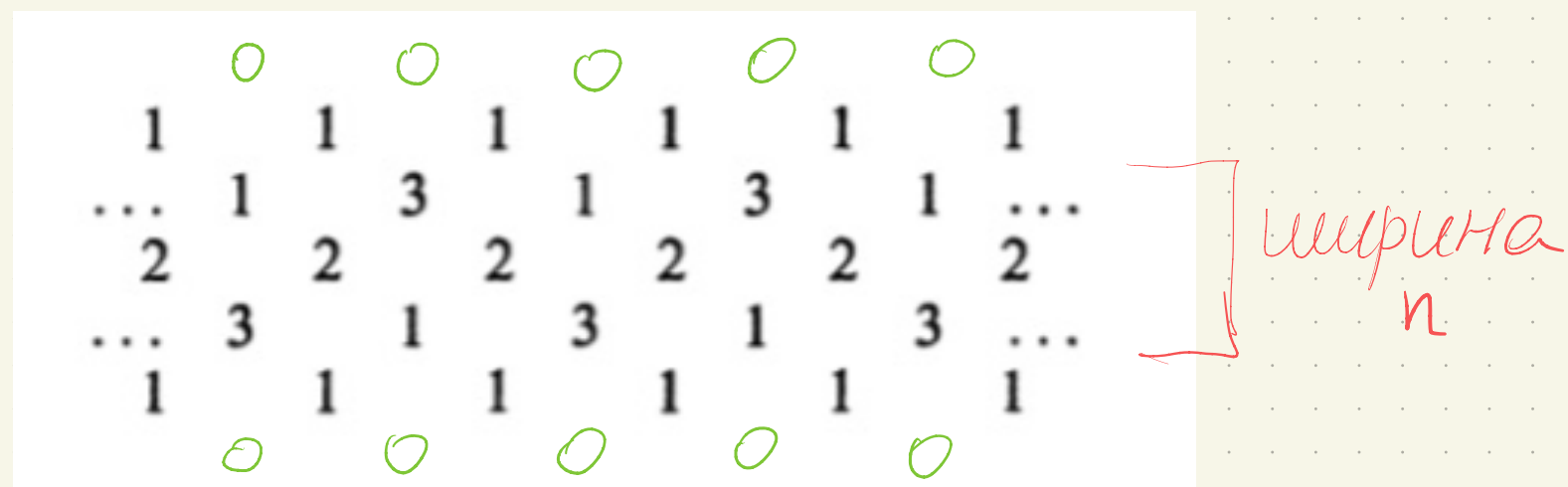
$$bc = ad + ef$$

Фризы Конвея-Кокстера:

- Таблицы чисел

(1) по краям ряды единицы

(2) еще дальше - ряды нулей
(их часто не пишут)

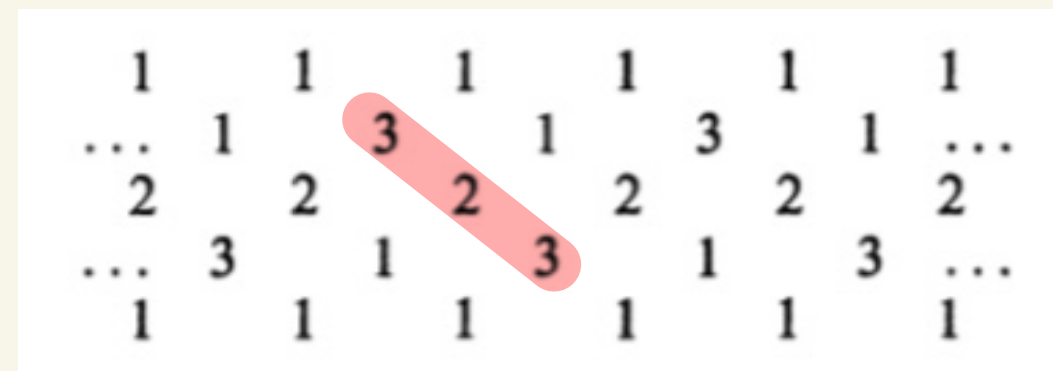


(3) Числа в малых ромбах удовлетворяют арифметическому правилу

$$ad - bc = 1$$

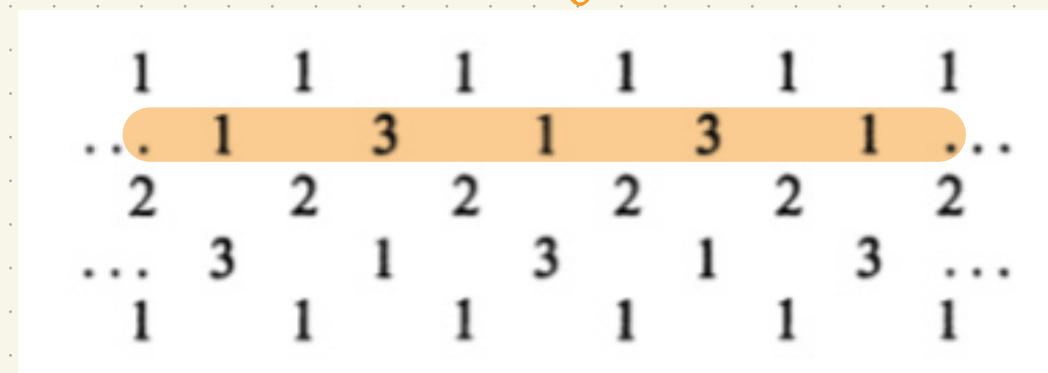
Какие элементы достаточно знать, чтобы восстановить фриз?

диагональ:



или

первый ряд (суть):



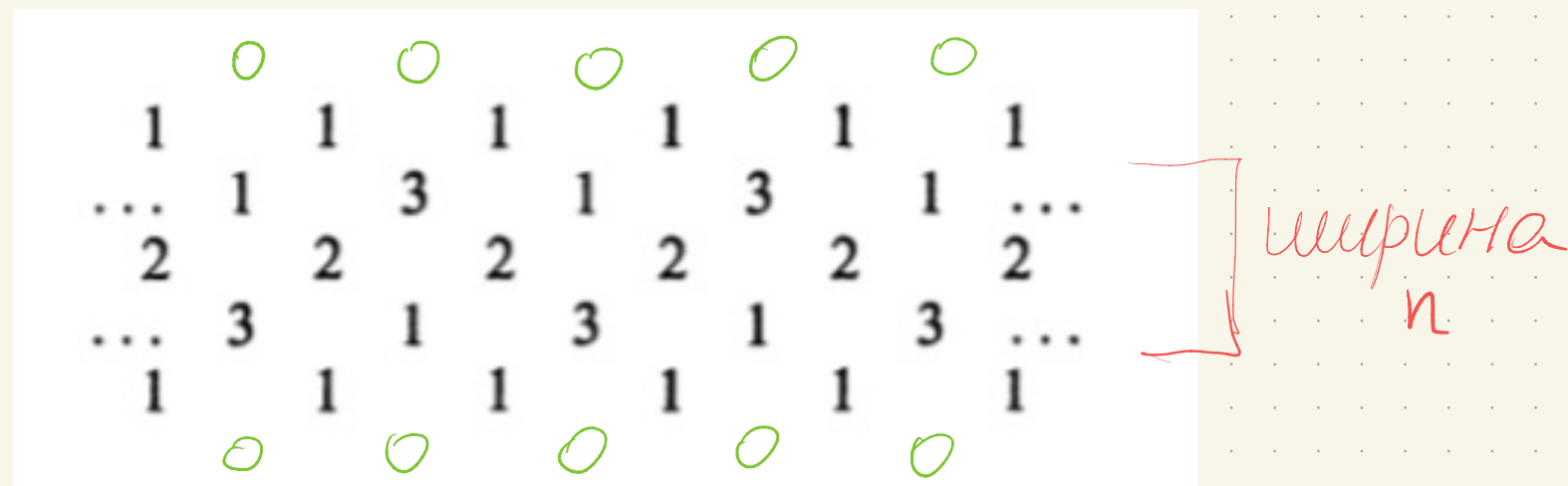
Сколько чисел из первого ряда достаточно?

Фризы Конвея-Кокстера:

- Таблицы чисел

(1) по краям ряды единицы

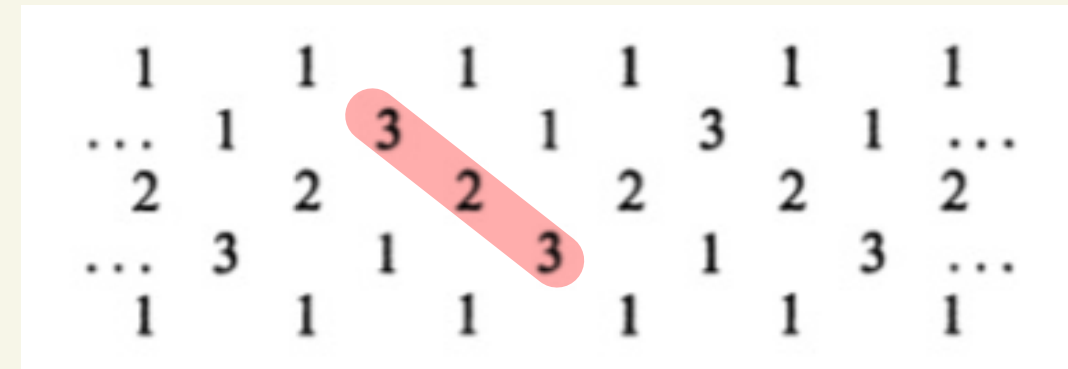
(2) еще дальше - ряды нулей
(их часто не пишут)



(3) Числа в малых ромбах удовлетворяют арифметическому правилу

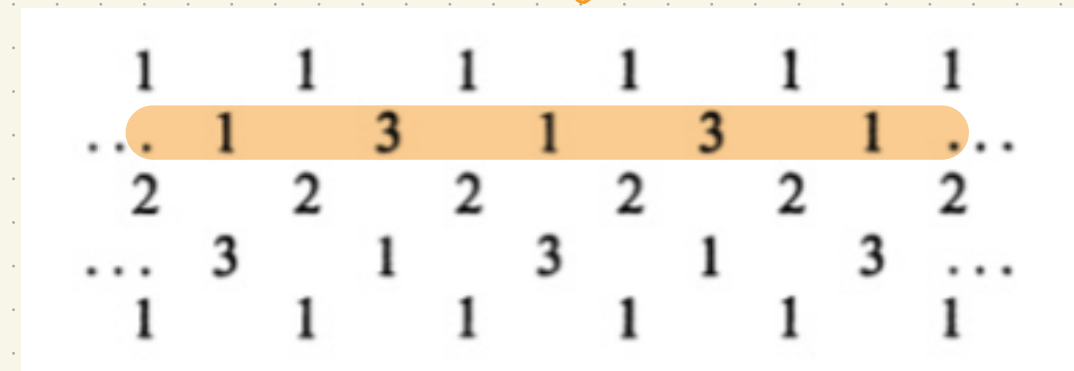
$$ad - bc = 1$$

Какие элементы достаточно
знать, чтобы восстановить фриз?
диагональ:

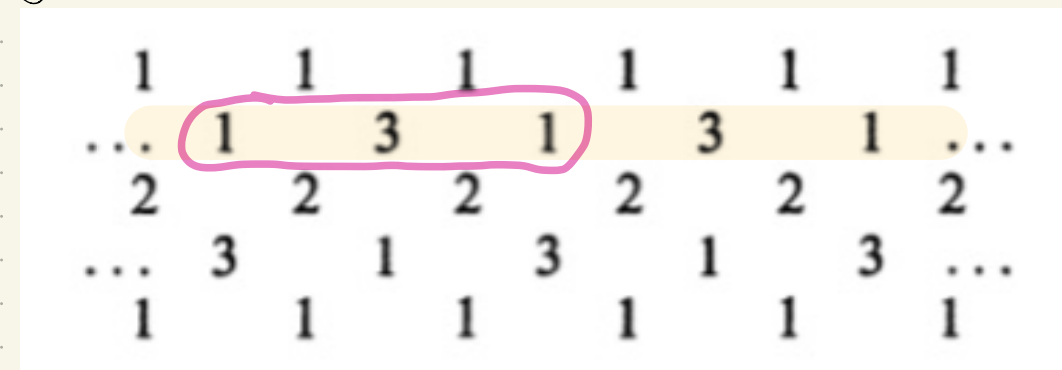


или

первый ряд (суть):



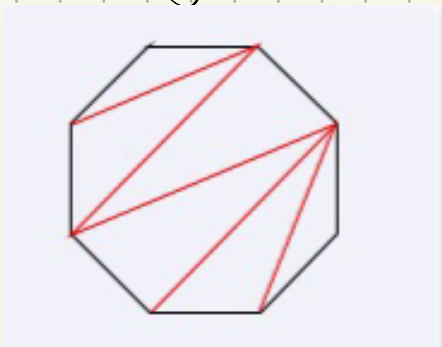
Сколько чисел из первого
ряда достаточно?



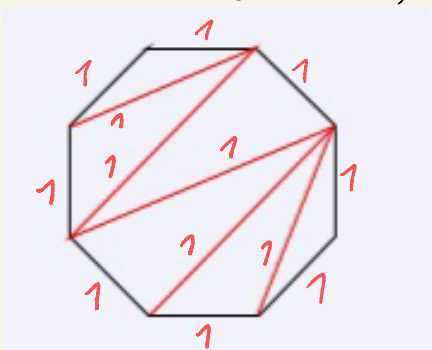
n чисел сути определяют диагональ,

Способ построить целочисленный фриз ширины n :

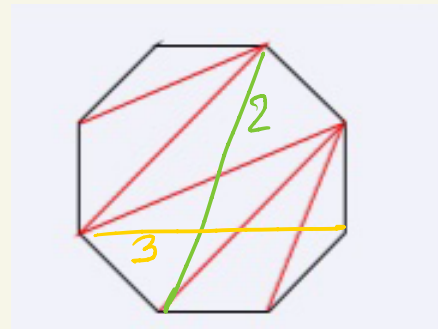
0: Возьмем триангулированный $(n+3)$ -угольник



1: Поставим 1 на сторонах и диагоналях треугольников

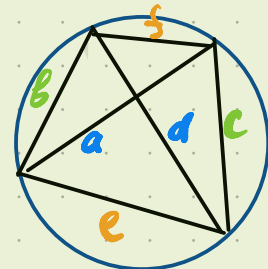


2: Посчитаем по Птолемею все диагонали



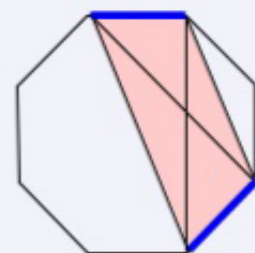
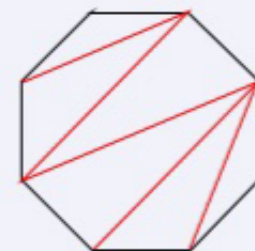
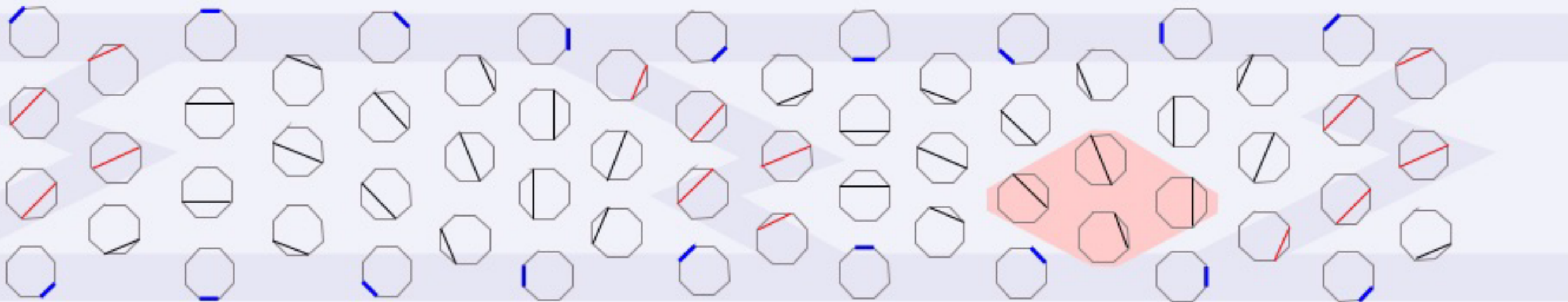
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

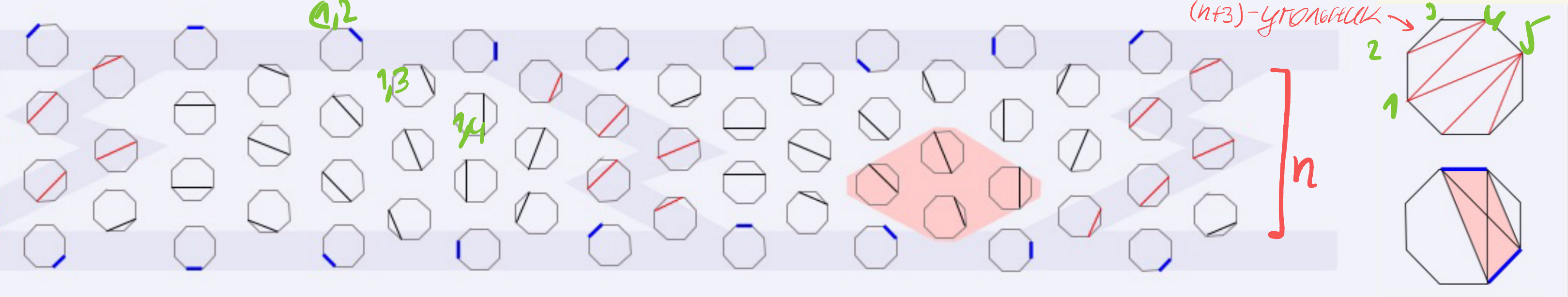


$$ad = bc + ef$$

→ 3: составим из полученных чисел фриз:



Сегодня: Докажем, что **ВСЕ** целочисленные фриз ширины n получаются таким образом.



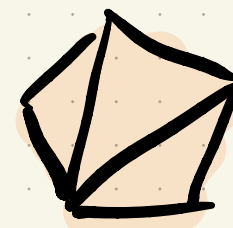
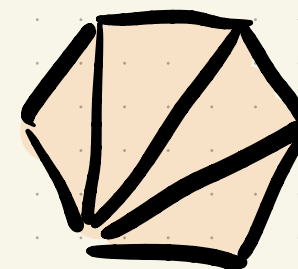
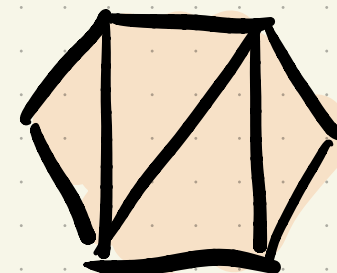
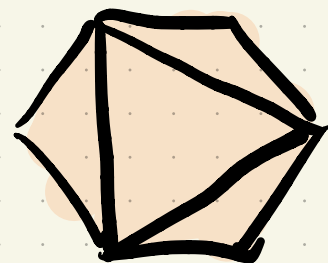
Разминка: соедините образы с соответствующими триангуляциями.

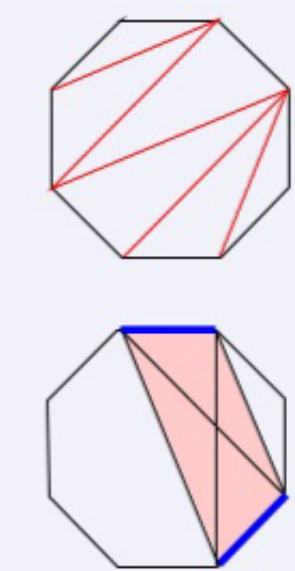
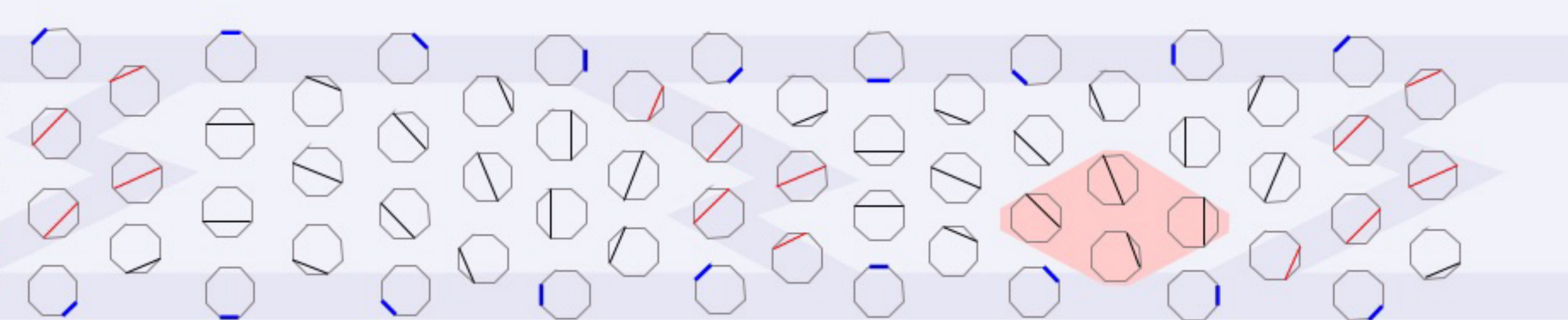
1	1	1	1	1	1	1
...	4	1	2	2	2	...
3	3	1	3	3	1	...
...	2	2	1	4	1	...
1	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	1	1	1	...
...	3	1	2	2	1	3	...
2	2	1	3	1	2	...	...
...	1	1	1	1	1	1	1

