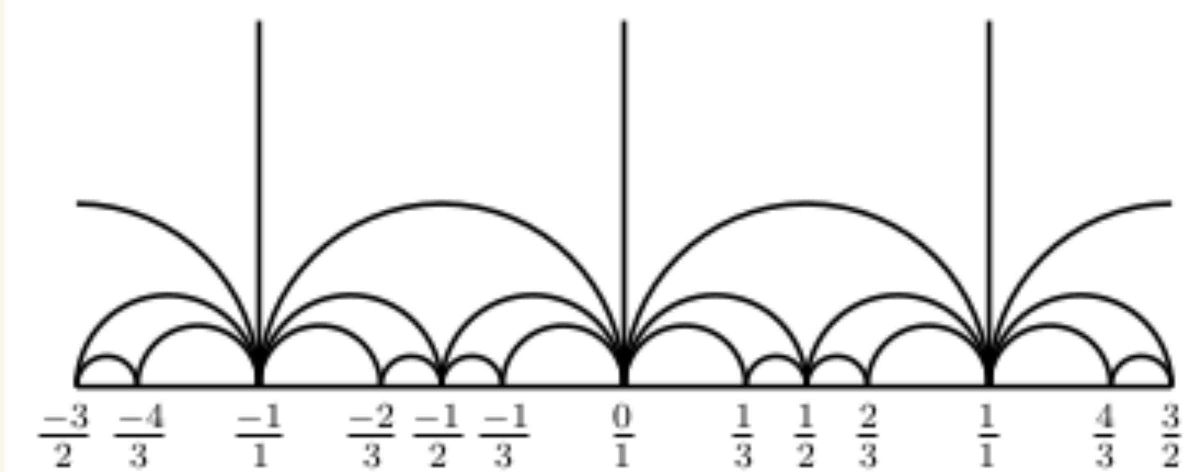
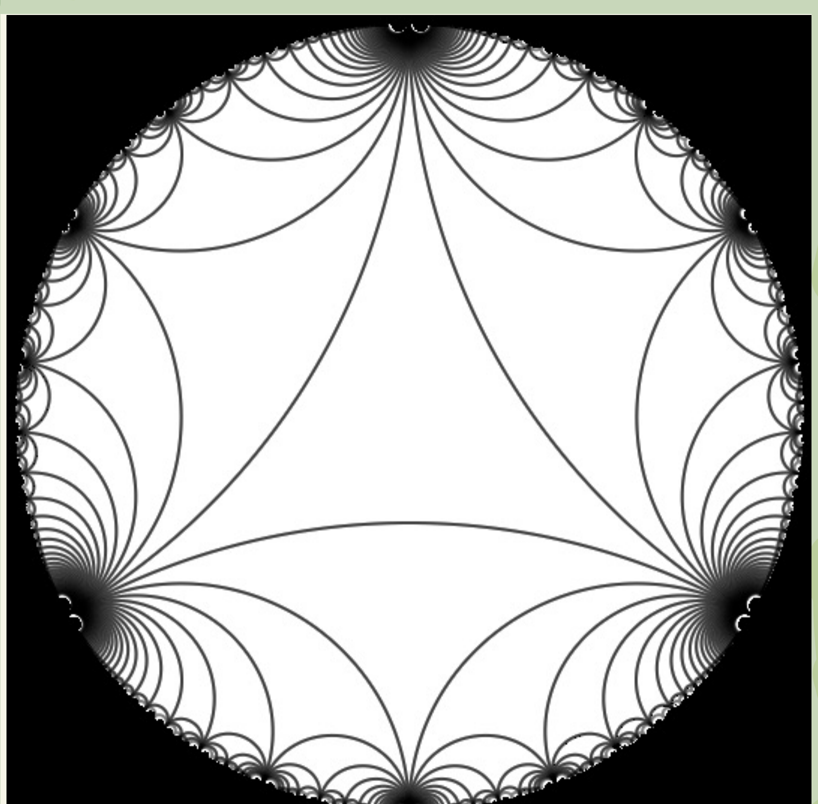
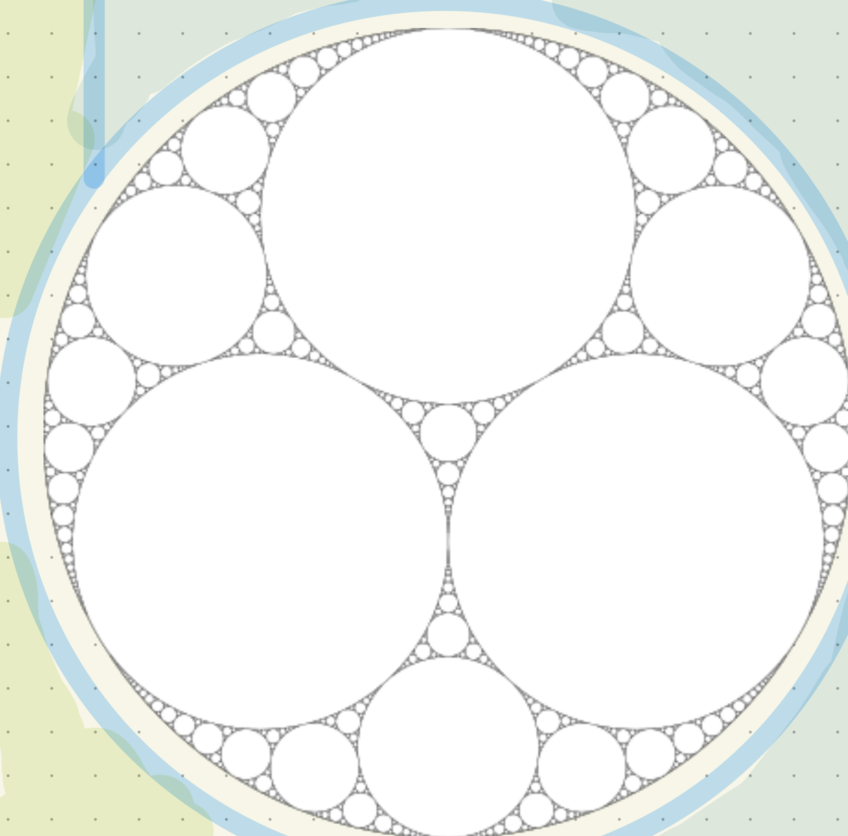
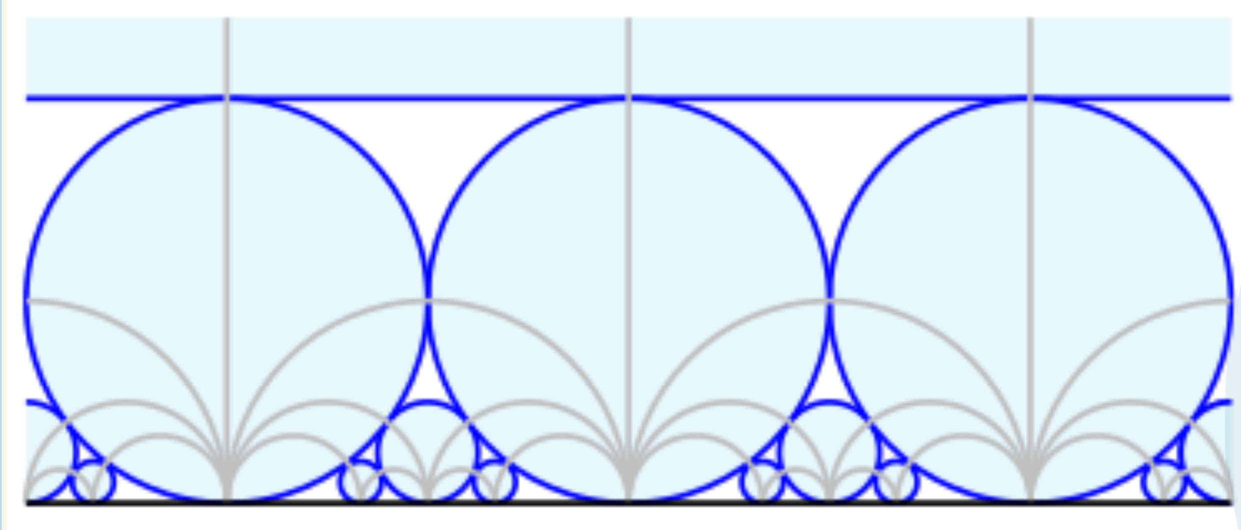
15 | Фризы, граф Фарея и окружности Форда

1		1		1		1		1		1		1		1		1		…
	1		2		4		1		2		4		1		2		4	
3		1		7		3		1		7		3		1		7		…
	2		3		5		2		3		5		2		3		5	
3		5		2		3		5		2		3		5		2		…
	7		3		1		7		3		1		7		3		1	
2		4		1		2		4		1		2		4		1		…
	1		1		1		1		1		1		1		1		1	









Фризы Конвея-Коксетера:

- Таблицы чисел

(1) по краям ряды единиц

(0) еще дальше - ряды нулей
(их часто не пишут)

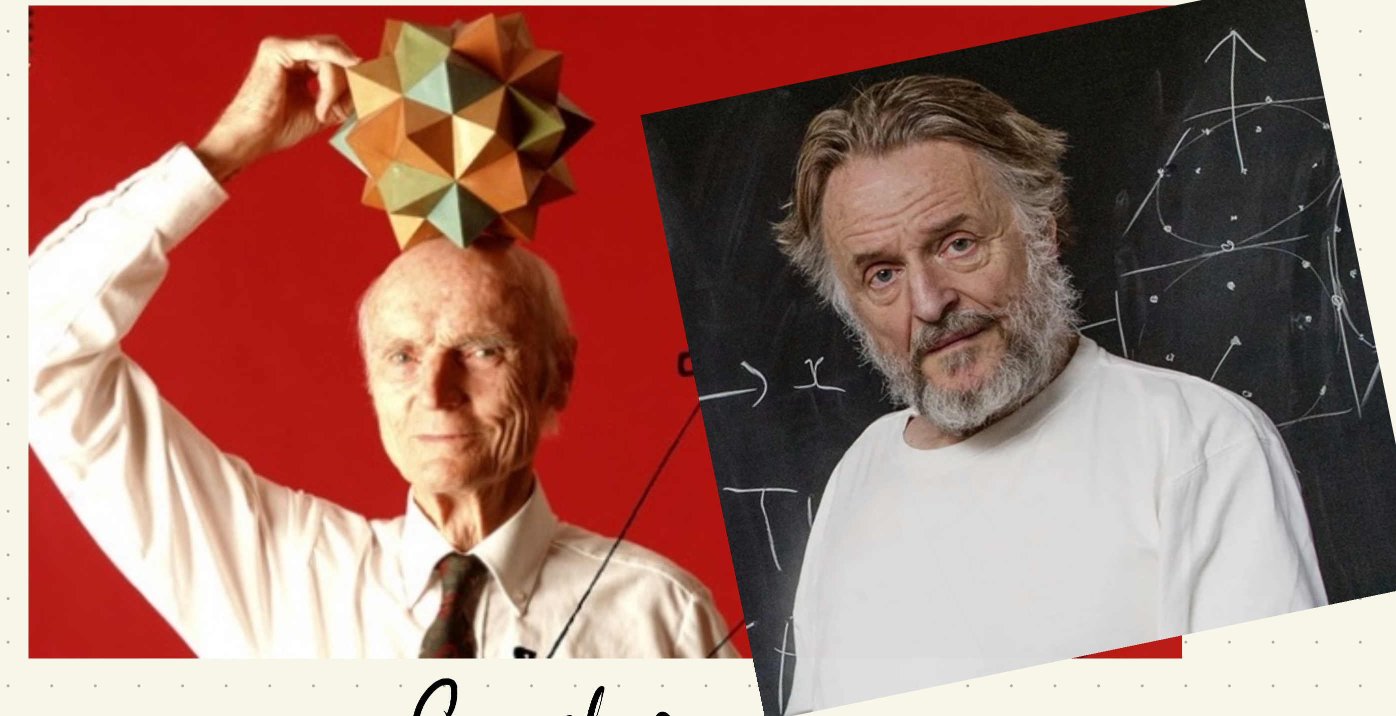
		0		0		0		0		0		
	1		1		1		1		1		1	
...		1		3		1		3		1		...
	2		2		2		2		2		2	
...		3		1		3		1		3		...
	1		1		1		1		1		1	
		0		0		0		0		0		

ширина n

(◇) Числа в малых ромбах удовлетворяют арифметическому правилу

$$a \, {}^{b}_{c} \, d$$

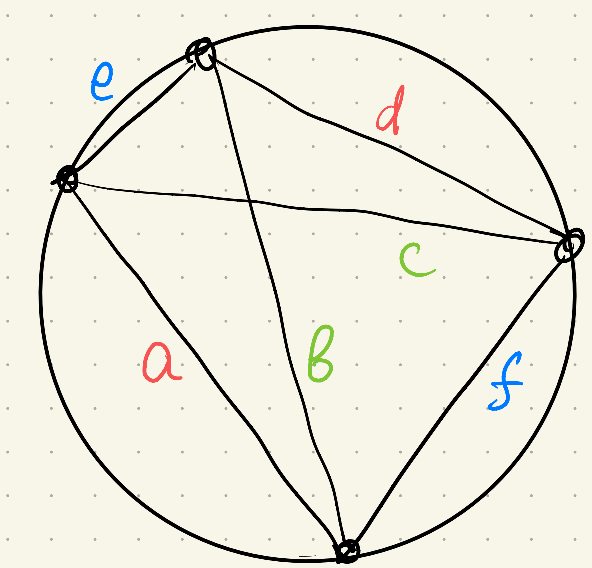
$$ad - bc = 1$$



Coxeter 1907-2003

1937-2020 Conway

Теорема Птолемея



$$bc = ad + ef$$

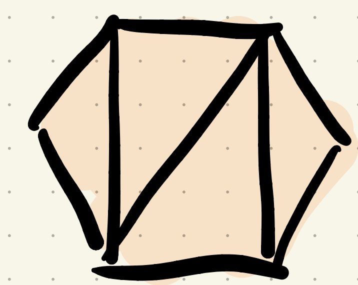
Теорема Конвея – Кокстера:

Целые положительные фризы ширины n $\xleftrightarrow[\text{соответствуют}]{\text{взаимно-однозначно}}$ триангулированным $(n+3)$-угольникам

Пример:

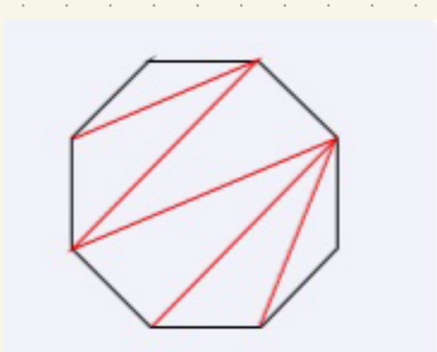
	1		1		1		1		1		1	
...		1		2		3		1		2		...
	2		1		5		2		1		5	
...		1		2		3		1		2		...
	1		1		1		1		1		1	

$\longleftrightarrow$

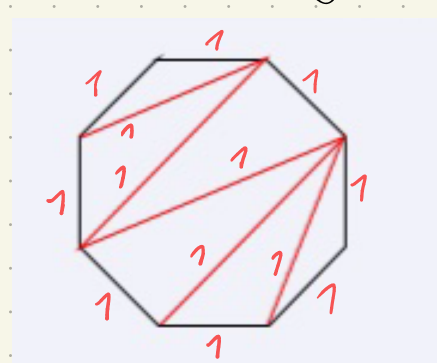


Как построить фриз по триангуляции:

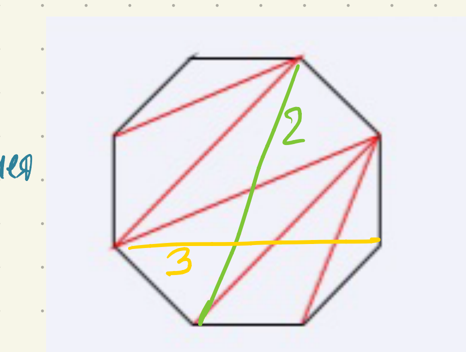
A:



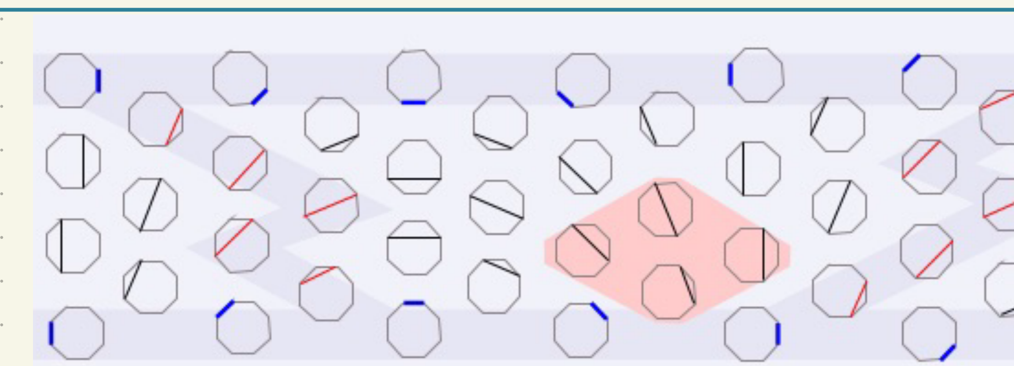
$\rightarrow$



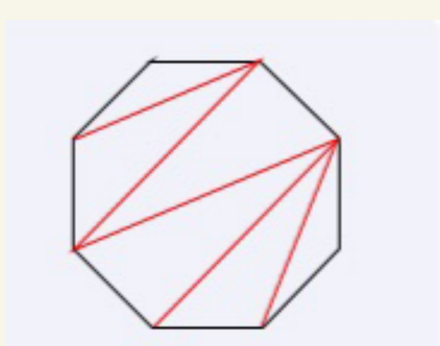
$\xrightarrow{\text{Т. Птолемея}}$



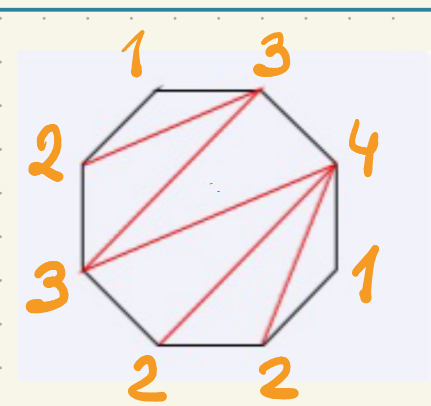
$\rightarrow$



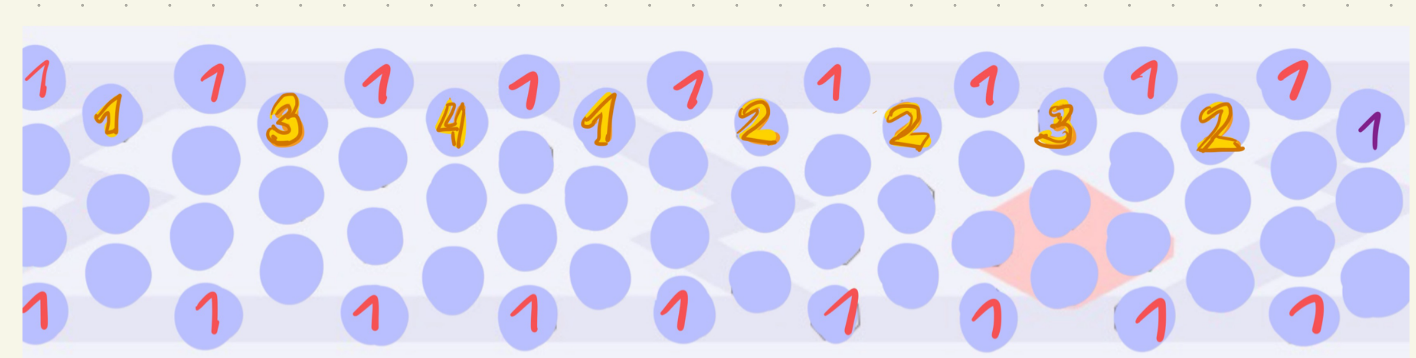
B:



$\rightarrow$



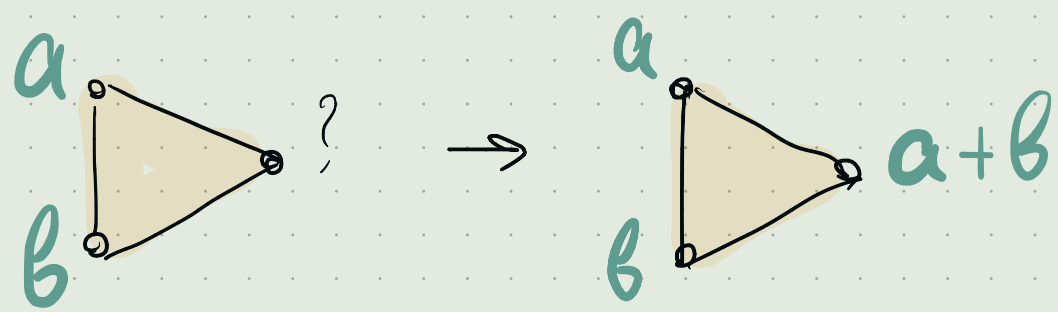
$\rightarrow$

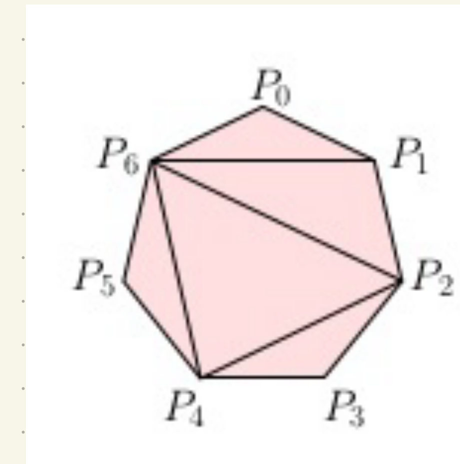


Разминка: Подсчет Конвея - Кокстера

"длина" P_iP_j

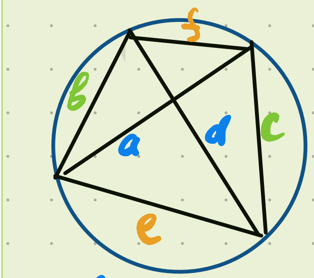
Покажите, что элемент фриза u_{ij} можно найти так:

- Поставим 0 около P_i и 1 около всех соседей P_i
- 



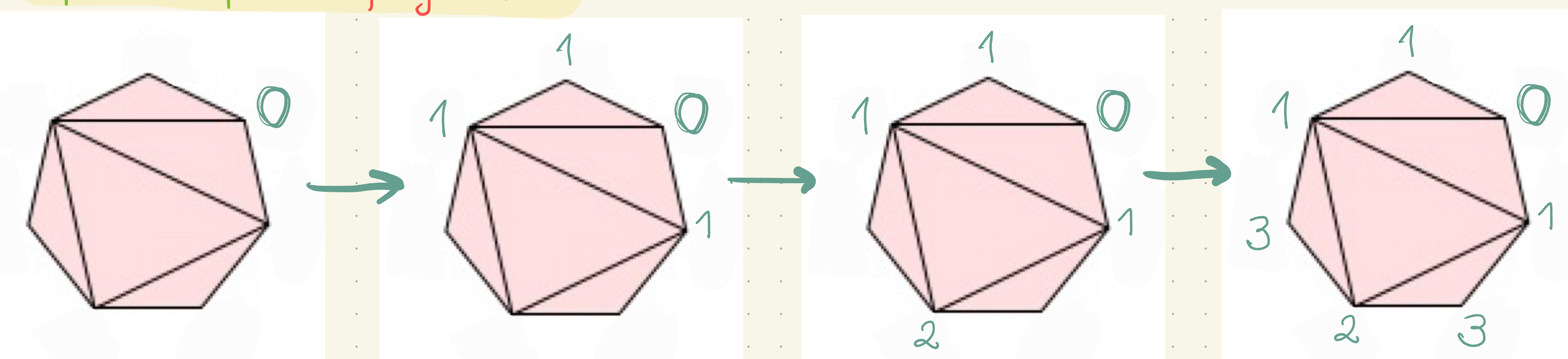
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$

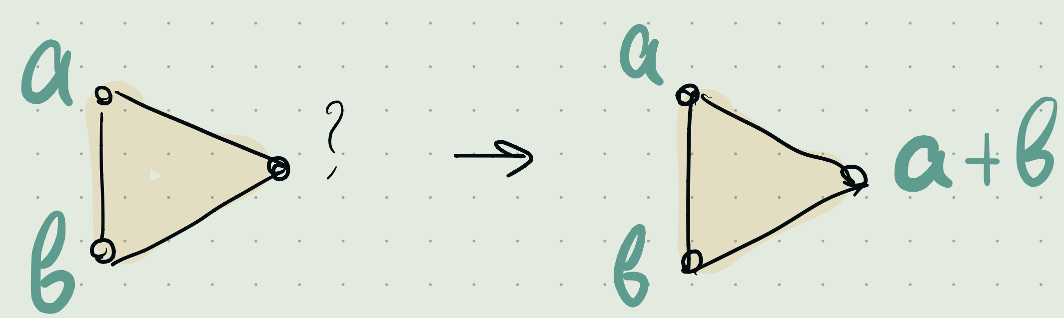
Пример: $P_1P_j = ?$



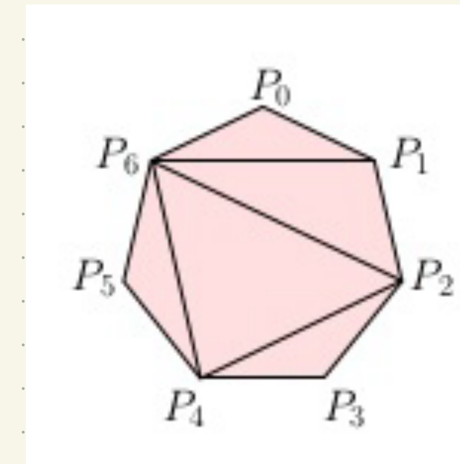
			0															
1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
	1		2		3		1		3		1		4		1		2	
3		1		5		2		2		2		3		3		1		5
	2		2		3		3		1		5		2		2		2	
1		3		1		4		1		2		3		1		3		1
	1		1		1		1		1		1		1		1		1	
										0								

Разминка: Подсчет Конвея - Кокстера

Покажите, что элемент фриза u_{ij} можно найти так:

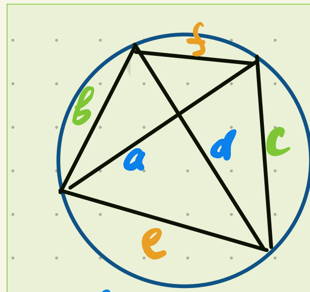
- Поставим 0 около P_i и 1 около всех соседей P_i
- 

"длина" $P_i P_j$



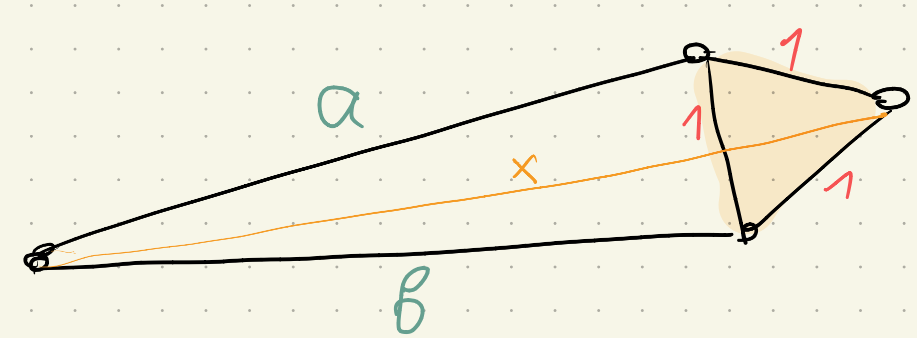
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$ad - bc = 1$



$ad = bc + ef$

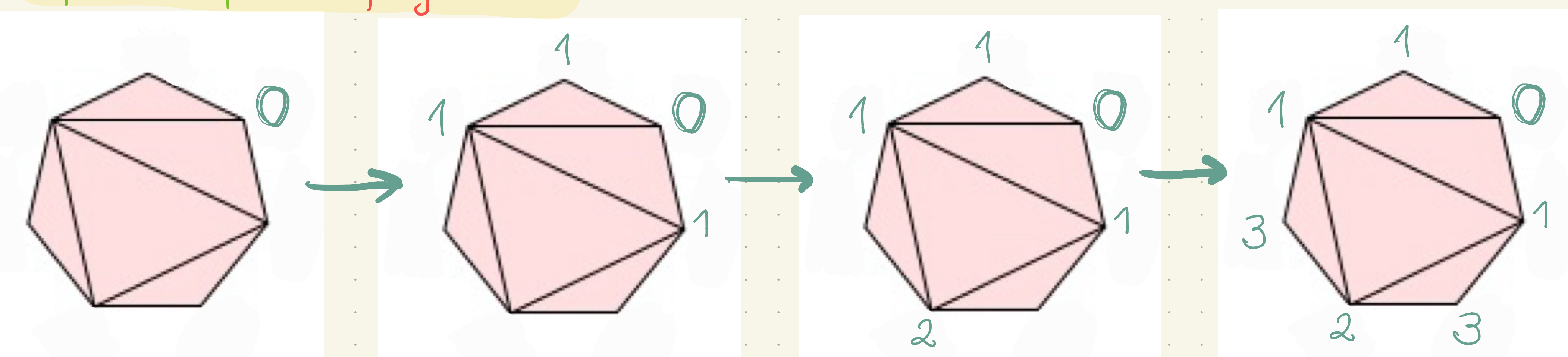
Решение:



$\Rightarrow$ $x \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1$

$x = a + b$

Пример: $P_1 P_j = ?$

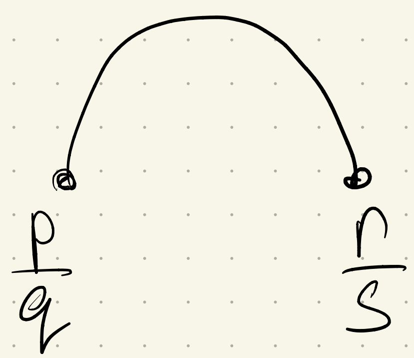


			0															
1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
	1		2		3		1		3		1		4		1		2	
3		1		5		2		2		2		3		3		1		5
	2		2		3		3		1		5		2		2		2	
1		3		1		4		1		2		3		1		3		1
	1		1		1		1		1		1		1		1		1	
										0								

Граф Фарея $\mathcal{F}$

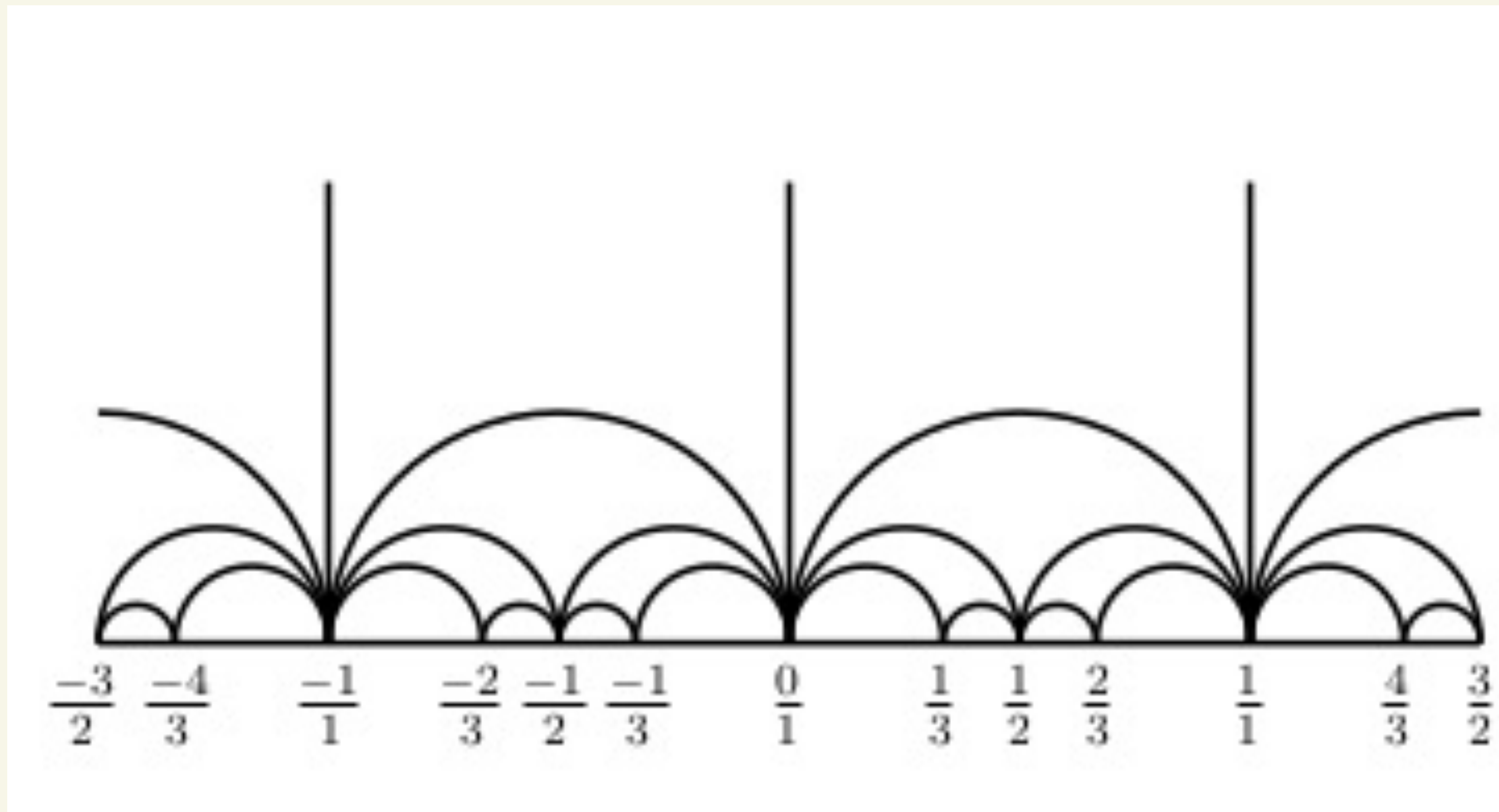
- Вершины: все рациональные числа и $\infty = \frac{1}{0}$, т.е. несократимые дроби $\frac{p}{q}$, p,q целые, $q \geq 0$

- Рёбра:



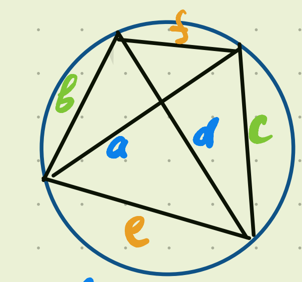
$\frac{p}{q}$ соединено с $\frac{r}{s}$, если $|ps - qr| = 1$

Изображаются полудугами окружностей:



$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$

$ad - bc = 1$

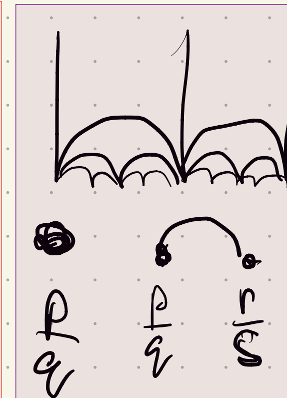


$ad = bc + ef$

1 a) Найдите все рёбра, выходящие из $\infty = \frac{1}{0}$.

b) Покажите что ни одно ребро не пересекает рёбер, выходящих из ∞.

c) Сложение Фарея:

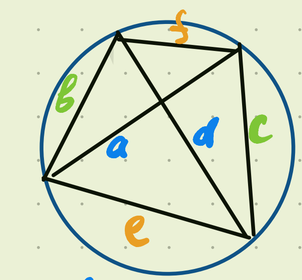


$|qr-ps|=1$

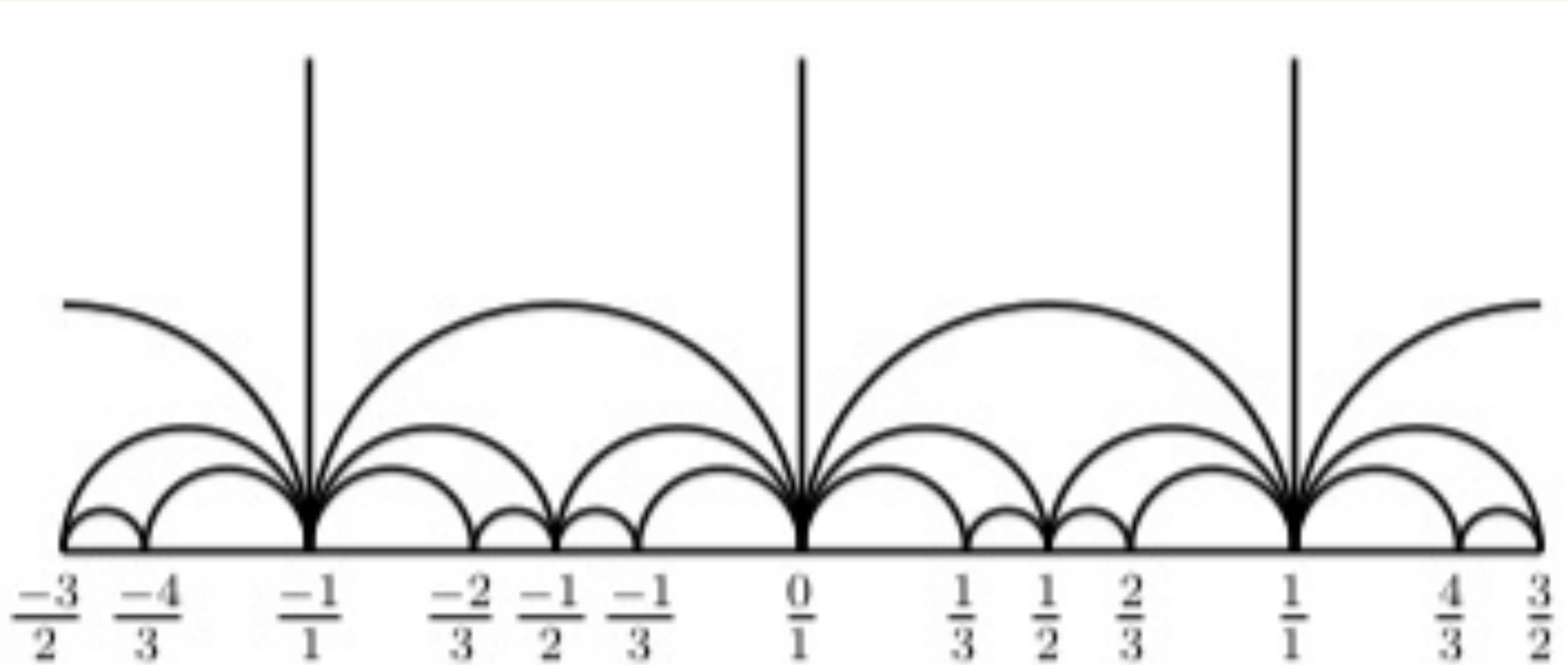
граф Фарея

$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$

$ad - bc = 1$



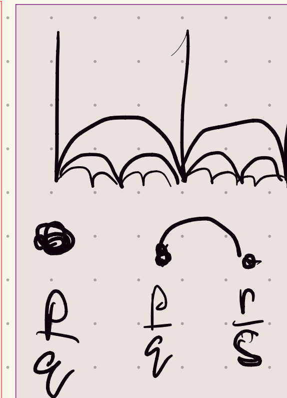
$ad = bc + ef$



1 (a) Найдите все рёбра, выходящие из $\infty = \frac{1}{0}$.