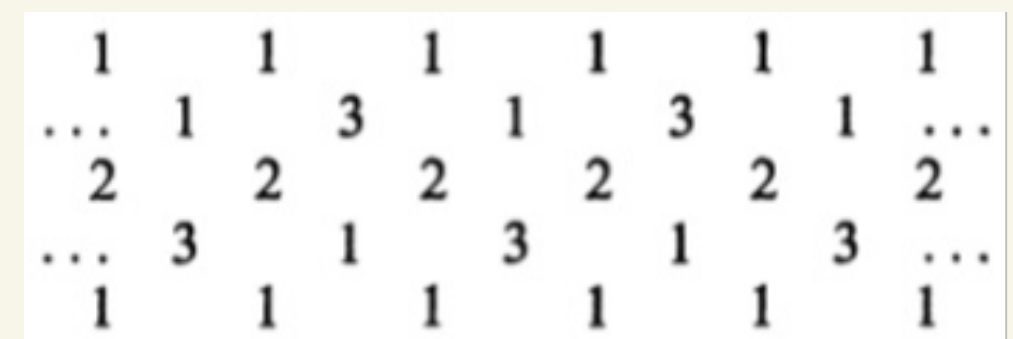
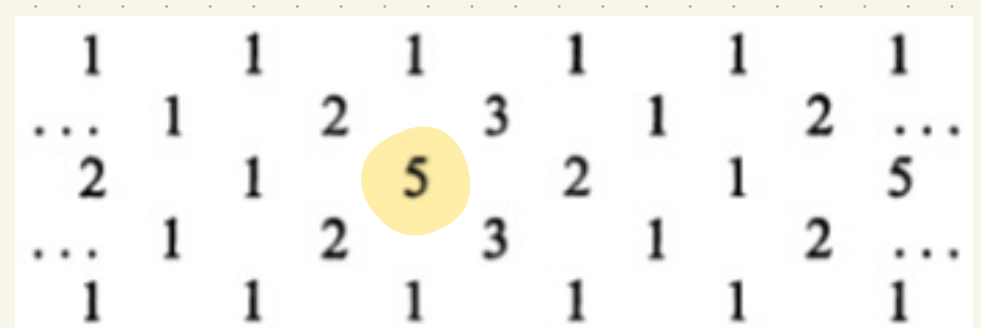
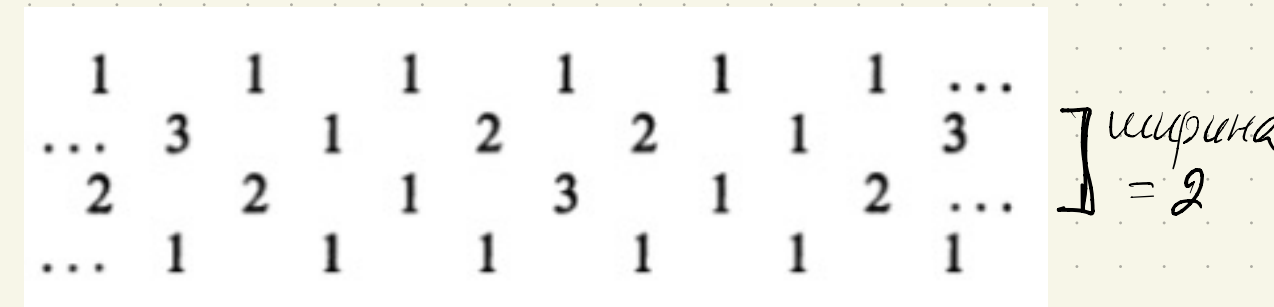
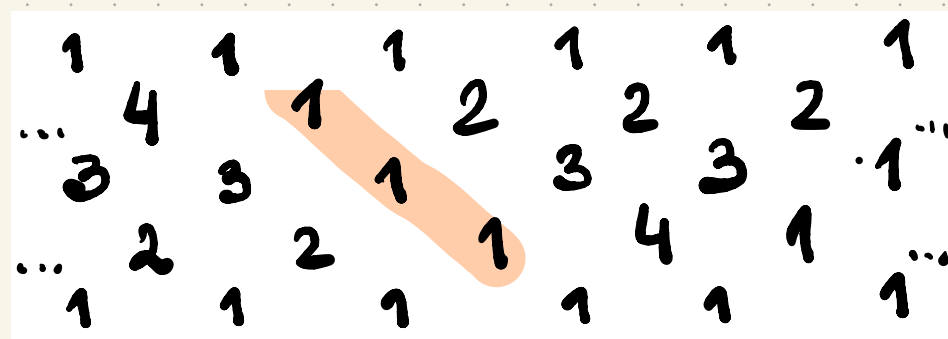
1	1	1	1	1	1	1
...	1	2	3	1	2	...
2	1	5	2	1	5	...
...	1	2	3	1	2	...
1	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	1	1	1
...	1	3	1	3	1	...
2	2	2	2	2	2	2
...	3	1	3	1	3	...
1	1	1	1	1	1	1





Разминка: соедините фриз с соответствующими триангуляциями.



Ширина среза $\leftrightarrow (n+3)$ -угольник

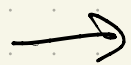
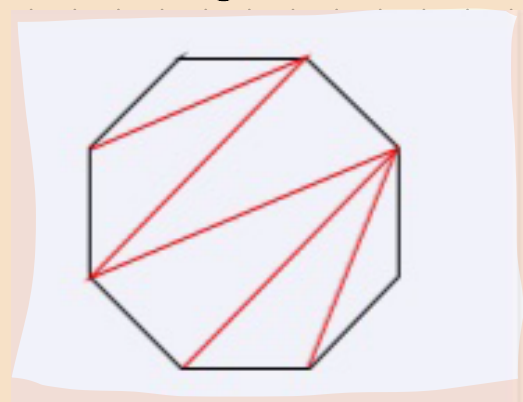
Диагональ из 1

"Длинные" диагонали

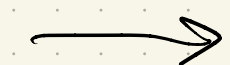
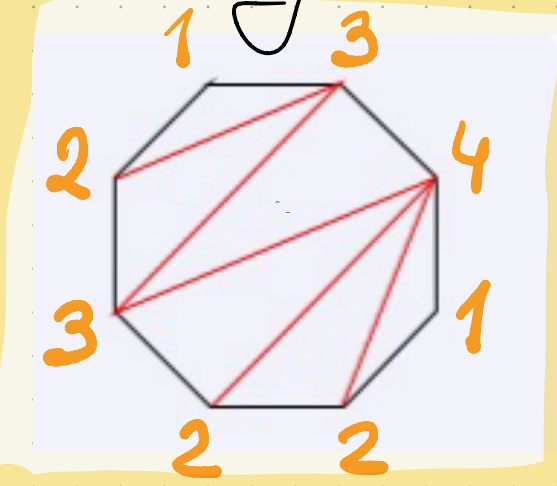
Диагонали только "длинные" 1, 2, 3

1 Докажите, что тот же самый фриз можно построить так:

Возьми
триангулированный
(n+3)-угольник



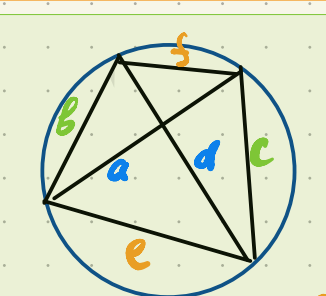
Сосчитаю
число треугольников
в каждой вершине



Используя
полученные
числа
в качестве
первого ряда
(суть),
постройте фриз

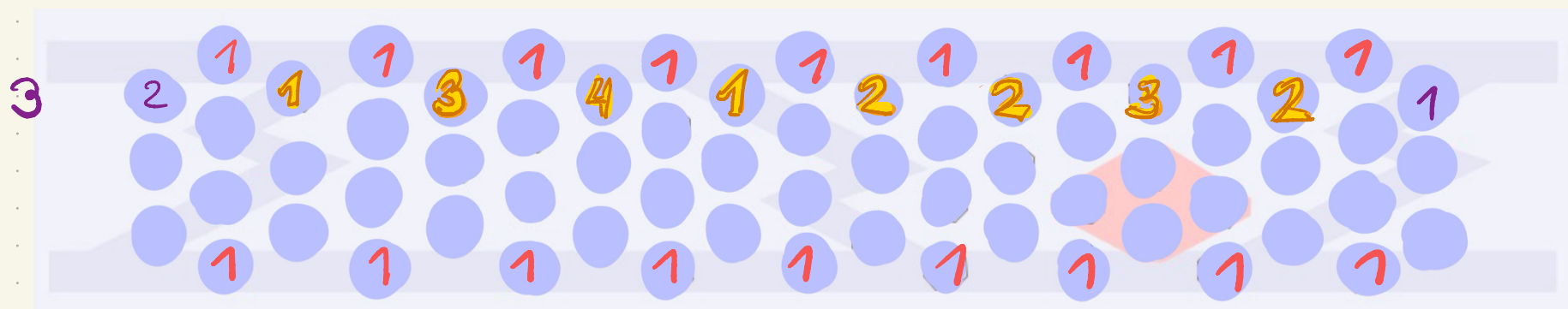
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



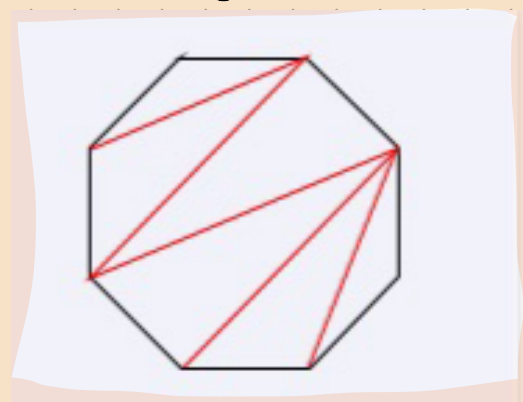
$$ad = bc + ef$$

Пример:

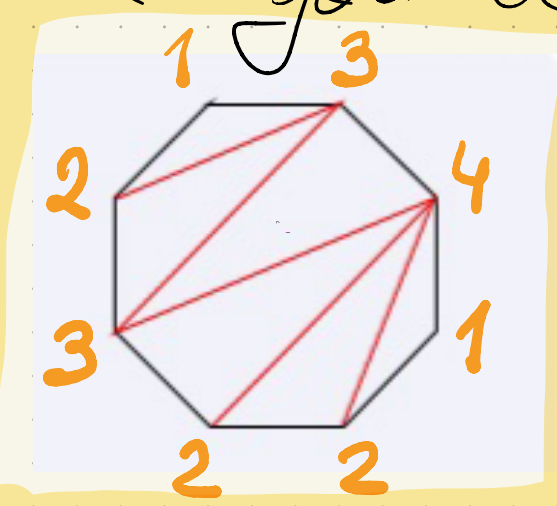


1 Докажите, что тот же самый фриз можно построить так:

Возьми
триангулированный
(n+3)-угольник



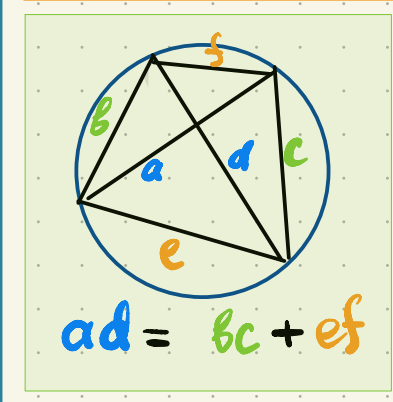
Сосчитай
число треугольников
в каждой вершине



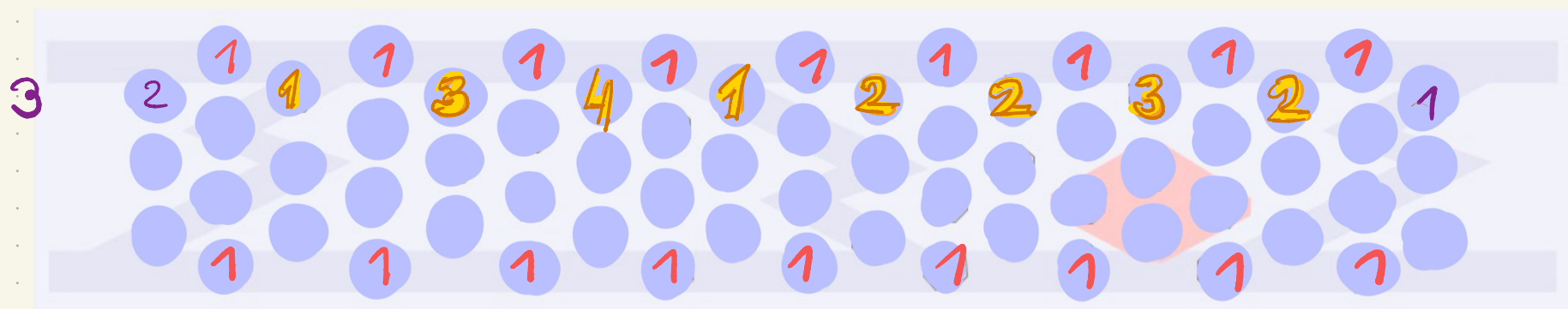
Используя
полученные
числа
в качестве
первого ряда
(суть),
постройте фриз

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

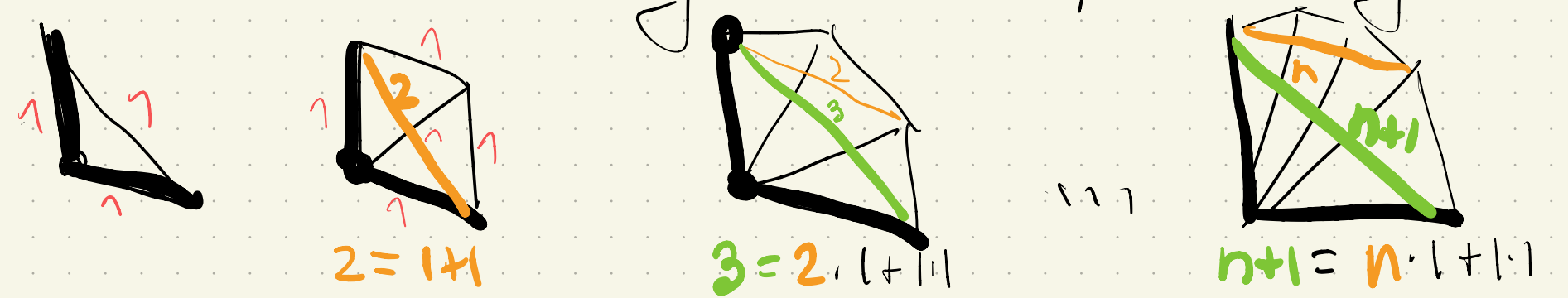
$$ad - bc = 1$$



Пример:



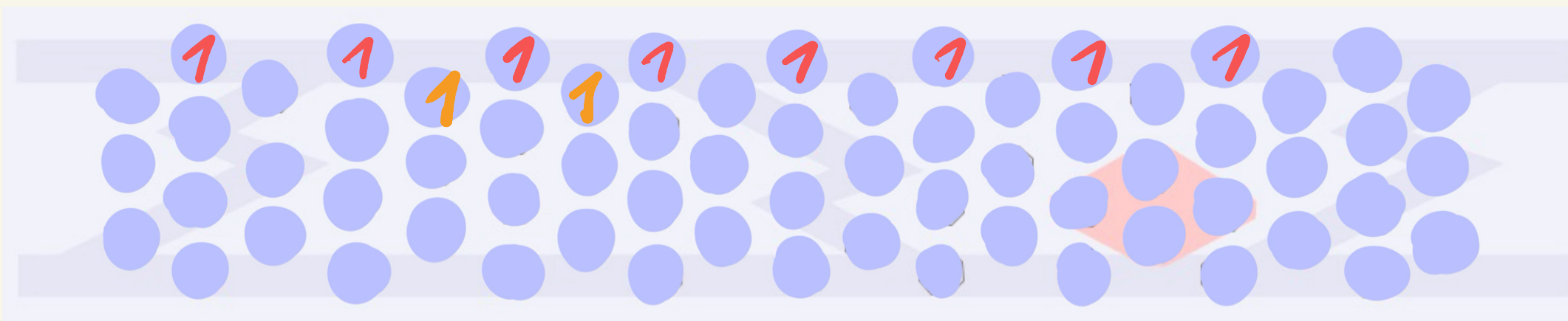
Решение: Число треугольничков в вершине (n+3)-угольника — это "длина" короткой диагонали (по индукции):



А если у фриза
совпадает первый ряд,
то фриз будет одинаковым

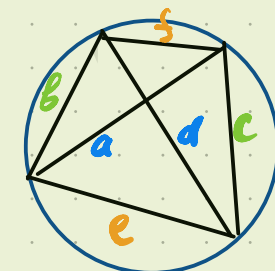
2

Может ли суть целого положительного
фрейза положительной ширины
содержать две единицы подряд?



$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

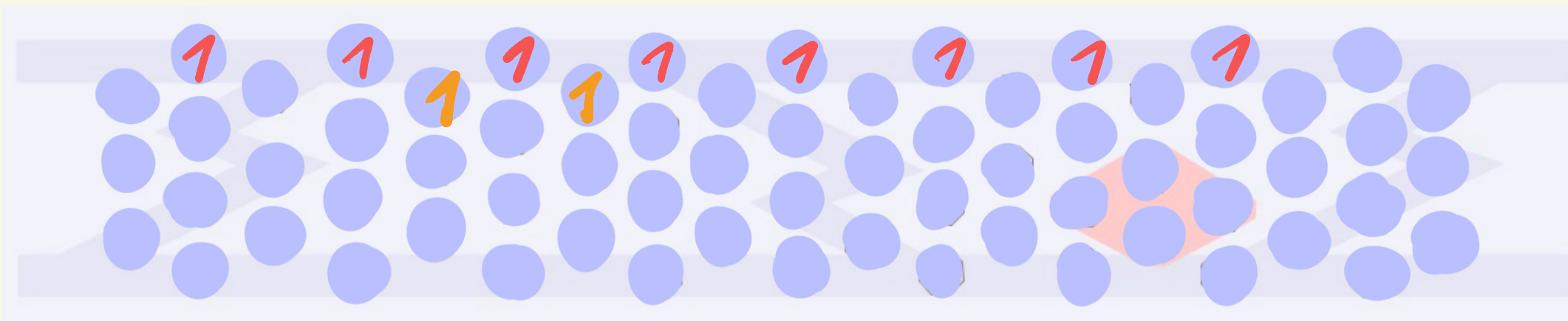
$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$

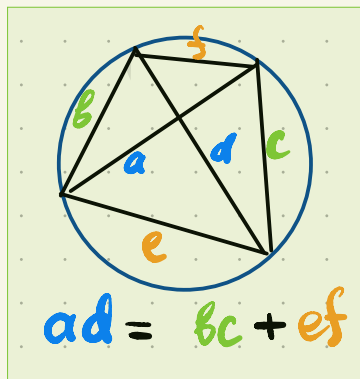
2

Может ли суть целого положительного
фрива положительной ширины
содержать две единицы подряд?



$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: НЕТ

1 1 1 1 1 1 1

здесь был бы 0
А что тогда тут?

$$(1 \cdot 1 - 1 \cdot ? = 1)$$

Мы докажем, что хотя бы одна единица
в сути есть всегда

1

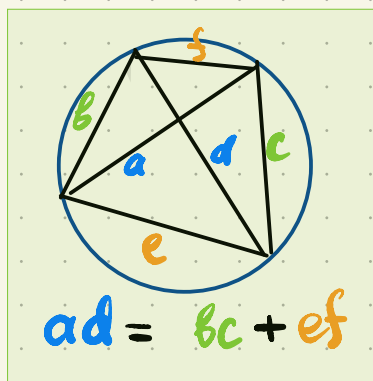
③ Обозначим элементы фруза:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+2} \\ f_2 & & & & & & & & & & & \\ f_3 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ f_n & & & & & & & & & & & \end{array}$$

ДОКАЖИТЕ, ЧТО

$$f_{k+1} + f_{k-1} = f_k \cdot a_k$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & d \\ & c & \end{array}$$
$$ad - bc = 1$$



3) Обозначим элементы фриза:

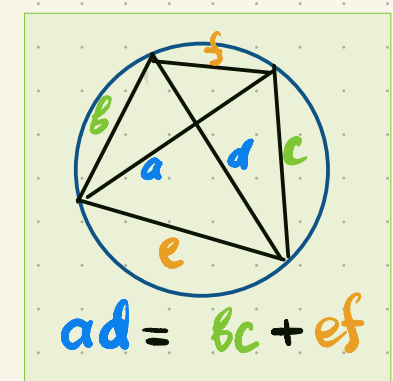


Докажите, что

$$f_{k+1} + f_{k-1} = f_k \cdot a_k$$

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: Индукция по k:

База: $k=0$

$$f_1 + f_{-1} = f_0 \cdot a_0$$

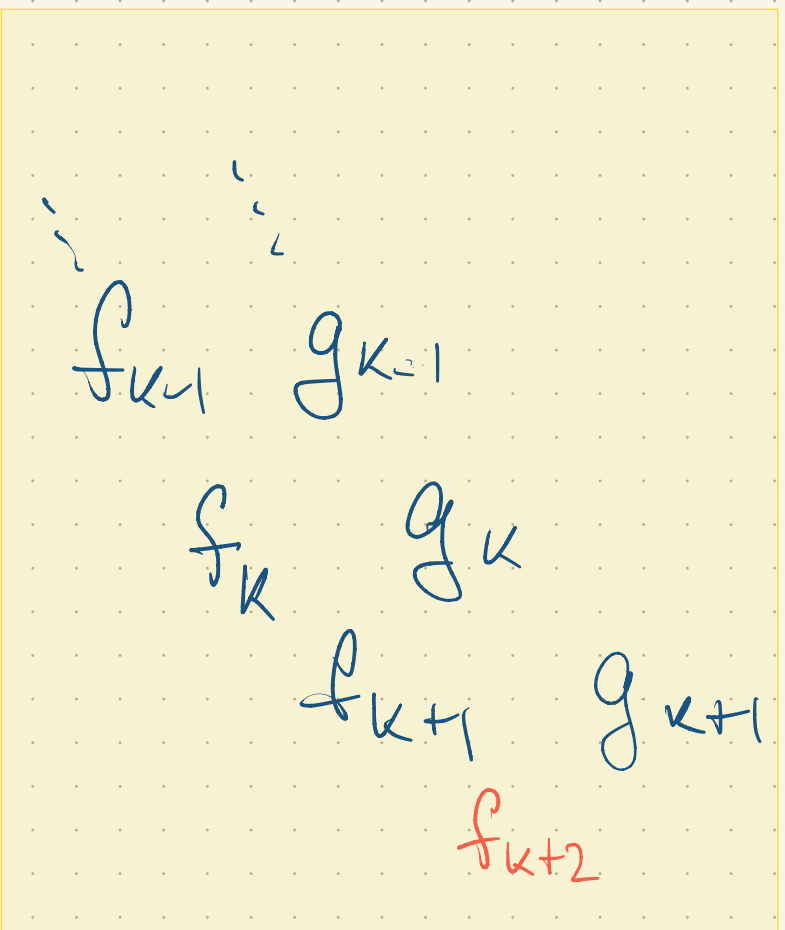
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & f_1 \end{matrix}$

$k=1$:

$$f_2 + f_0 = f_1 \cdot a_1$$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & f_1 & a_1 \\ & f_1 & f_2 \end{matrix}$

Шаг: Обозначим g_i = элементы следующей диагонали



По индукции знаем (*)
(**)

Нужно доказать:

3) Обозначим элементы фриза:

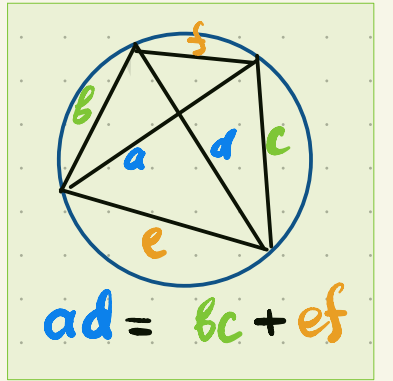


Докажите, что

$$f_{k+1} + f_{k-1} = f_k \cdot a_k$$

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: Индукция по k:

База: $k=0$

$$f_1 + f_{-1} = f_0 \cdot a_0$$

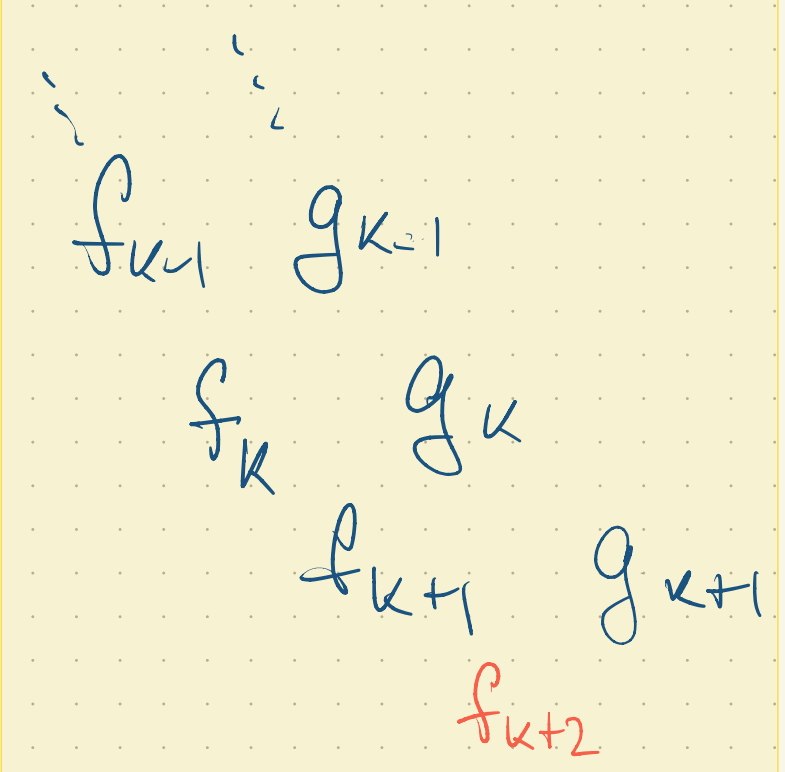
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & f_1 \end{matrix}$

$k=1$:

$$f_2 + f_0 = f_1 \cdot a_1$$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & f_1 \\ & f_2 \end{matrix} \quad a_1$

Шаг: Обозначим g_i = элементы следующей диагонали



По индукции знаем (*) $f_{k+1} = f_k \cdot a_k - f_{k-1}$

(**) $g_{k+1} = g_k \cdot a_{k+1} - g_k$

Нужно доказать: $f_{k+2} + f_k = f_{k+1} \cdot a_{k+1}$

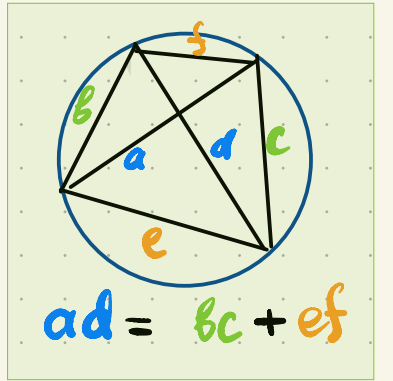
3) Обозначим элементы фриза:



Докажите, что
 $f_{k+1} + f_{k-1} = f_k \cdot a_k$

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: Индукция по k:

База: $k=0$

$$f_1 + f_{-1} = f_0 \cdot a_0$$

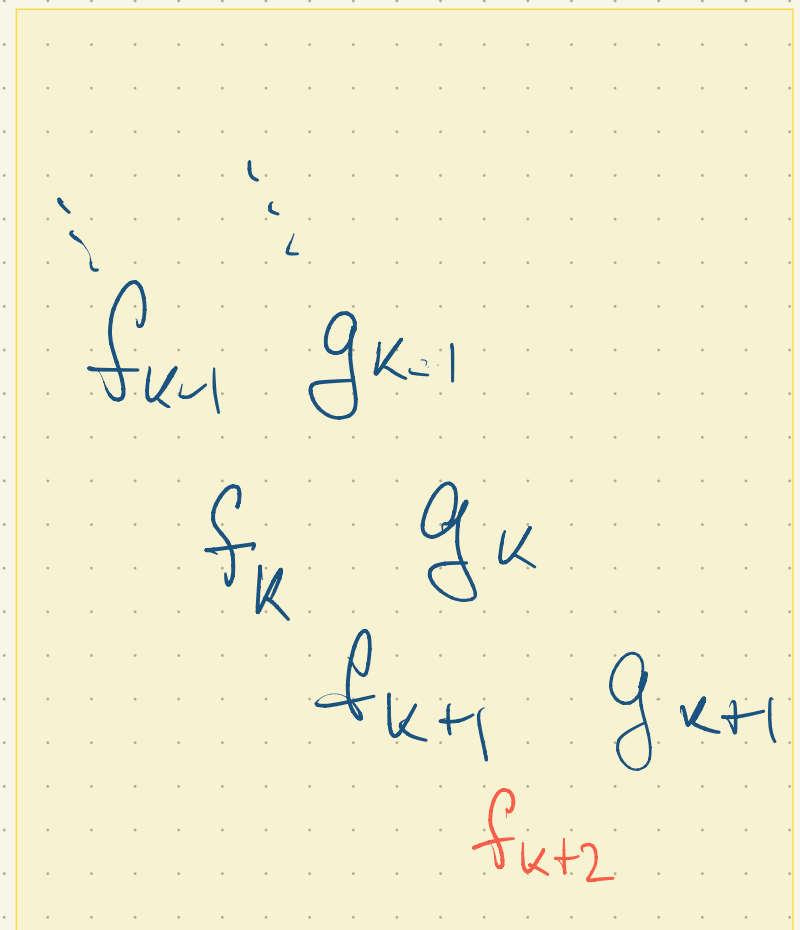
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & f_1 \end{matrix}$

$k=1$:

$$f_2 + f_0 = f_1 \cdot a_1$$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ f_1 & a_1 \\ f_2 & \end{matrix}$

Шаг: Обозначим g_i = элементы следующей диагонали



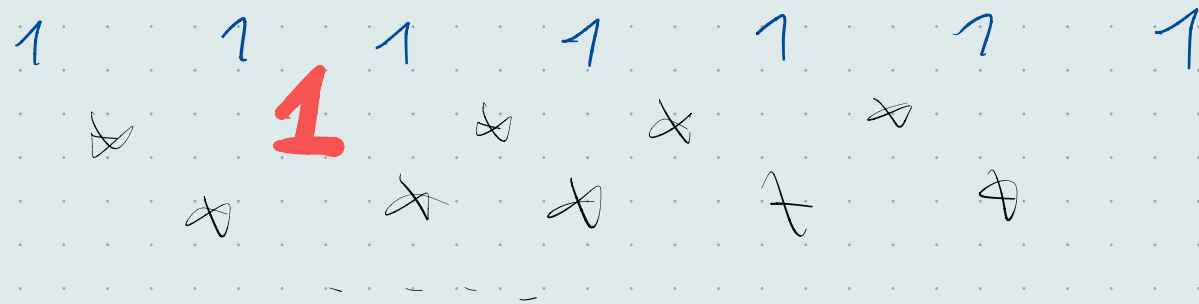
По индукции знаем (*) $f_{k+1} = f_k \cdot a_k - f_{k-1}$
 (**) $g_{k+1} = g_k \cdot a_{k+1} - g_{k-1}$