(b) Покажите что ни одно ребро не пересекает рёбер, выходящих из ∞.

(c) Сложение Фарея:

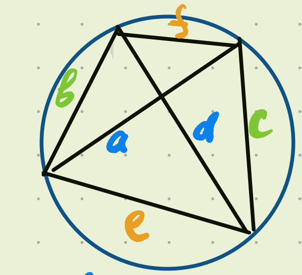


$|qr - ps| = 1$

граф Фарея

$$a \quad {}^{b} \quad {}_{c} \quad d$$

$$ad - bc = 1$$

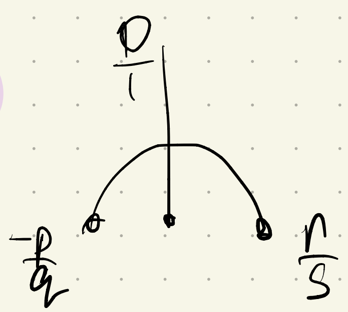


$$ad = bc + ef$$

Решение:

(a) $\frac{1}{0}$ и $\frac{p}{q}$, т.е. $q \cdot 1 - p \cdot 0 = 1 \Rightarrow q = 1$, p - любое, т.е. $\frac{p}{q} = \frac{p}{1}$

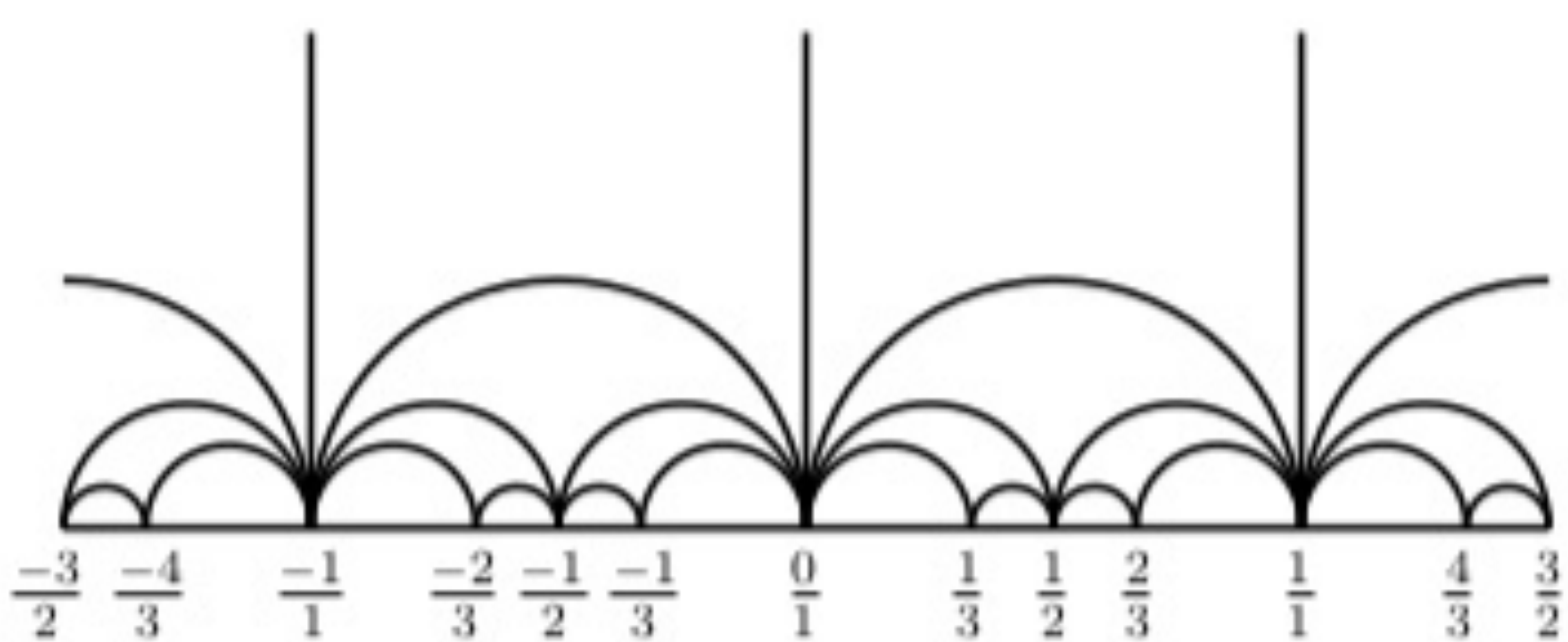
(b)



, $p, q, r, s \geq 1$

$$|q \cdot r - (-p) \cdot s| = 1$$

$$|\underbrace{q \cdot r}_{\geq 1} + \underbrace{p \cdot s}_{\geq 1}| = 1$$, что невозможно



(c) Если $qr - ps = 1$, то

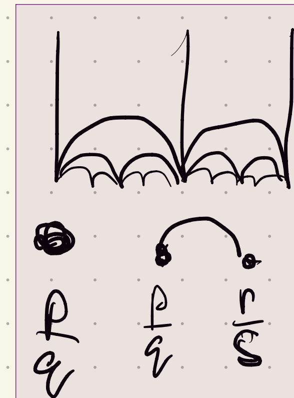
$$q(p+r) - p(q+s) = qr - ps = 1$$ и

$$(q+s) \cdot r - (p+r) \cdot s = qr - ps = 1$$

① (a) Найдите все рёбра, выходящие из $\infty = \frac{1}{0}$.

(b) Покажите что ни одно ребро не пересекает рёбер, выходящих из ∞.

(c) Сложение Фарея:

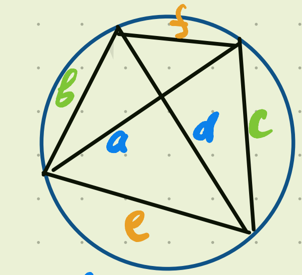


$|qr - ps| = 1$

граф Фарея

a b d
c

$ad - bc = 1$

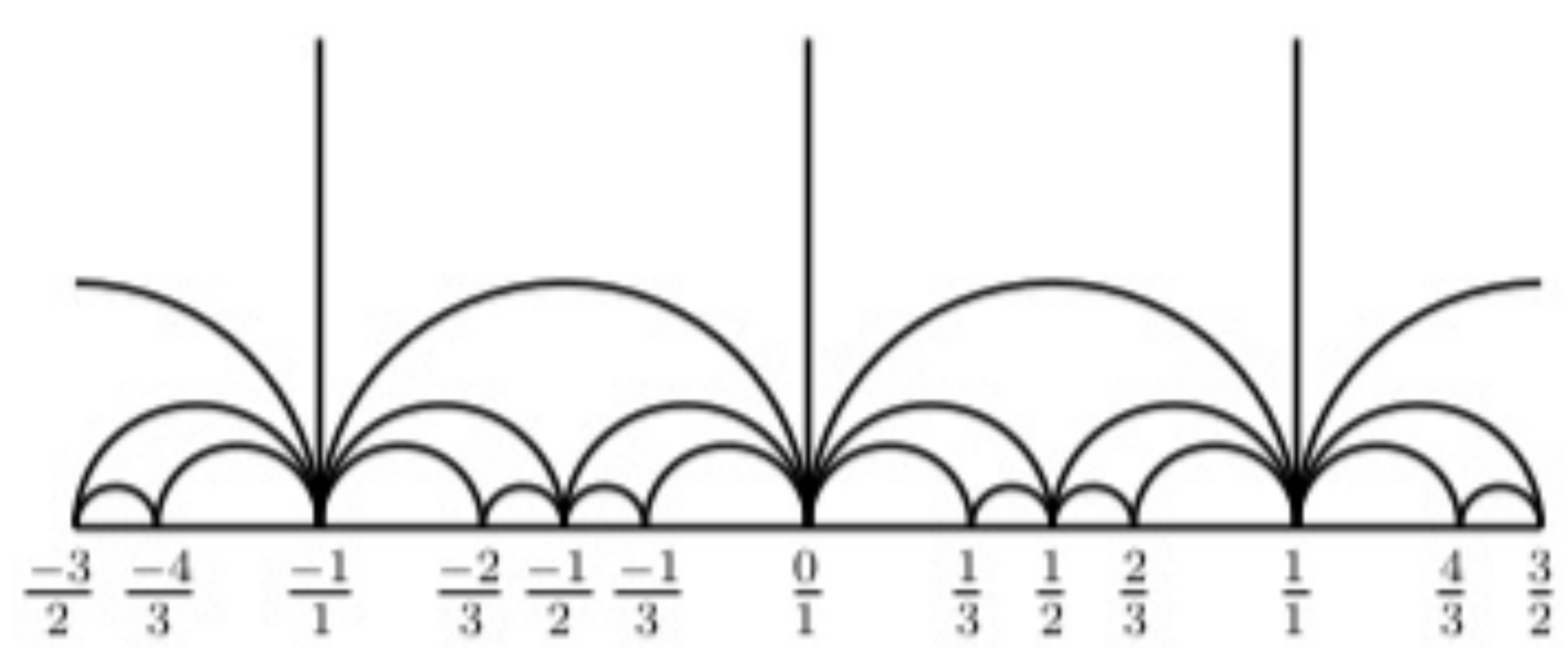


$ad = bc + ef$

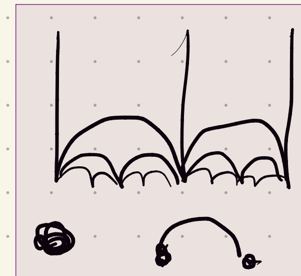
Можно показать что:

- все рёбра получаются из $\left(\frac{k}{1}; \frac{k+1}{1}\right)$ итерациями сложения Фарея

т.е. получилась "триангуляция" верхней полуплоскости [на "криволинейные" треугольники]



2. Покажите, что любой триангулированный многоугольник P можно вложить в граф Фарея $\mathcal{F}$ (так что треугольники из триангуляции P окажутся треугольниками в $\mathcal{F}$)



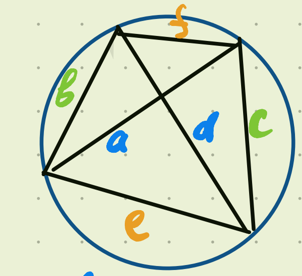
$\frac{p}{q}$ $\frac{p}{q}$ $\frac{r}{s}$

$|qr - ps| = 1$

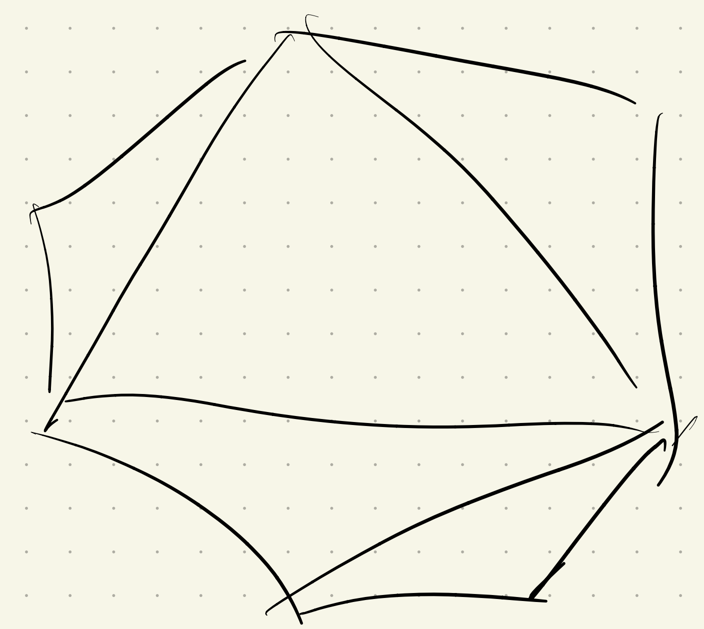
граф Фарея

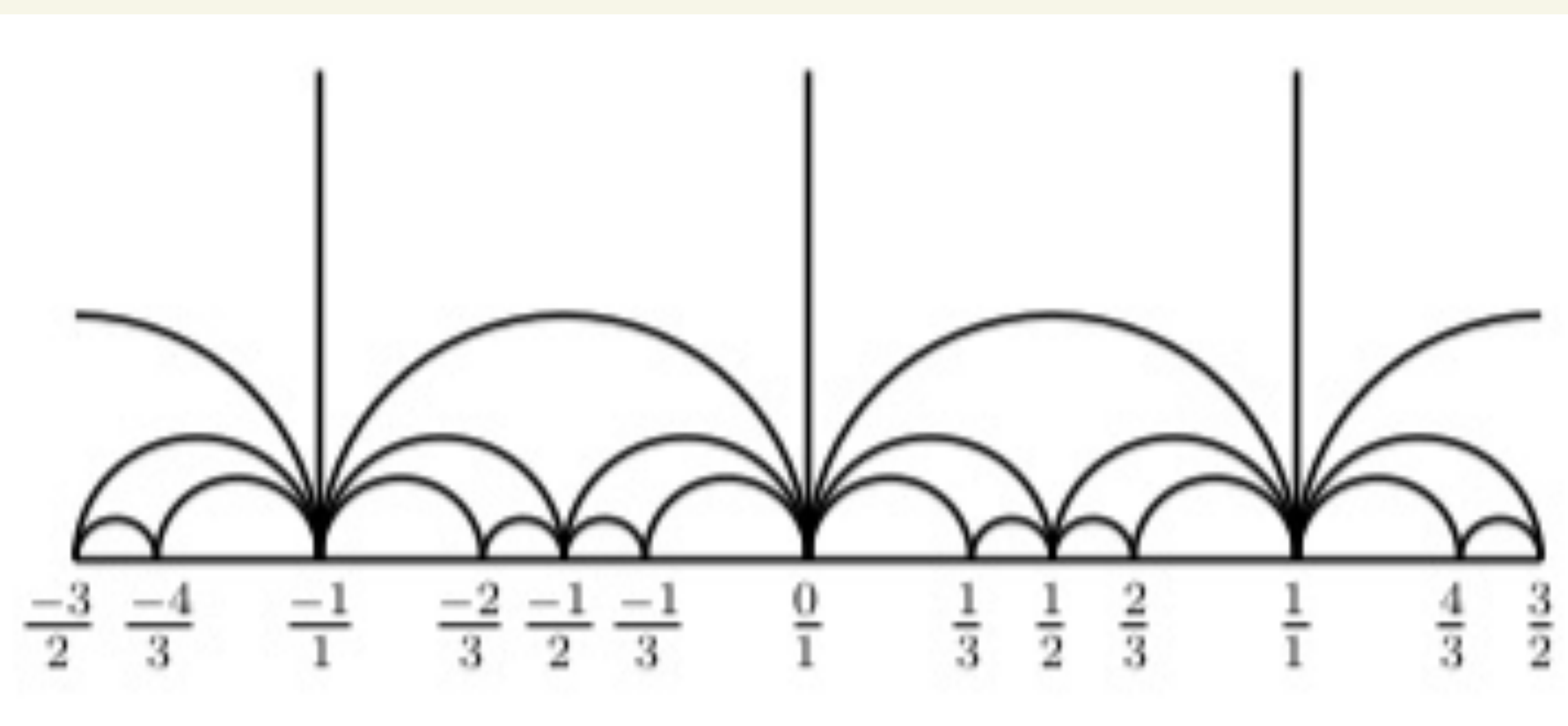
b
a d
c

$ad - bc = 1$



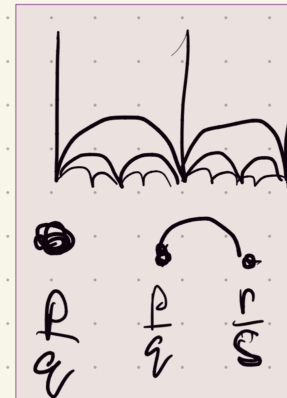
$ad = bc + ef$





② Покажите, что любой триангулированный многоугольник P можно вложить в граф Фарея F

(так что треугольники из триангуляции P окажутся треугольниками в F)

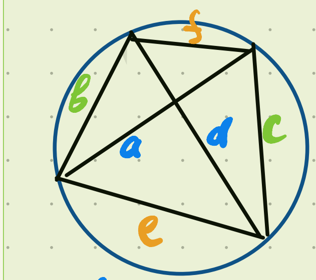


$|qr-ps|=1$

граф Фарея

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad-bc=1$$

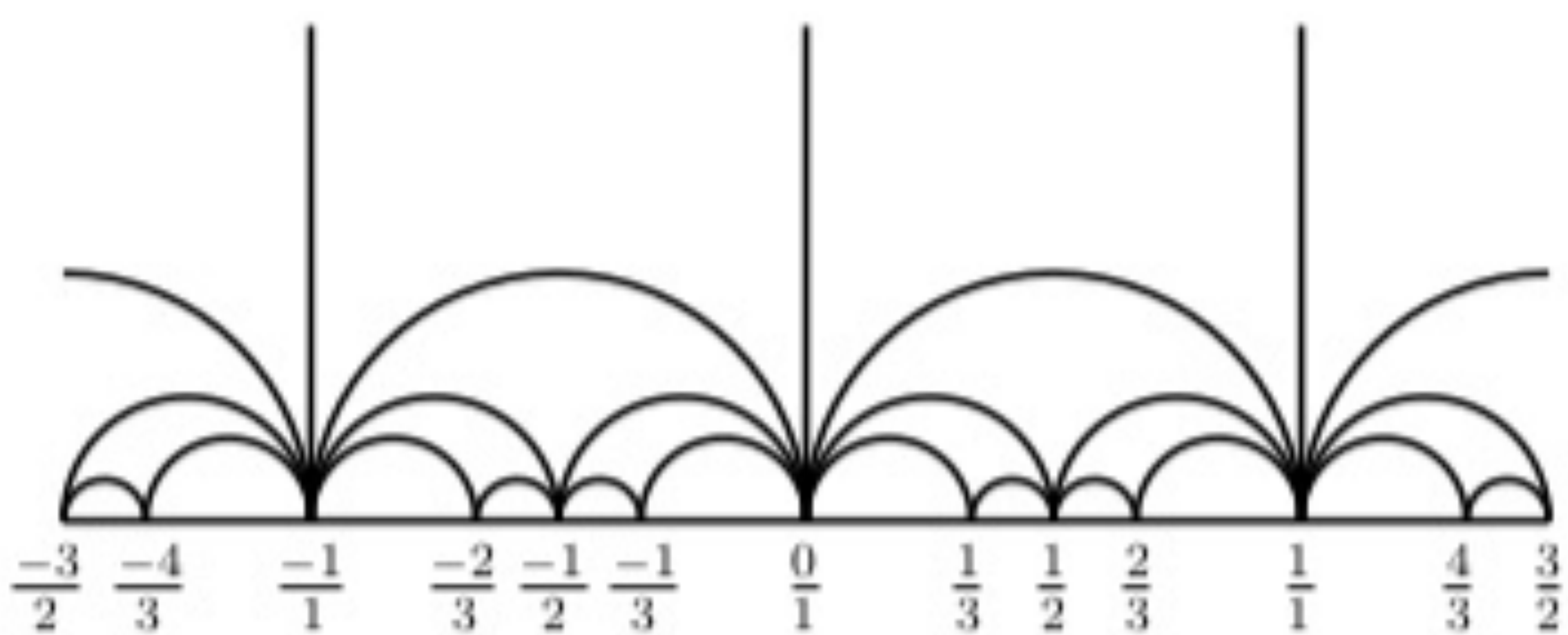


$ad = bc + ef$

Таким образом,

фризы ширины n ⟷ замкнутые пути длины $n+3$ на графе Фарея

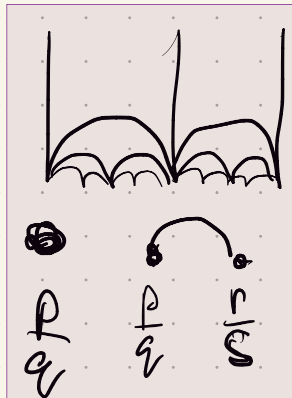
← Morier-Genoud Ovsienko Tabachnikov '15



Решение: индукция по n.

Если $(n+2)$-угольники вложили, то от $(n+3)$-угольника оторвём ухо, вложим, что осталось, и приклеем ухо обратно.

② Покажите, что любой триангулированный многоугольник P можно вложить в граф Фарея F (так что треугольники из триангуляции P окажутся треугольниками в F)

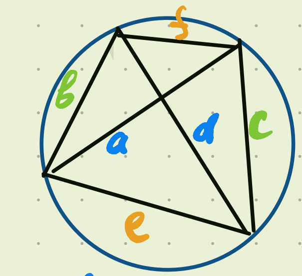


$|qr - ps| = 1$

граф Фарея

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

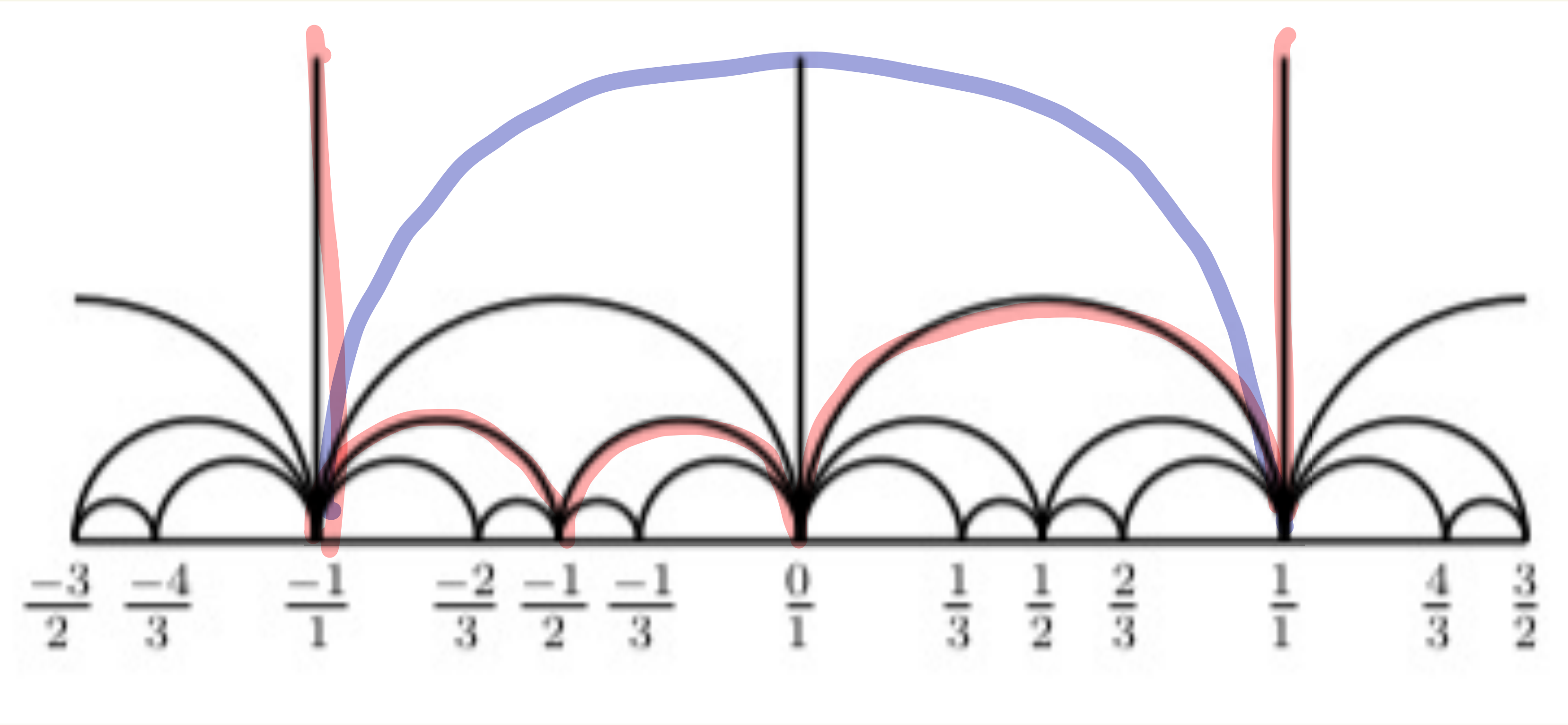
$ad - bc = 1$



$ad = bc + ef$

Таким образом,

$\boxed{\text{фризы ширины } n}$ ⟷ $\boxed{\text{замкнутые пути длины } n+3 \text{ на графе Фарея}}$ ← Morier-Genoud Ovsienko Tabachnikov '15



Можно д-ть, что

$$u_{\frac{p}{q},\frac{r}{s}} = |ps - rq|$$

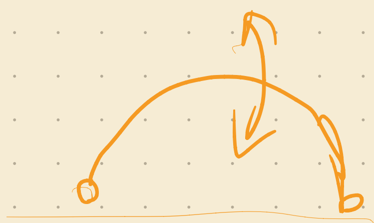
Ребра в графе Фарея – прямые на гиперболической плоскости

Можно доказать, что

- движениями гиперболической плоскости можно перевести
  - * любую вершину $\mathcal{F}$ в ∞
  - * любое ребро $\mathcal{F}$ в 0∞
  - * любой треугольник из $\mathcal{F}$ в 01∞

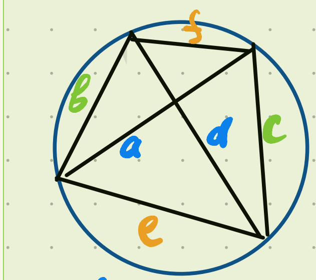
  Так, что $\mathcal{F}$ перейдет в $\mathcal{F}$

- Соседние треугольники получаются друг из друга "отражением" ← движением гиперболической плоскости, сохраняющим гип. прямую и меняющим полуплоскости

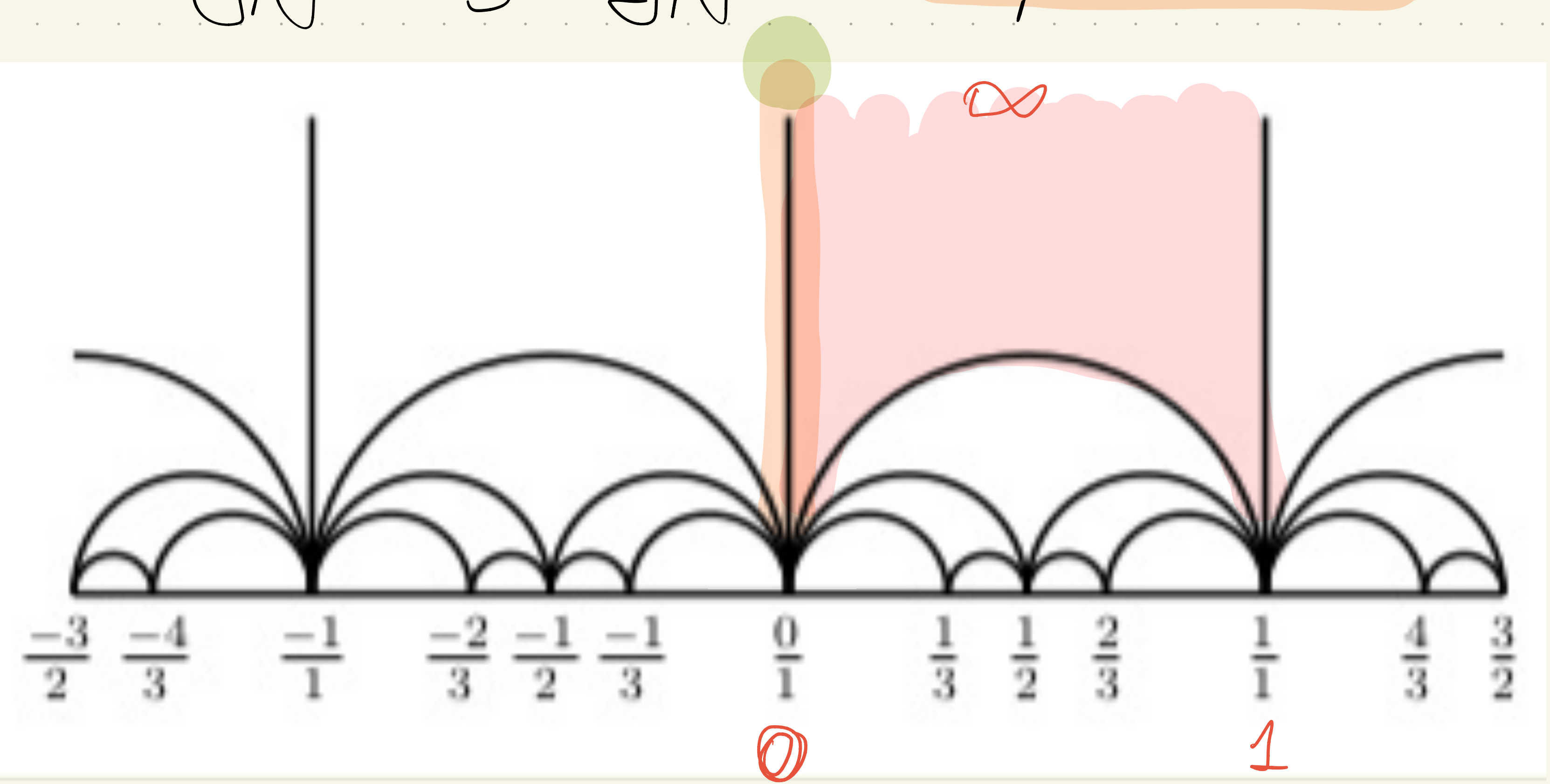


$a \; {}^{b}_{c} \; d$

$ad-bc=1$

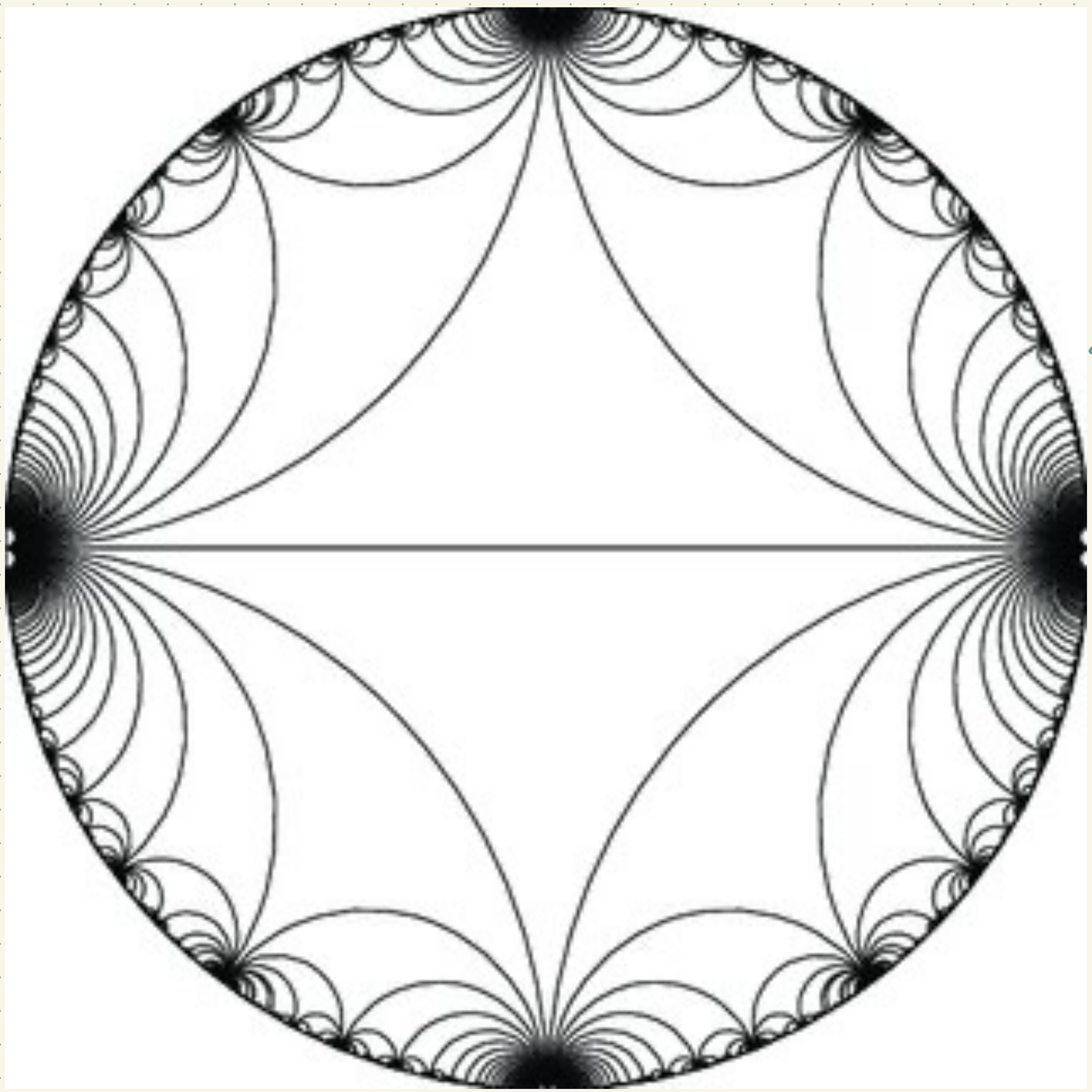


$ad = bc + ef$



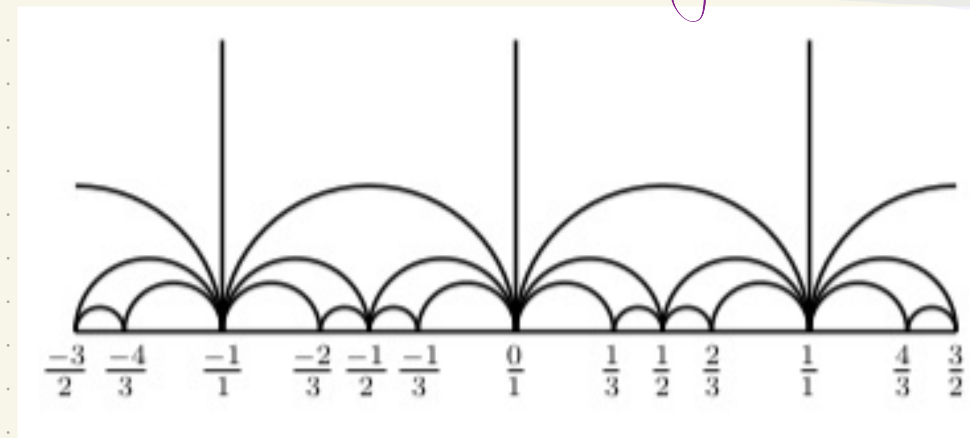
[см. Геометрический оркестрик, занятия 7–8]

Другие изображения того же графа Фарея:



Модель Пуанкаре в круге

Модель в верхней полуплоскости

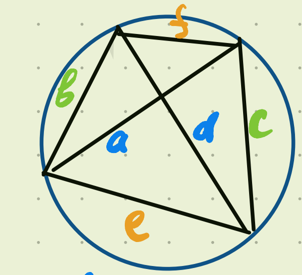


$|qr-ps|=1$

граф Фарея

$$a \quad {}^{b}_{c} \quad d$$

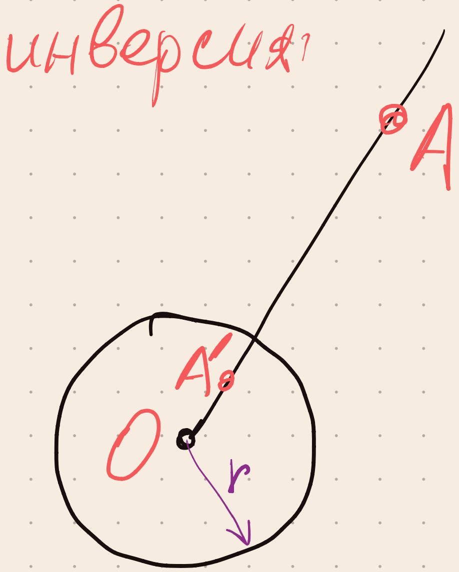
$$ad-bc=1$$



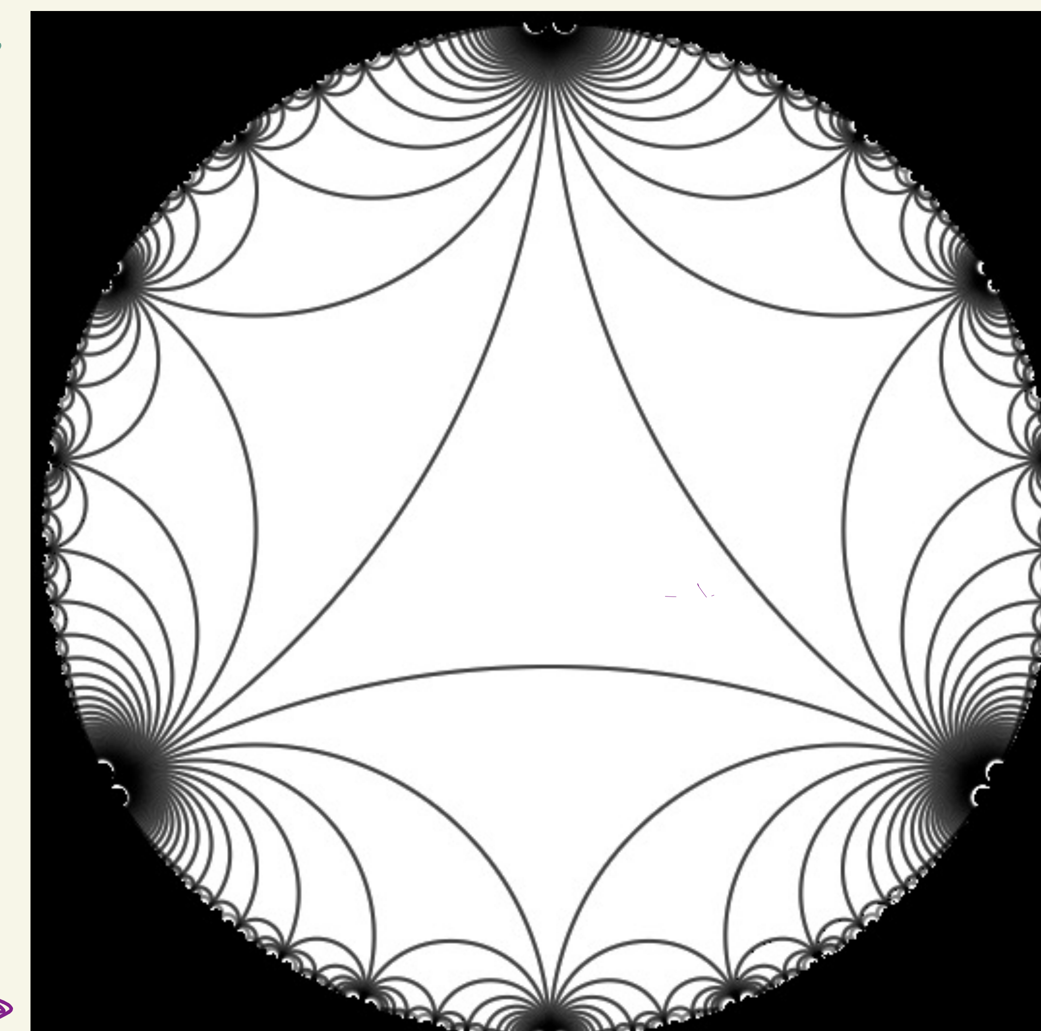
$$ad = bc + ef$$

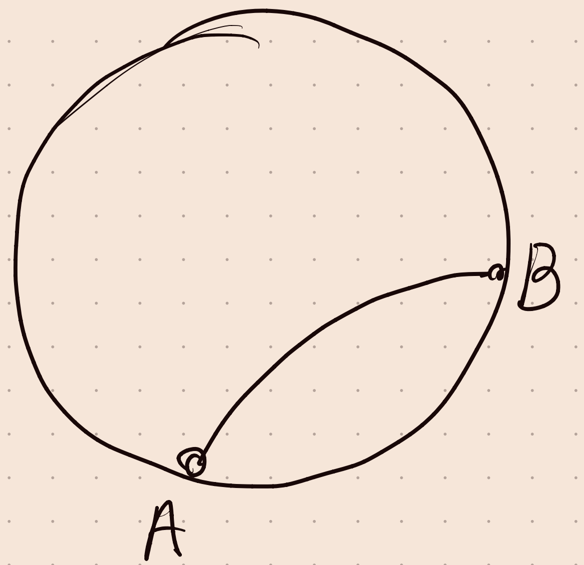
Каждая из этих картинок получается из других последовательностью инверсий

инверсия:

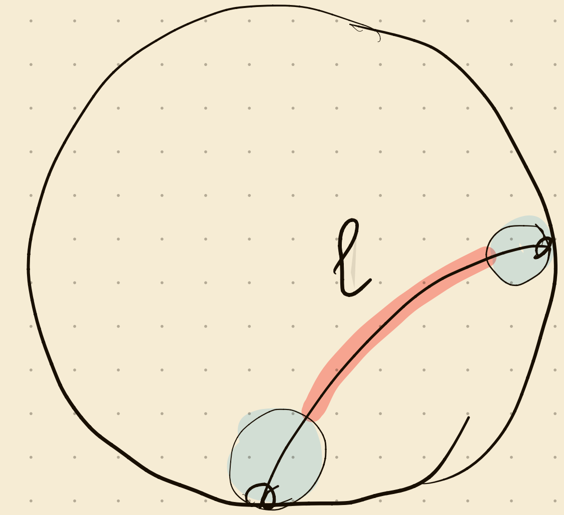


$$OA \cdot OA' = r^2$$

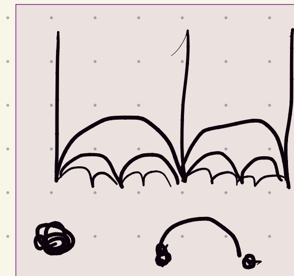




Длина AB бесконечна, но вся бесконечность сосредоточена "около" граничных точек — отделим их



останется конечное расстояние ℓ



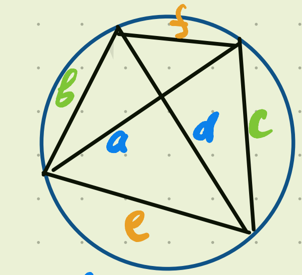
$\frac{p}{q}$ $\frac{p}{q}$ $\frac{r}{s}$

$|qr-ps|=1$

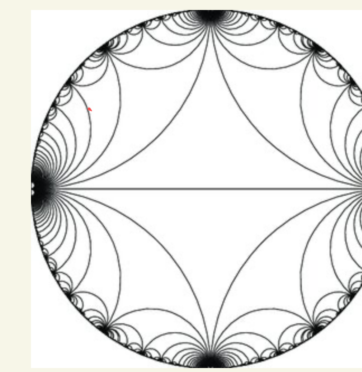
граф Фарея

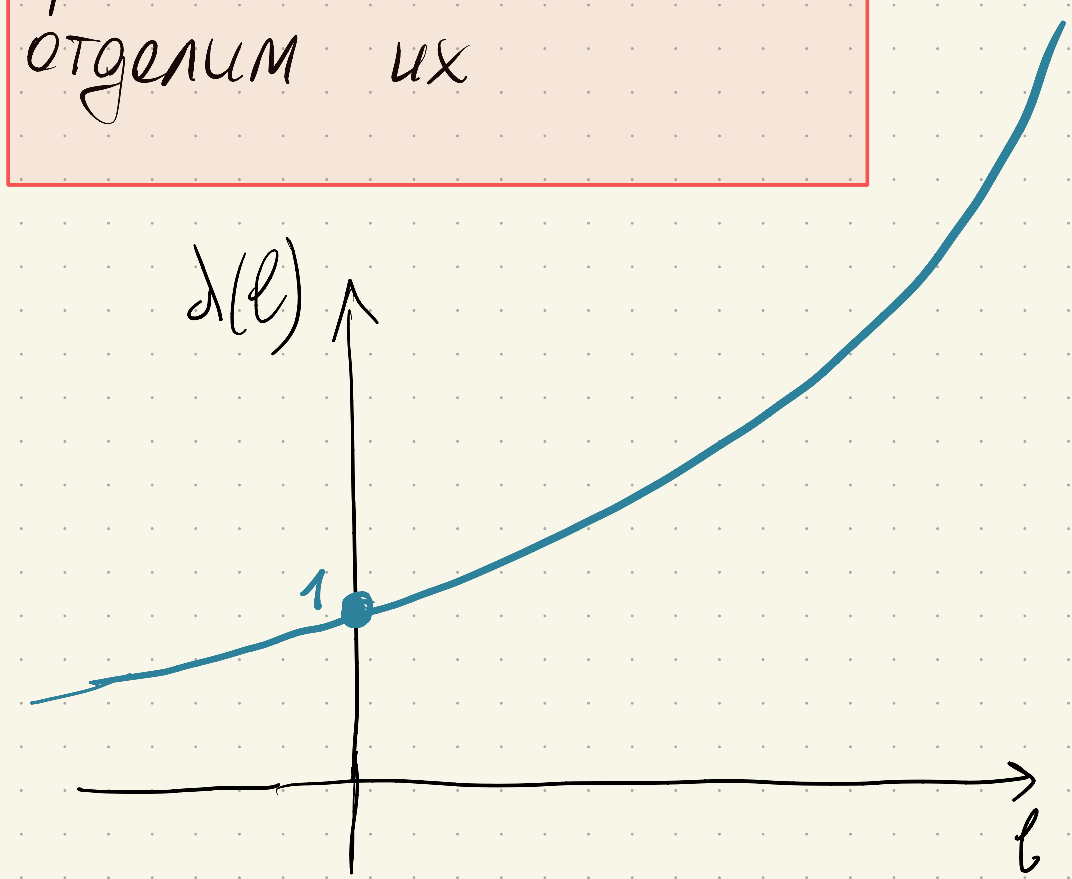
a b d c

$ad-bc=1$



$ad = bc + ef$



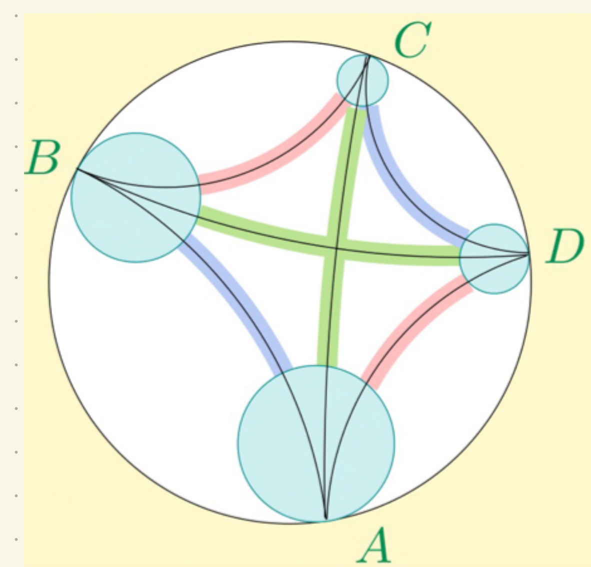


[см: Геометрический оркестрик, занятие 6]

λ-длина → λ_{AB} — некоторая функция от ℓ

Тогда:

Для четырехугольника ABCD с вершинами на границе гип. плоскости выполнено:



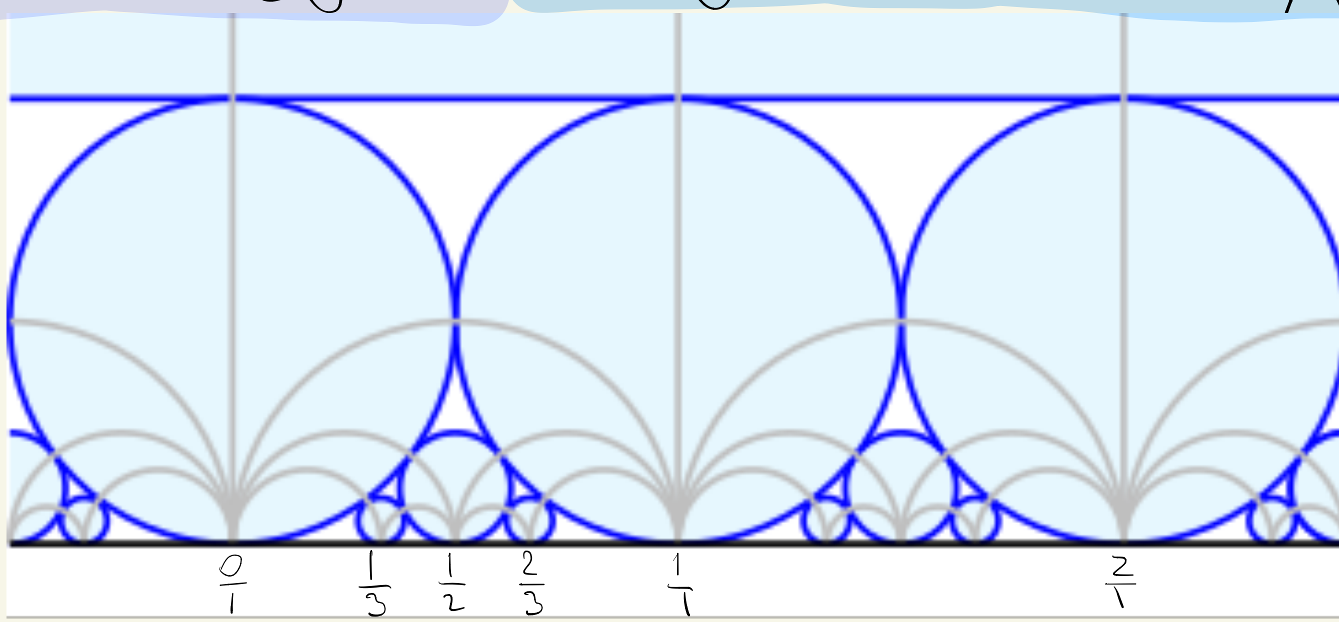
Robert Penner, 1970s

Гиперболическое соотношение Птолемея → $\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$

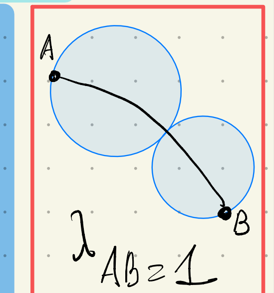
Знаем: целые положительные фризы ⟷ замкнутые пути на графе Фарея $\mathcal{F}$

Хотим: элементы фриза ⟷ λ-длины диагоналей

Используем окружности Форда!



В точке $\frac{p}{q}$ стоит окружность диаметра $\frac{1}{q^2}$



$\lambda_{AB} = 1$

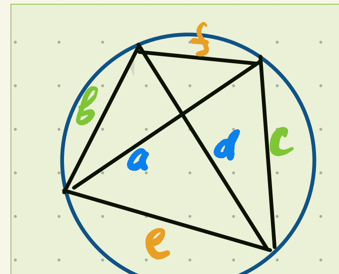
$\frac{p}{q}$ $\frac{p}{q}$ $\frac{r}{s}$

$|qr - ps| = 1$

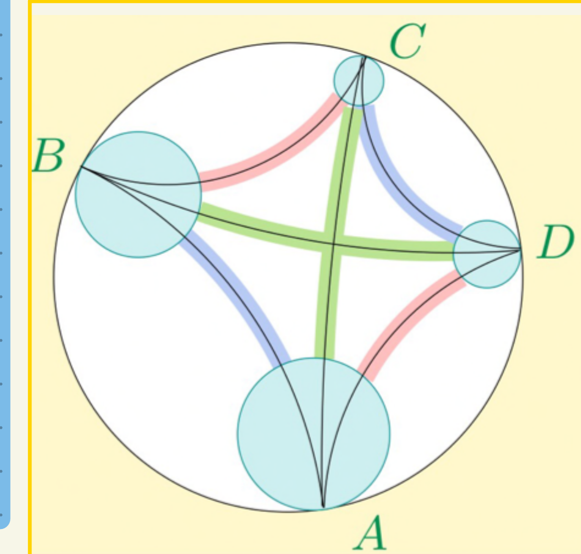
граф Фарея

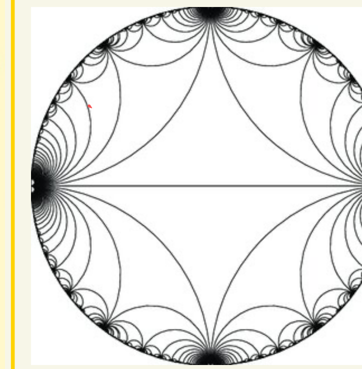
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$





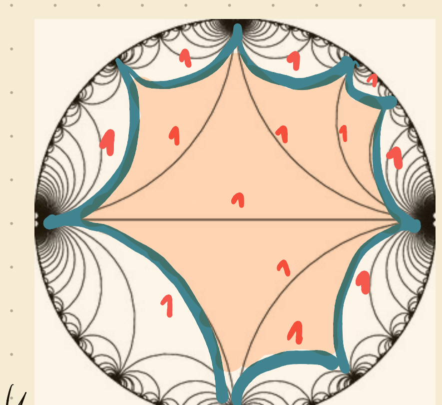
$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

- Окружности Форда в 0, 1 и ∞ взаимно касаются

т.е. $\lambda_{0,\infty} = \lambda_{1,\infty} = \lambda_{0,1} = 1$

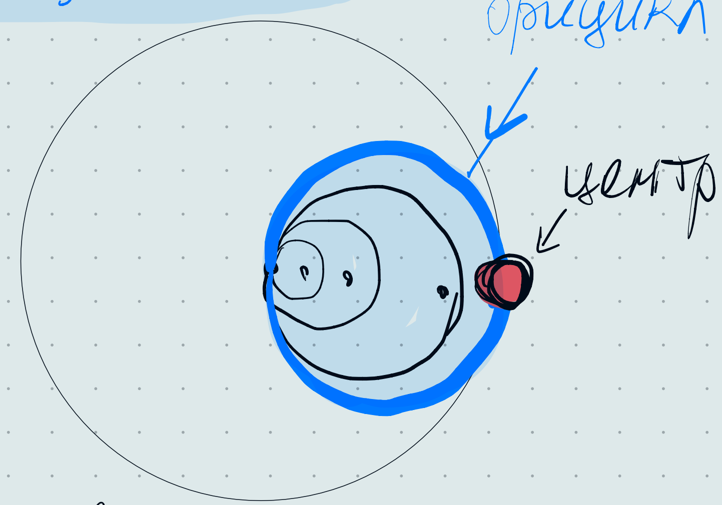
- Применяя инверсии относительно ребер $\mathcal{F}$, можно доказать, что в каждом треугольнике графа Фарея окружности тоже касаются