Нужно доказать: $f_{k+2} + f_k = f_{k+1} \cdot a_{k+1}$

По правилу фриз: $f_{k+1} \cdot g_{k+1} - f_{k+2} \cdot g_k = 1$

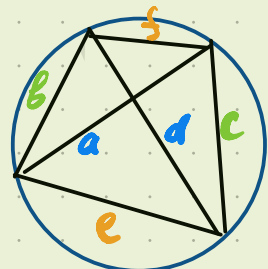
$$\begin{aligned} f_{k+2} &= \frac{f_{k+1} \cdot g_{k+1} - 1}{g_k} \stackrel{(**)}{=} \frac{f_{k+1} \cdot (g_k \cdot a_{k+1} - g_{k-1}) - 1}{g_k} \\ &= f_{k+1} \cdot a_{k+1} - \frac{f_{k+1} \cdot g_{k-1} - 1}{g_k} = f_{k+1} \cdot a_{k+1} - f_k \end{aligned}$$

4 Покажите, что суть целого положительного фрейза конечной ширины содержит хотя бы одну единицу



$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

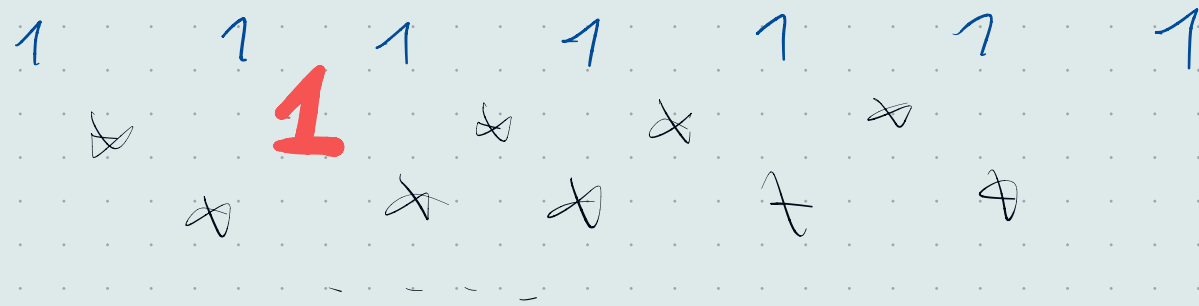


$$ad = bc + ef$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & \dots & \end{matrix}$$

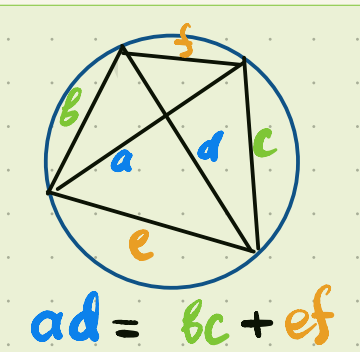
$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

4 Покажите, что суть целого положительного фрезе конечной ширины содержит хотя бы одну единицу



$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: Предположим, что все $a_i \geq 2$

Тогда

$$f_{k+1} = a_k f_k - f_{k-1} \geq 2f_k - f_{k-1} = f_k + (f_k - f_{k-1})$$

Т.е., если $f_k > f_{k-1}$, то $f_{k+1} > f_k$

Так $f_0 = 1$, $f_1 = a_0 \geq 2$, то по индукции получаем,
что $f_0 < f_1 < f_2 < f_3 < \dots$

Т.е. ни для какого $m > 0$ $f_m \neq 1$,
что противоречит конечной ширине фрезе.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & \ddots & \end{matrix}$$

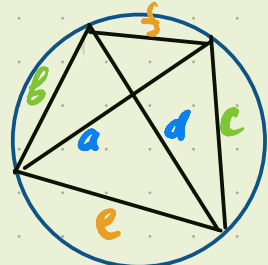
$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

5

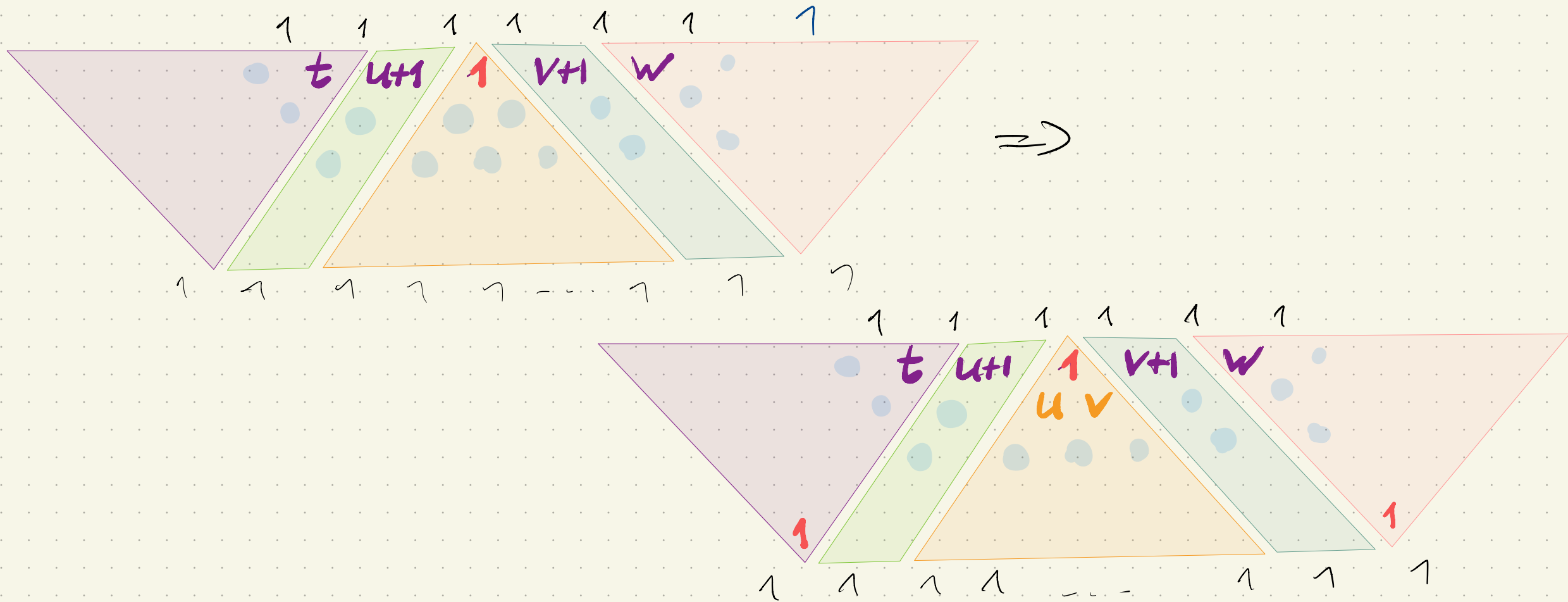
Что происходит около единицы в суте?
 Покажите, что $u, v > 0$ и что

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ f_2 & & & & \\ f_3 & & & & \\ \vdots & & & & \end{matrix}$$

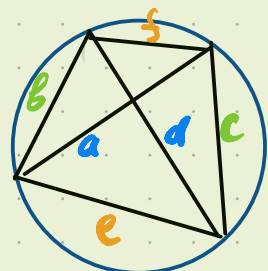
$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

5

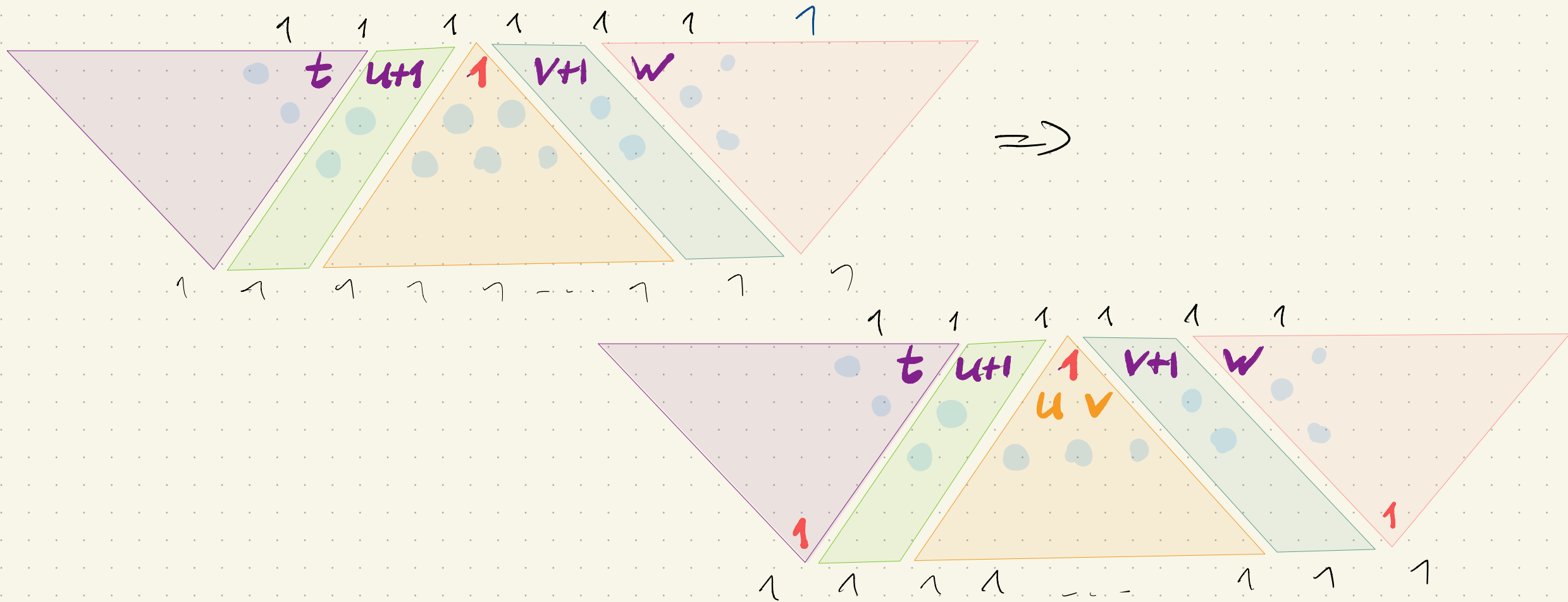
Что происходит около единицы в сути?
Покажите, что $u, v > 0$ и что

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



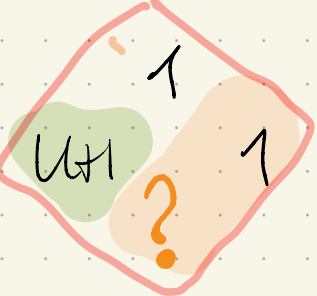
$$ad = bc + ef$$



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & f_4 & \end{matrix}$$

$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

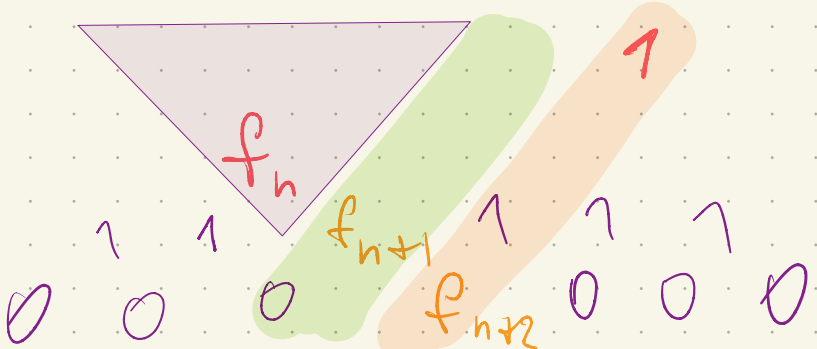
Решение: $u, v > 1$ По задаче 2 (в сути нет двух единиц подряд)



$$\Rightarrow u+1 \cdot 1 - ? \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow ? = u$$

1 в нижнем углу:

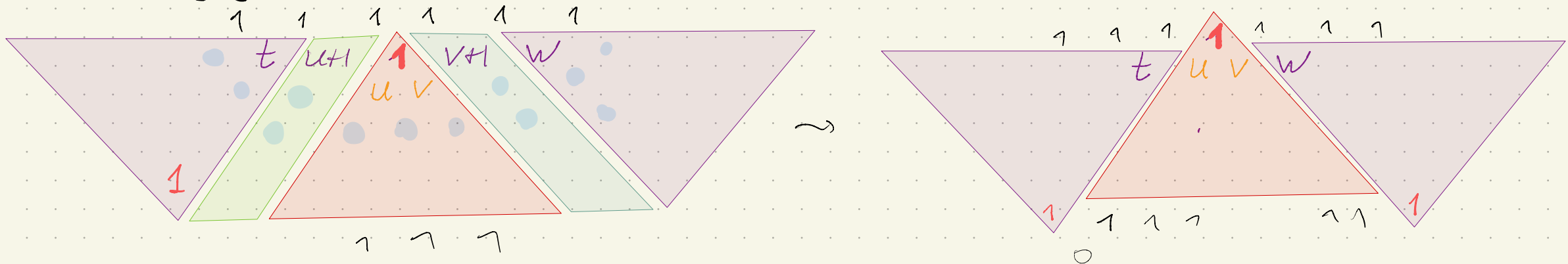


$$f_n + f_{n+2} = a_{n+1} \cdot f_{n+1}$$

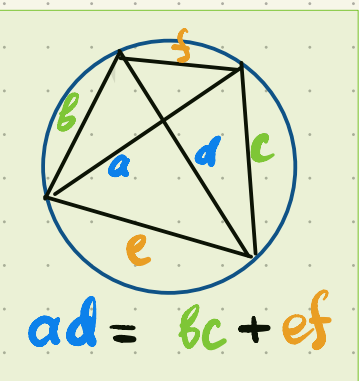
Т.е. $f_n = 1$

6

Покажите, что из фриз ширины n можно сделать фриз ширины $n-1$ следующим образом:

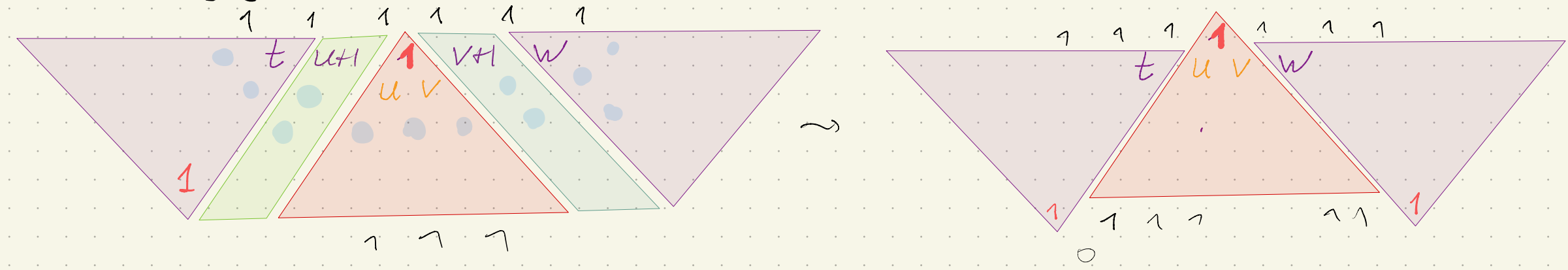


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$
$$ad - bc = 1$$



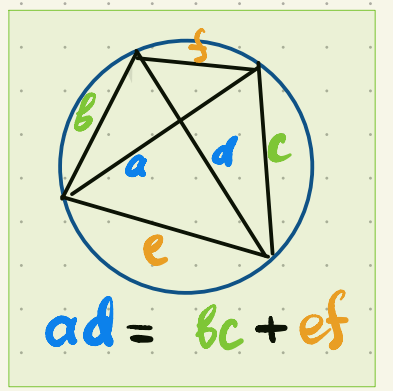
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & \ddots & \end{matrix}$$
$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

6 Покажите, что из фриза ширины n можно сделать фриз ширины $n-1$ следующим образом:

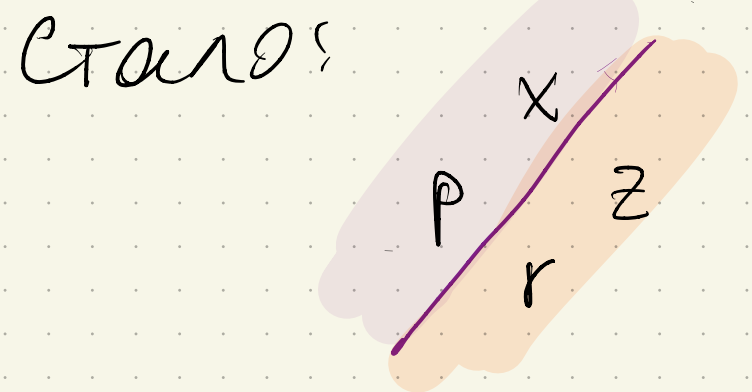
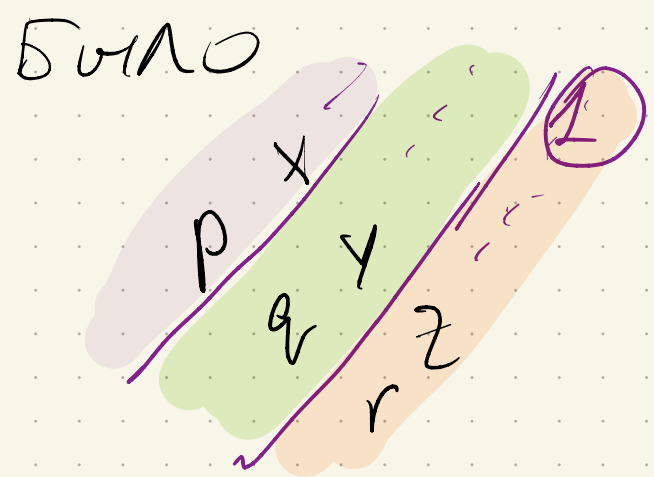


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: Нужно проверить, что выполнено правило фриза на стыке областей:

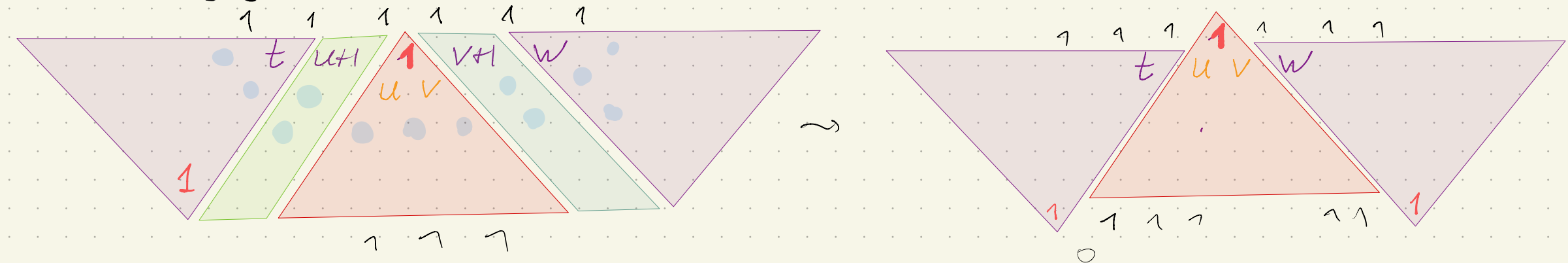


$$pz - rx \stackrel{?}{=} 1$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & f_4 & \end{matrix}$$

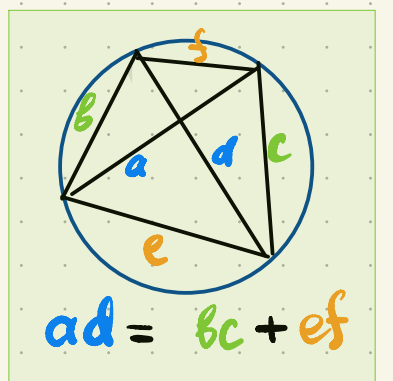
$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

6 Покажите, что из фриза ширины n можно сделать фриз ширины $n-1$ следующим образом:

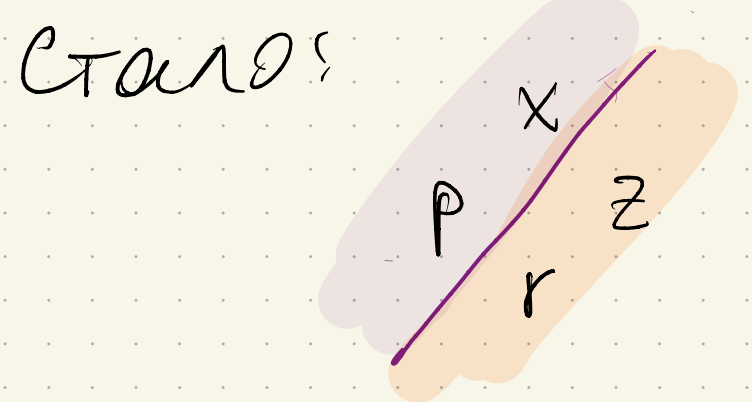
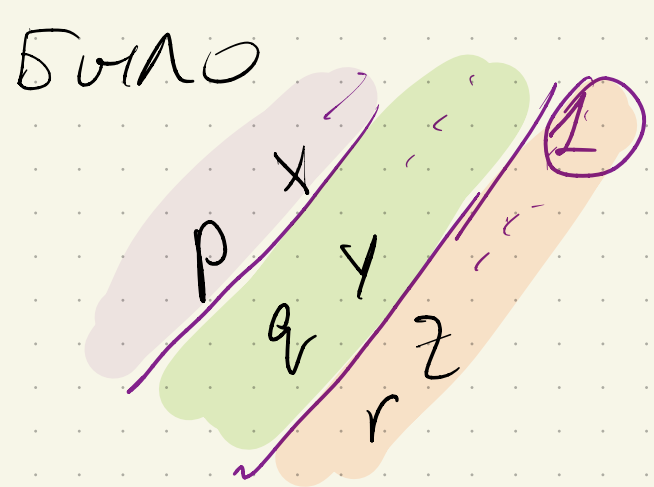