т.е. $\lambda_{i,j} = 1$ если P_iP_j — диагональ триангуляции



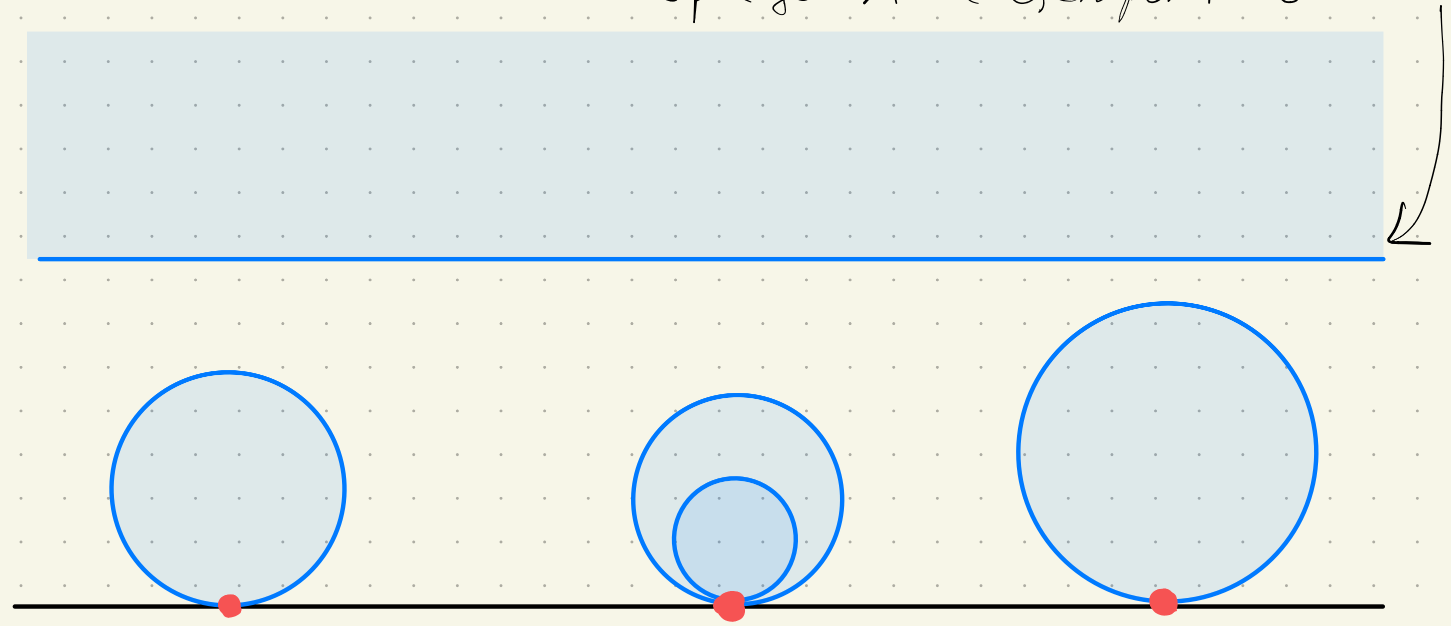
- Т.к. элементы фриза получены при помощи Птолемея (а λ-длины удовлетворяют тем же условиям) то $u_{ij} = \lambda_{ij}$

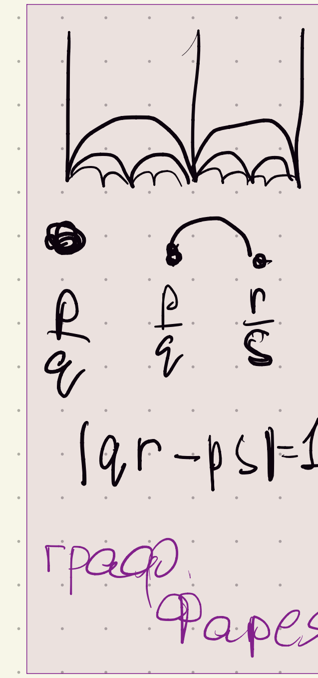
"Окружности" касающиеся границы называются **орициклами**



Они являются пределами обычных окружностей.

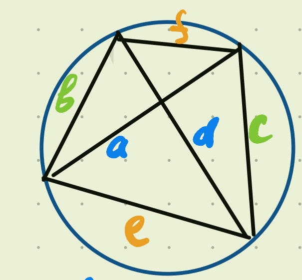
орицикл с центром в ∞



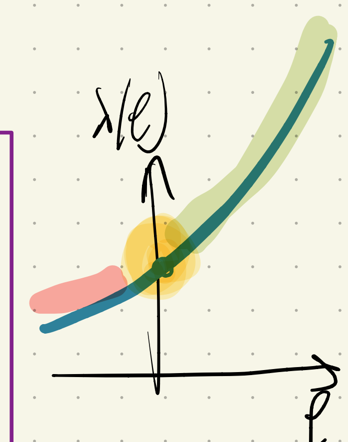


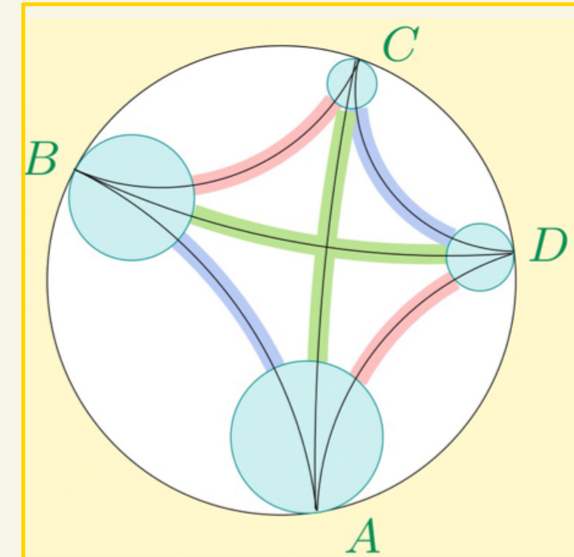
$$a \; {}^{b}_{c} \; d$$

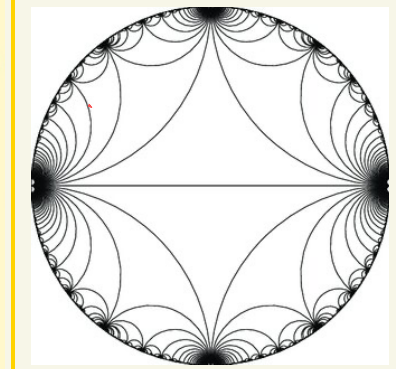
$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$



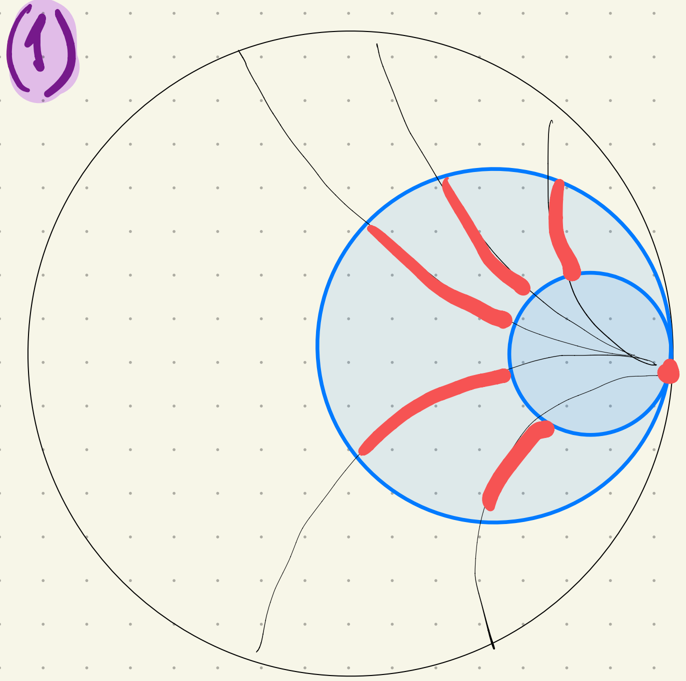




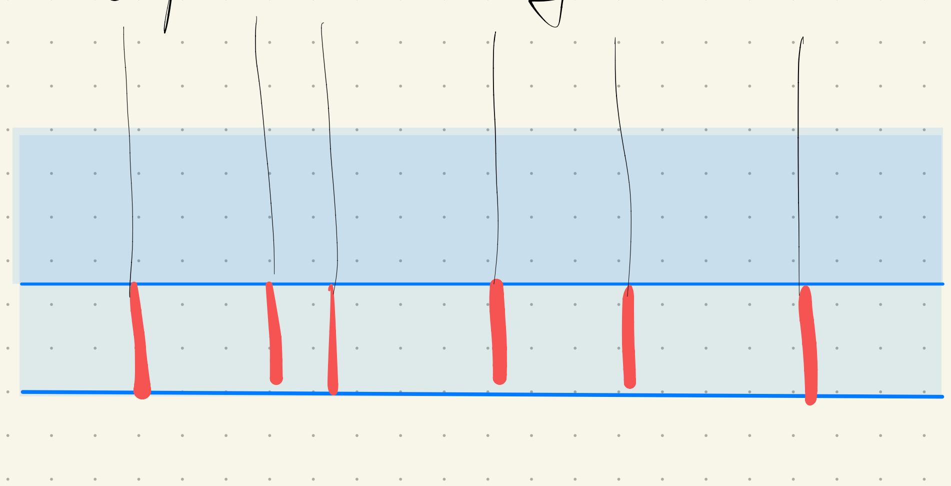
$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

Два свойства орициклов:

(1)

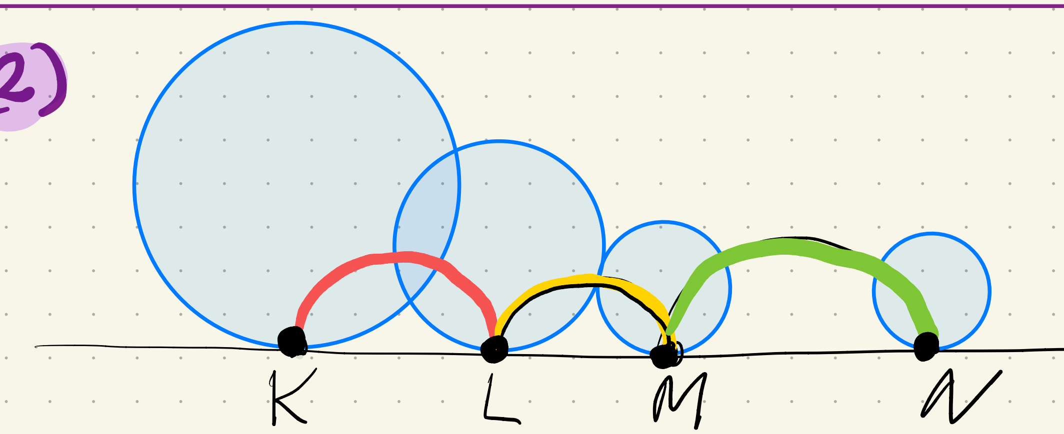


та же картинка в верхней полуплоскости:



Окрашенные куски прямых – одинаковой длины

(2)

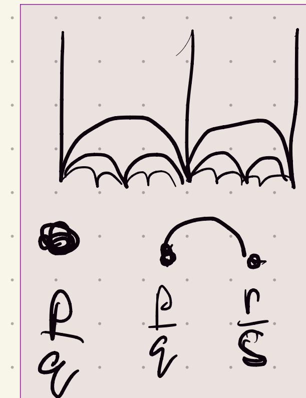


$0 < \lambda_{KL} < 1$ $\lambda_{LM} = 1$ $1 < \lambda_{MN} < \infty$

③ Дано: • идеальный гиперболический треугольник, (с вершинами на границе)
например $0\,1\,\infty$;

• числа $0 < a, b, c < \infty$

Докажите, что можно выбрать орициклы с центрами в $0, 1, \infty$ так, что $\lambda_{0\infty} = a$, $\lambda_{1\infty} = b$, $\lambda_{0,1} = c$

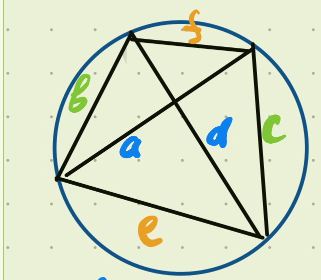


$|qr - ps| = 1$

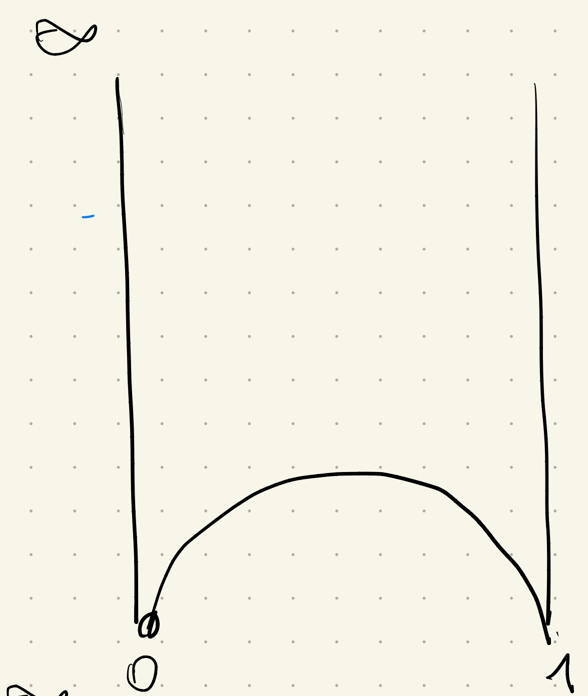
граф Фарея

$a \; {}^{b}_{c} \; d$

$ad - bc = 1$



$ad = bc + ef$

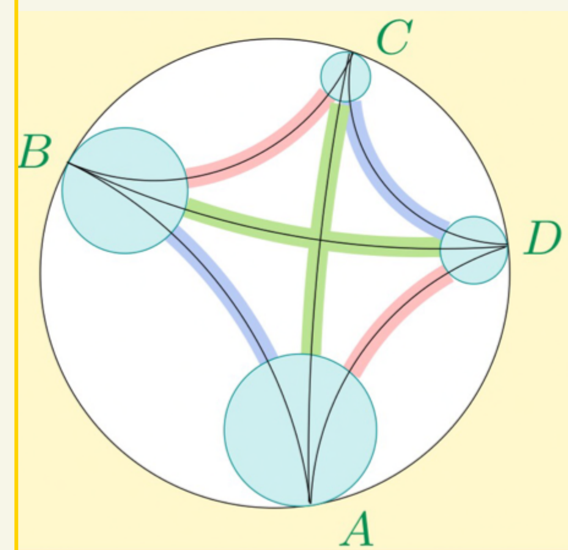


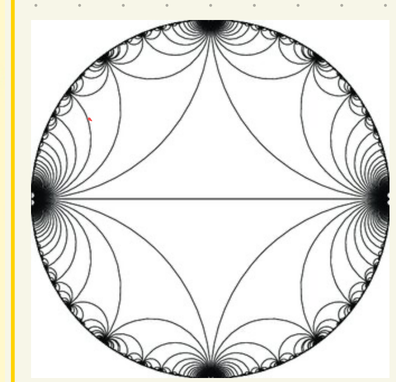
Решение: • выберем сначала любой орицикл в ∞

• Возьмем орициклы в 0 и 1, так, чтобы получилось $\lambda_{0\infty} = a$, $\lambda_{1\infty} = b$,

• Подвинув все орициклы вверх/вниз так, чтобы осталось $\lambda_{0\infty} = a$, $\lambda_{1\infty} = b$ увидим, что $\lambda_{0,1}$ пробегает от 0 до ∞

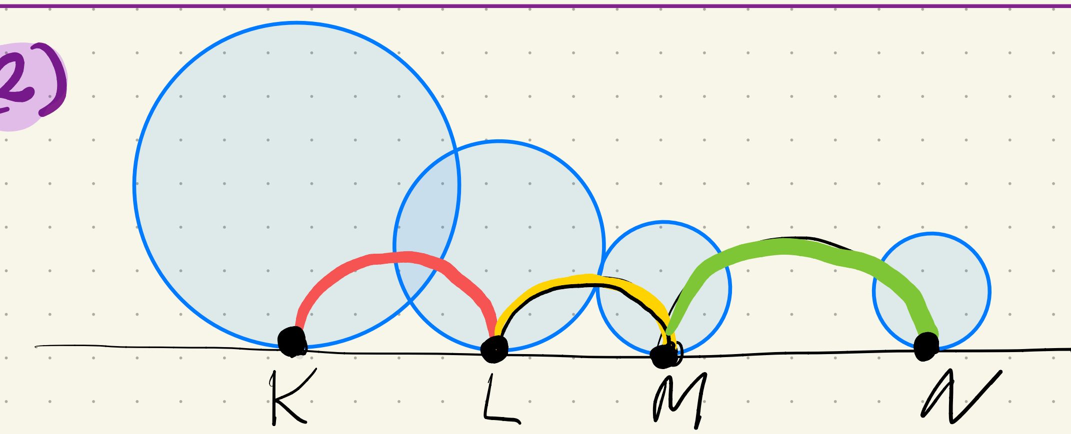
• выберем позицию, где $\lambda_{0,1} = c$.