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



Решение: Нужно проверить, что выполнено правило фриза на стыке областей:



$$pz - rx \stackrel{?}{=} 1$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & f_2 & & & \\ & & f_3 & & \\ & & & f_4 & \end{matrix}$$

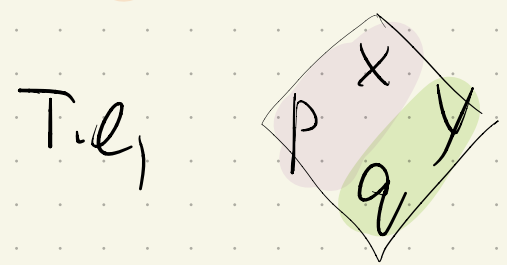
$$f_{k+1} + f_{k-1} = a_k f_k$$

Знаем:

$$f_{k+1} + f_{k-1} = f_k \cdot a_k$$

$$p + r = q \cdot 1$$

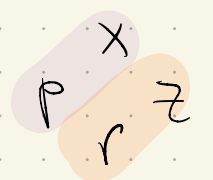
$$x + z = y \cdot 1$$



$$\begin{matrix} x+z & & p+r \\ || & & || \\ p & y & - q & x = 1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$p(x+z) - (p+r)x = 1 \Rightarrow$$

$$pz - rx = 1 \Rightarrow$$

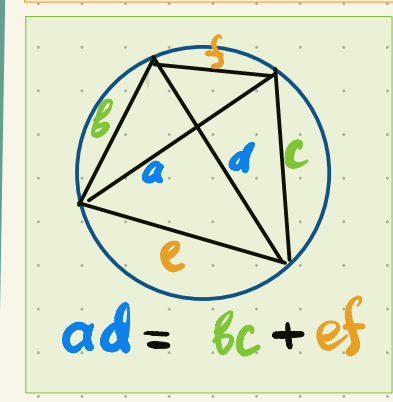


7 Пользуясь индукцией докажите, что все целые
 Фризы ширины n получаются
 из триангулированных $(n+3)$ -угольников;

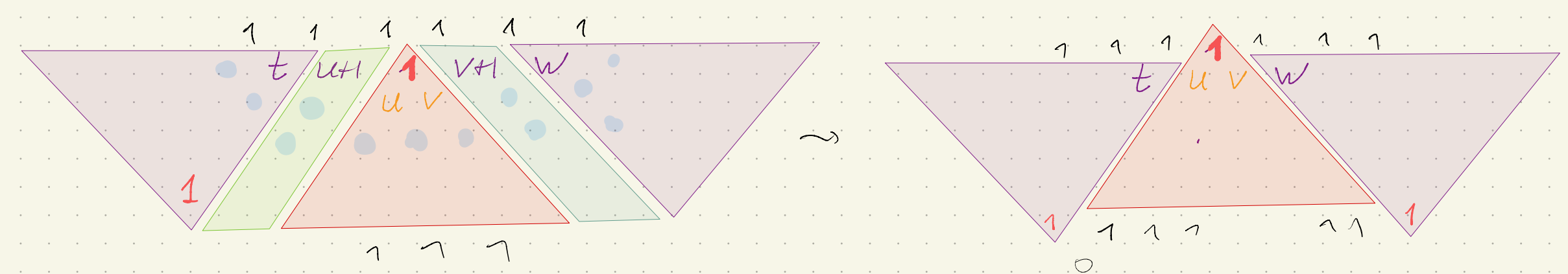


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

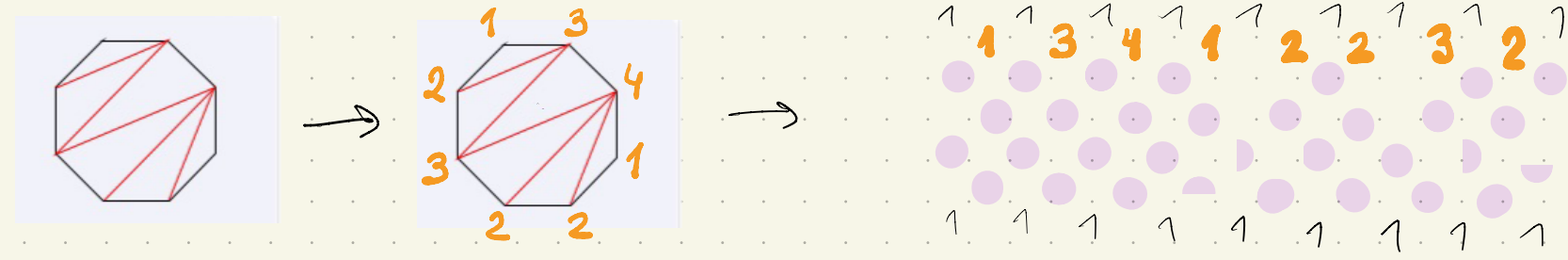
$$ad - bc = 1$$



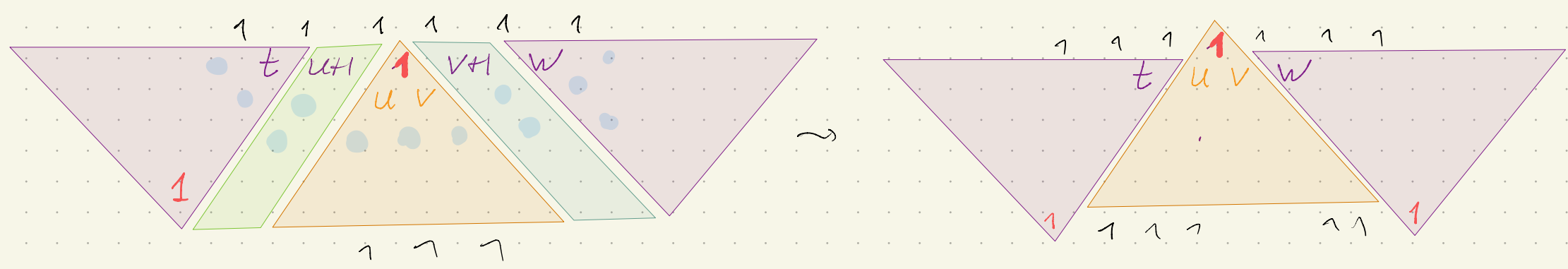
Чему соответствует операция



7 D-тб: все фриз ширины n получаются из триангулированных $(n+3)$ -угольников:

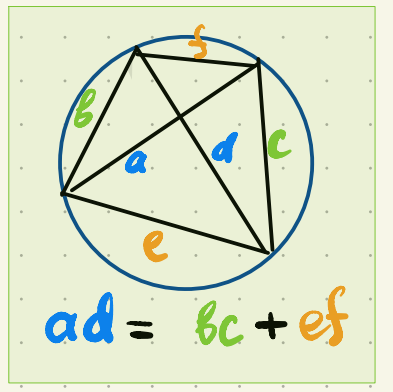


Чему соответствует операция:

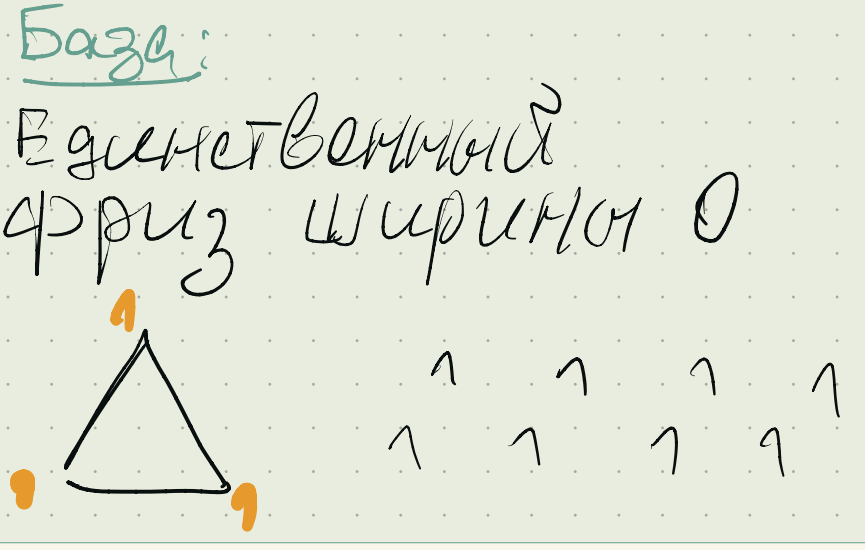


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

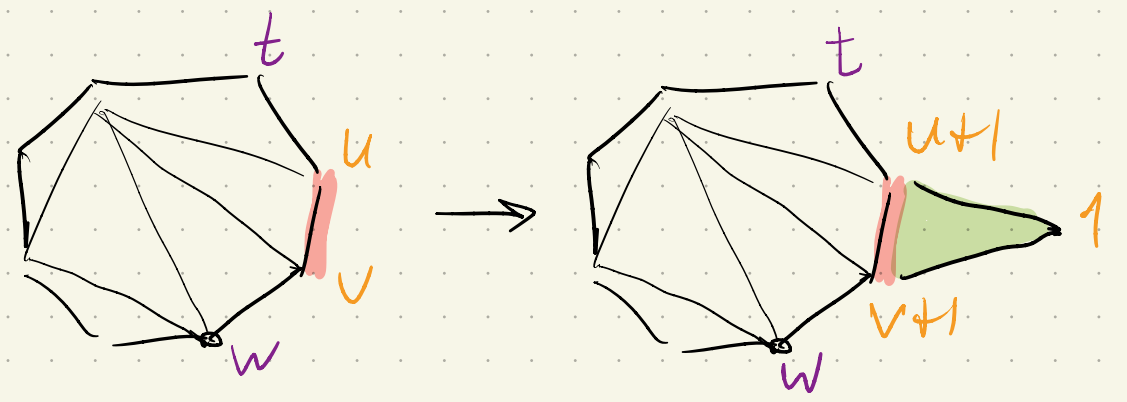
$$ad - bc = 1$$



Решение: Индукция по n . Шаг: В сути фриз ширины $n+1$ возьмем 1



- Построим фриз ширины n , применив "операцию".
- По предположению индукции, получившийся фриз ширины n можно получить из триангулированного $(n+3)$ -угольника. Отметим на его границе сторону, соответствующую "красной" единице, и приклеим по ней дополнительный треугольник — $УХО$.



- Построим "новый" фриз по этому $(n+4)$ -угольнику. Это суть совпадает с сутью исходного фриз.
- Значит, исходный фриз получается из этой триангуляции $(n+4)$ -угольника.
- А операция соответствует **ОТРЕЗАНИЮ** **УХА**