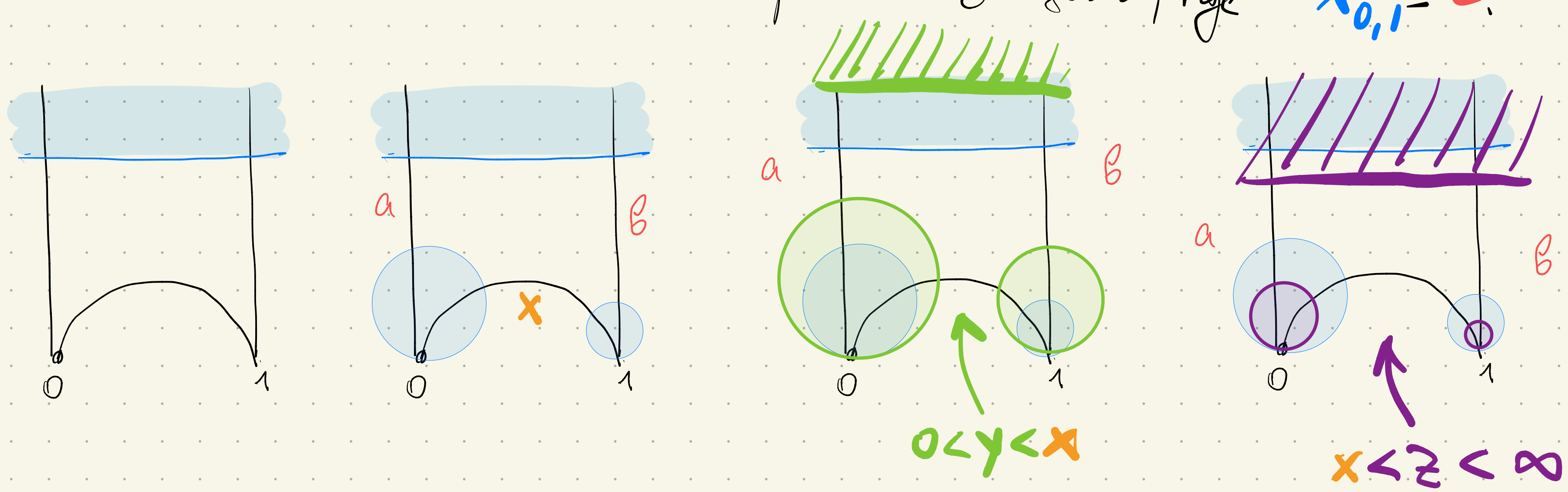


$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

(2)

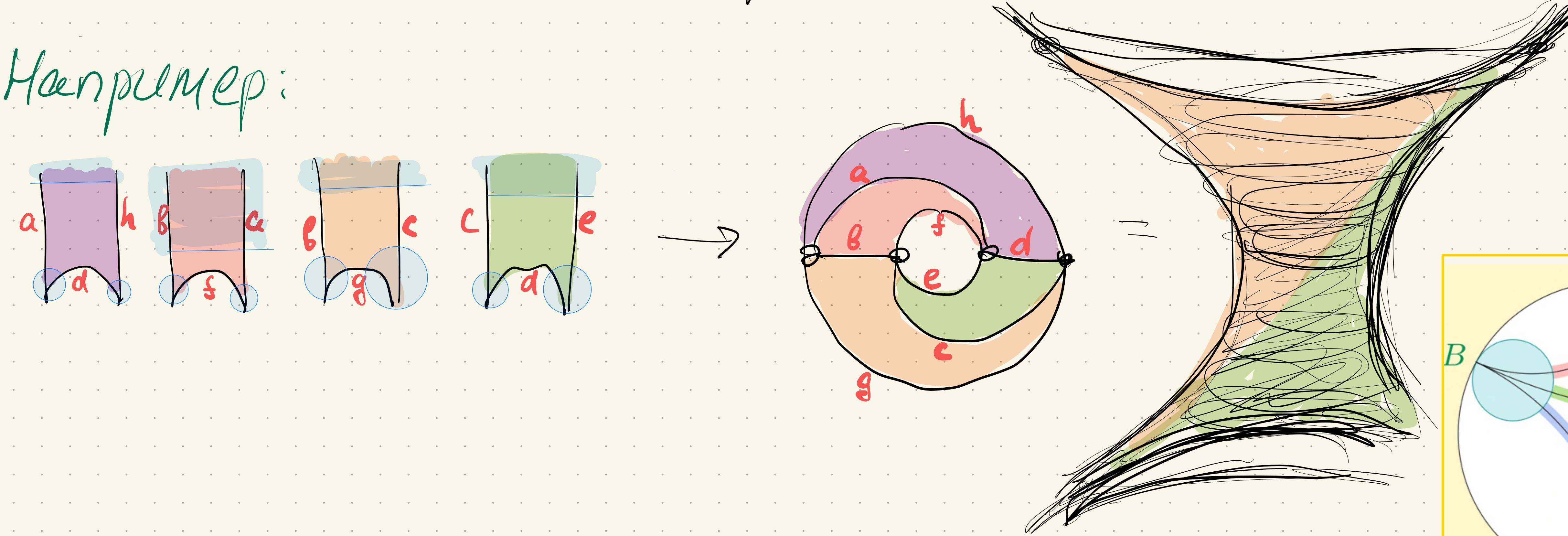


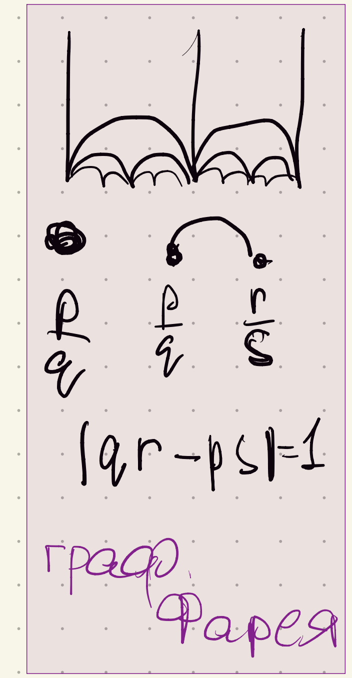
$0 < \lambda_{KL} < 1$ $\quad$ $\lambda_{LM} = 1$ $\quad$ $1 < \lambda_{MN} < \infty$

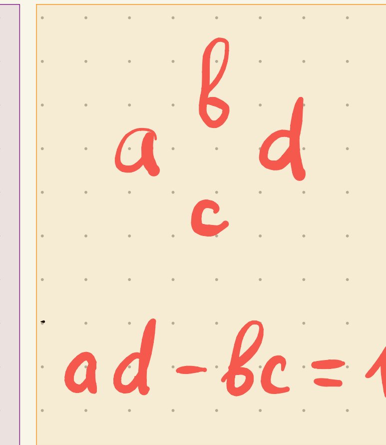


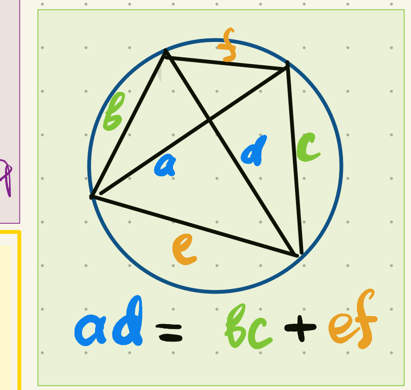
Из треугольников с выброшенными орициклами можно склеивать гиперболические поверхности

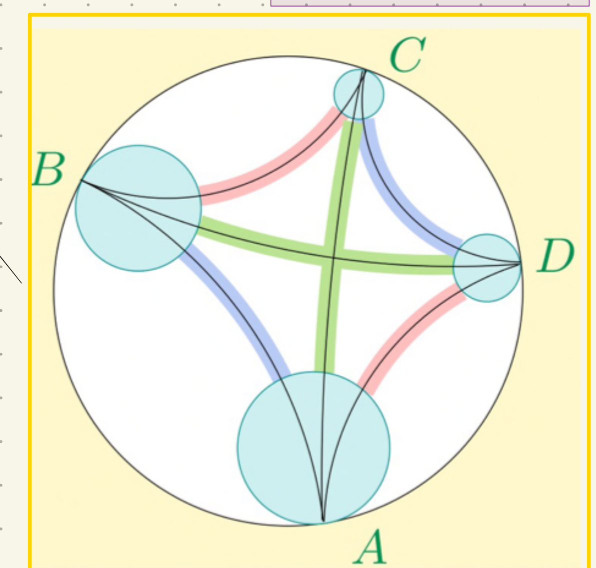
Например:

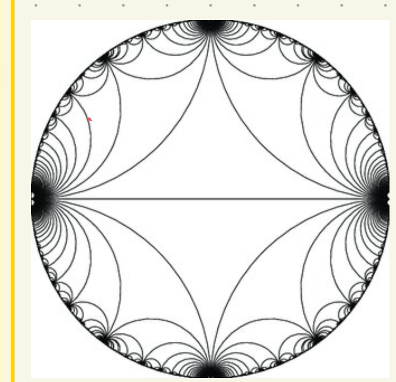








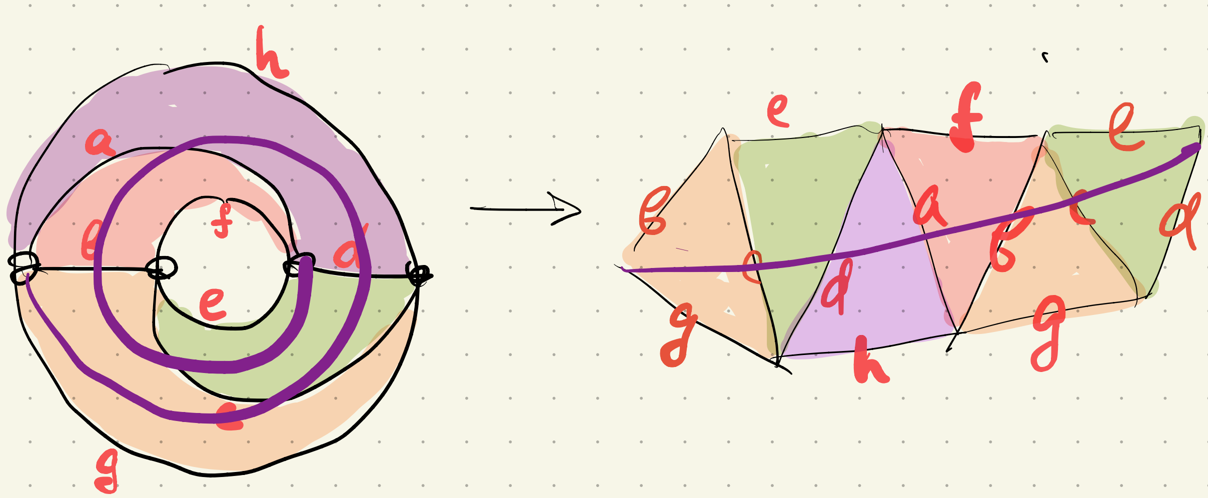


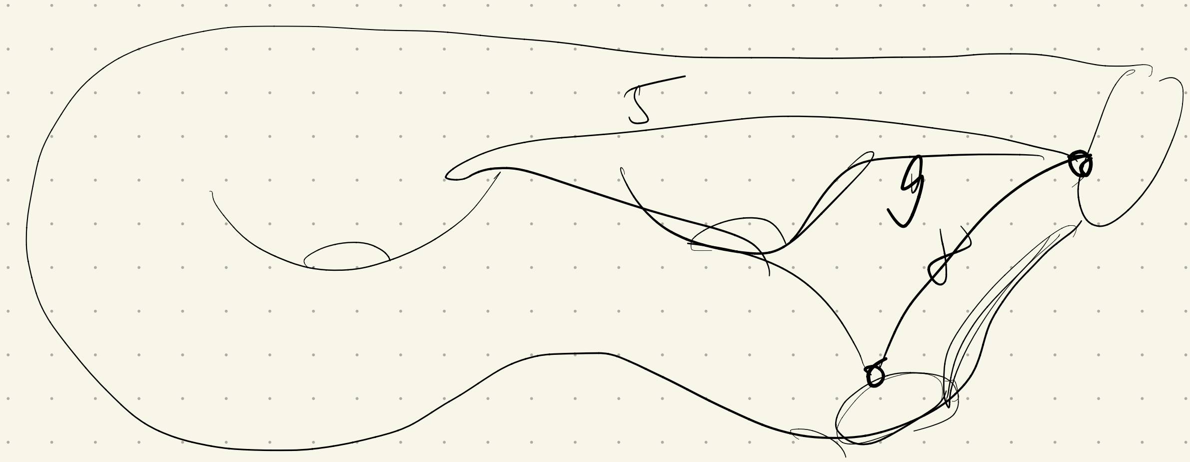


$$\lambda_{AC}\lambda_{BD}=\lambda_{AB}\lambda_{CD}+\lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

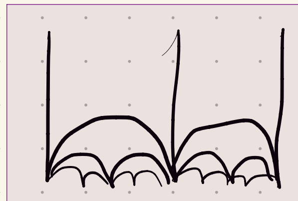
По гиперболической теореме Птолемея можно найти длину любой кривой на этой поверхности

Например:





На поверхности задан фриз, если каждой кривой сопоставлено положительное число так, что в каждом четырёхугольнике выполнена теорема Птолемея.



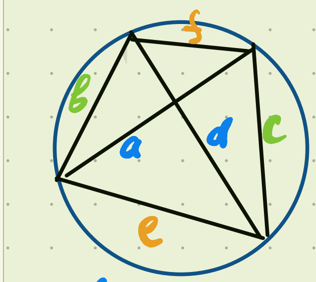
$\frac{p}{q}$ $\frac{p}{q}$ $\frac{r}{s}$

$|qr-ps|=1$

граф Фарея

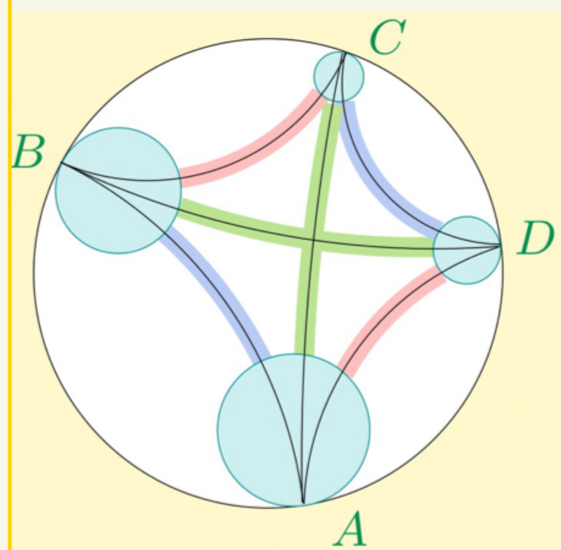
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

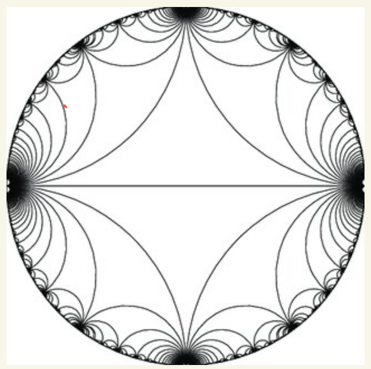
$$ad-bc=1$$



$$ad = bc + ef$$

Теперь эти числа **не** получится записать в таблицу!

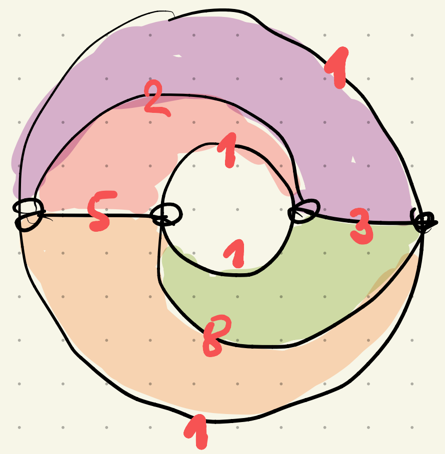




Но зато эти числа делают абстрактную поверхность гиперболической!

$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

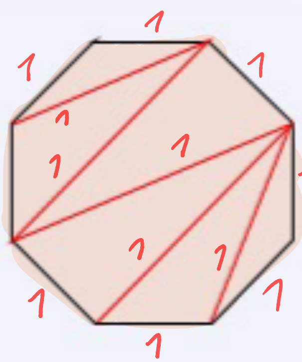
Достаточно задать числа на рёбрах триангуляции (а остальное – по Птолемею)



Фриз называется целым, если все числа на всех рёбрах целые

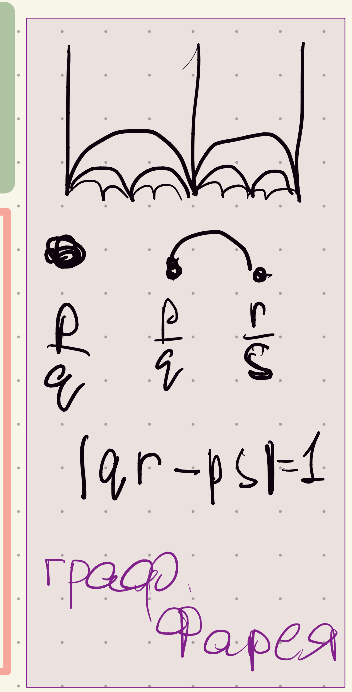
4 Приведите пример целого фриза на какой-нибудь поверхности.

Решение:
целый фриз на диске с 8 отмеченными точками



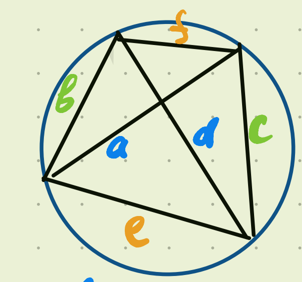
Фриз: число > 0 на каждой кривой + Птолемей

Фриз называется **унитарным** если есть такая триангуляция поверхности, что на всех её рёбрах стоит 1.



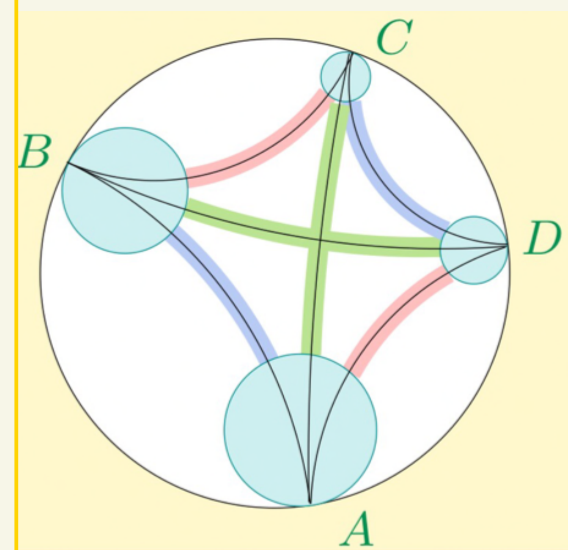
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

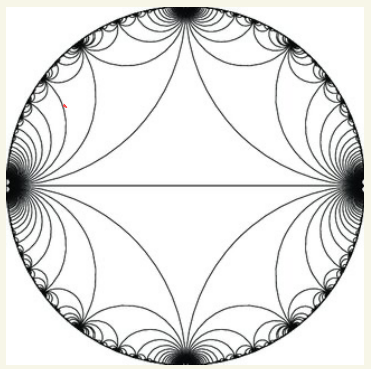
$$ad - bc = 1$$



$$ad = bc + ef$$

Теорема Конвея-Кокстера говорит, что любой целочисленный фриз на диске является унитарным



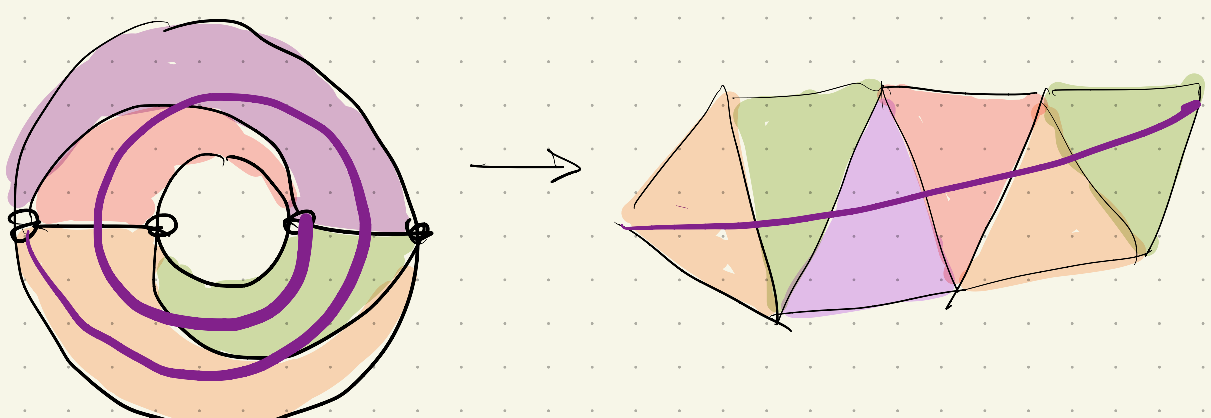


$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

(5) Покажите, что любой унитарный фриз является целочисленным

Решение: как в задаче 3 занятия 13:

Возьмём любую кривую на поверхности и развернём в прямую (вместе с цепочкой треугольников). Теперь ситуация как на многоугольнике

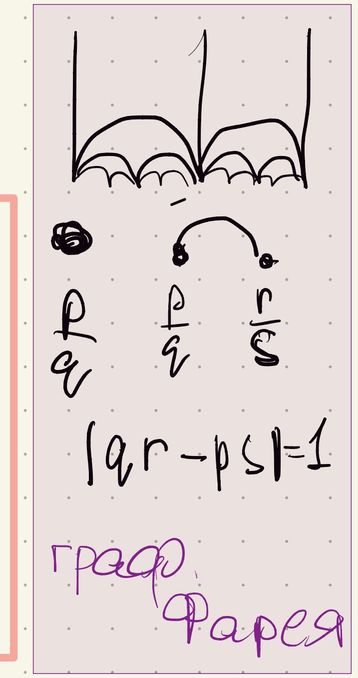


фриз: число>0 на каждой кривой + Птолемей

Фриз называется **унитарным** если есть такая триангуляция поверхности, что на всех её рёбрах стоит 1.

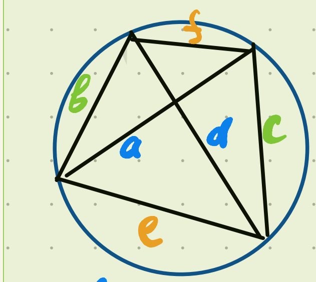
Вопрос: Верно ли, что любой фриз на заданной поверхности унитарный?

Результаты:
- Конвей-Коксетер: "Да" на диске (1976)
- Thomas (2009), Fontaine, Plamondon (2016): "Нет" на диске с проколом
- Gunawan, Schiffler (2018): "Да" на кольце
- Çanakçı, Felikson, Tumarkin, Garcia Elsener (2022): "Да" на штанах
- Felikson, Tumarkin (2024): "Да" на любой поверхности без проколов.

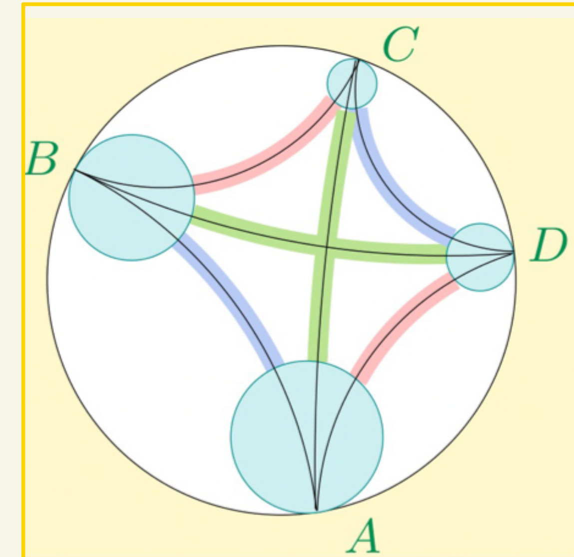


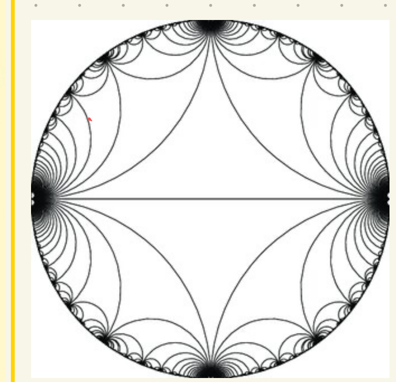
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad-bc=1$$

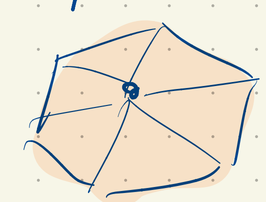


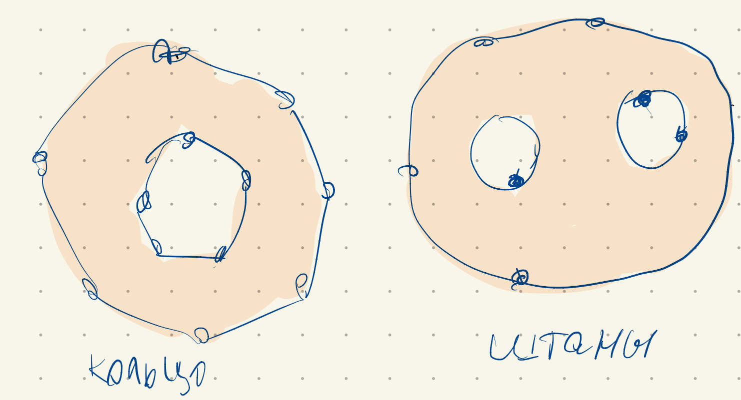
$$ad = bc + ef$$





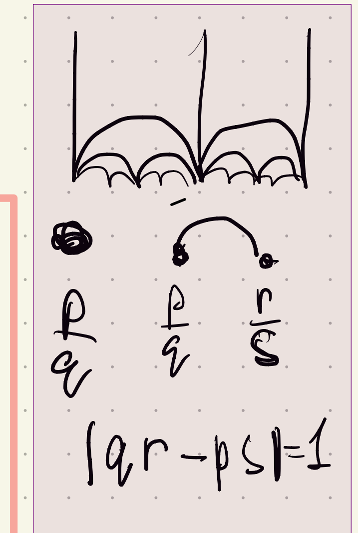
$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$





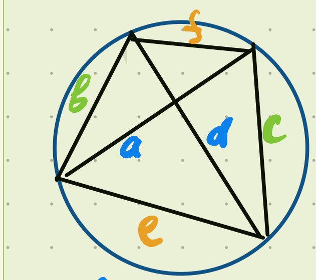
Фриз: число>0 на каждой кривой + Птолемей

Фриз называется **унитарным** если есть такая триангуляция поверхности, что на всех её рёбрах стоит 1.

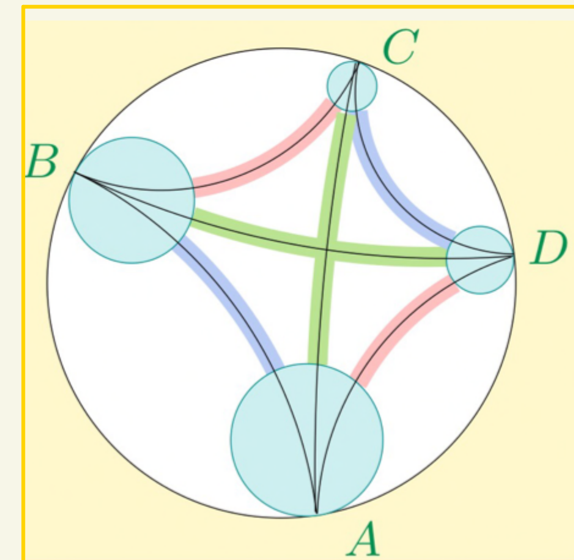


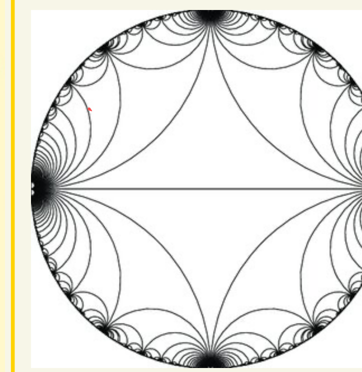
$a \; {}^{b} \; {}_{c} \; d$

$ad-bc=1$



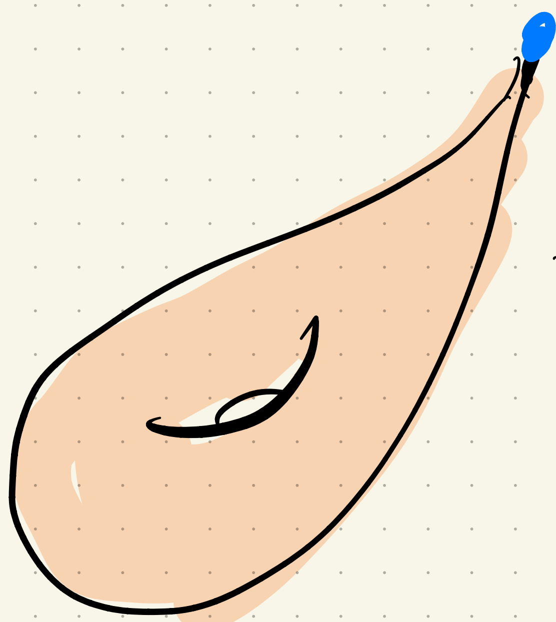
$ad = bc + ef$



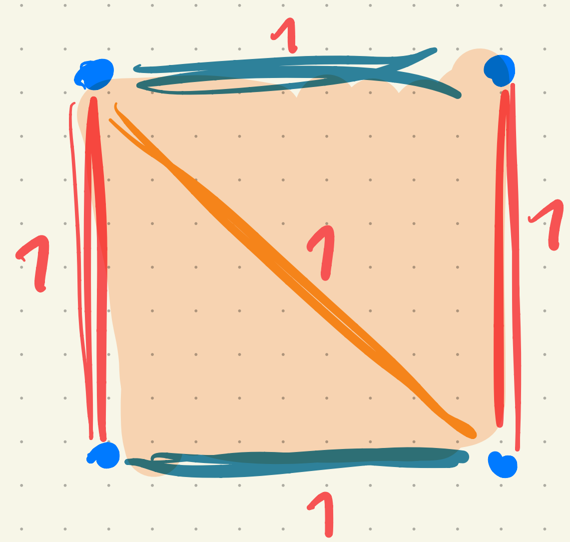


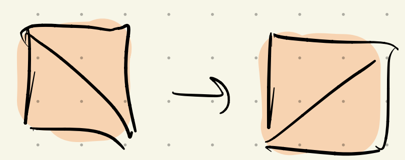
$$\lambda_{AC}\lambda_{BD} = \lambda_{AB}\lambda_{CD} + \lambda_{BC}\lambda_{BD}$$

Замечание: в занятии 6 мы рассматривали унитарный фриз на торе с проколом:

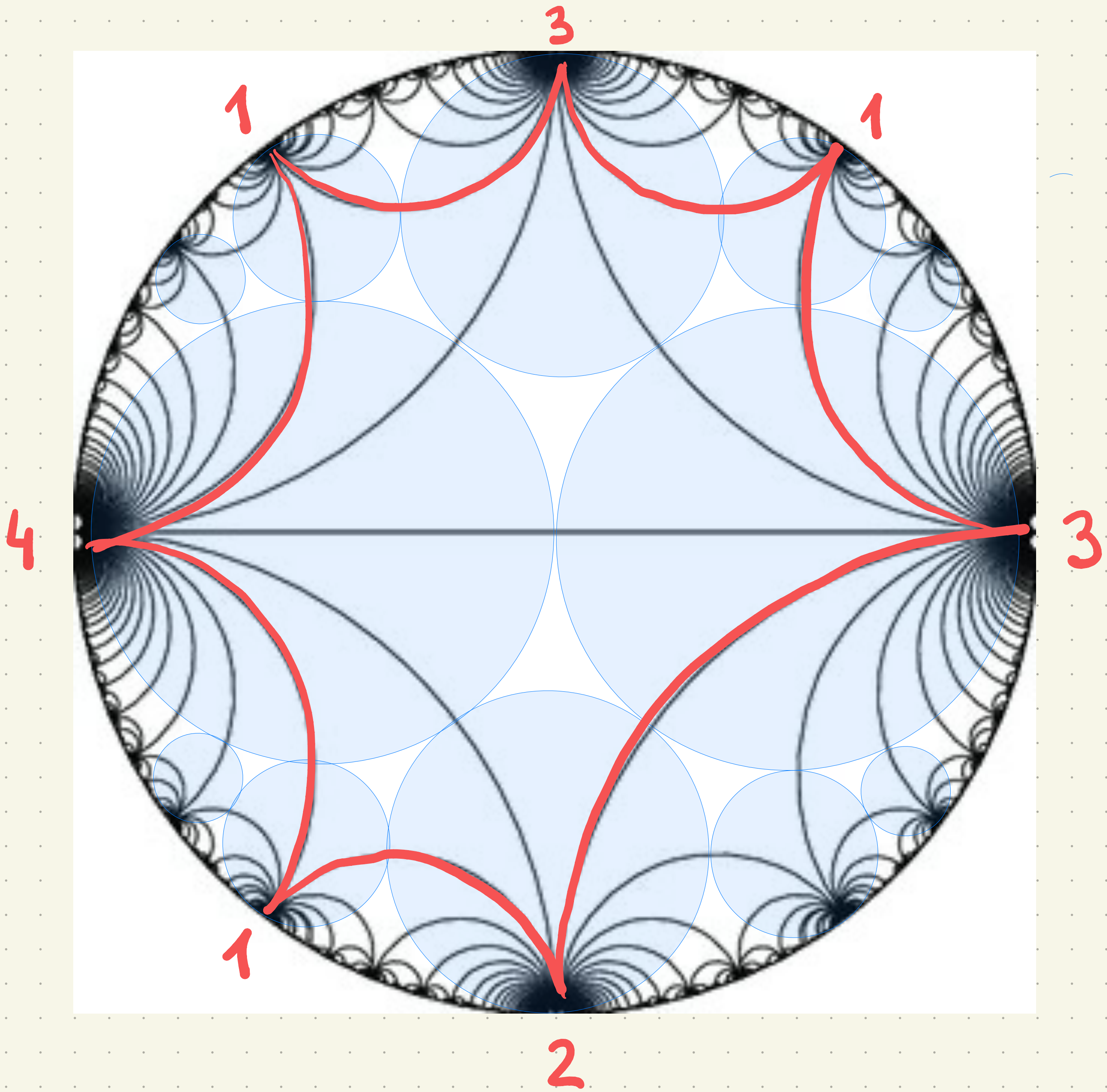


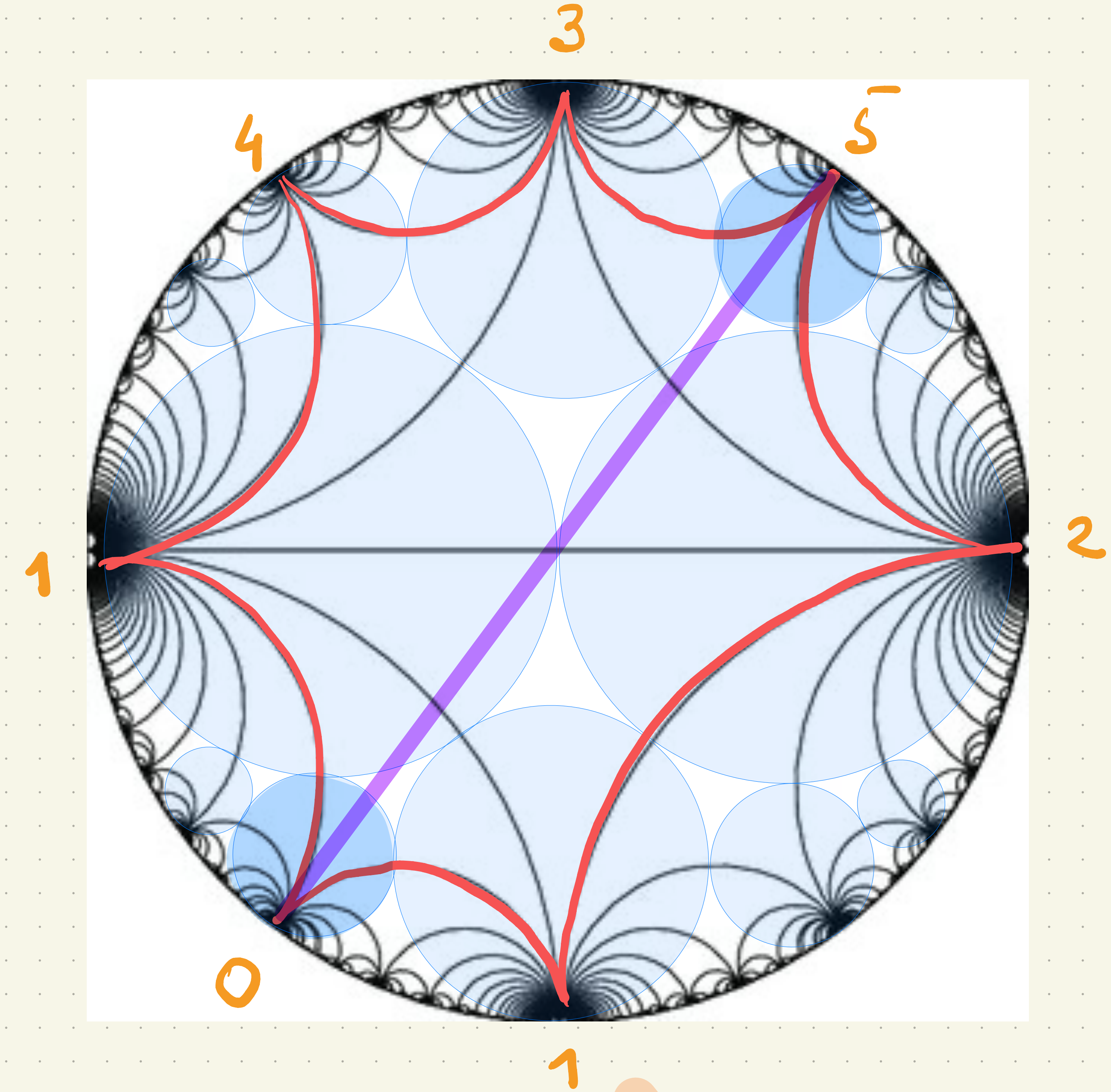
=



[заменяли триангуляции флипами  и получали из (1,1,1) все тройки Маркова]

А С И Б О С П А С И Б О С П А С И Б О С П А С И Б О С П А

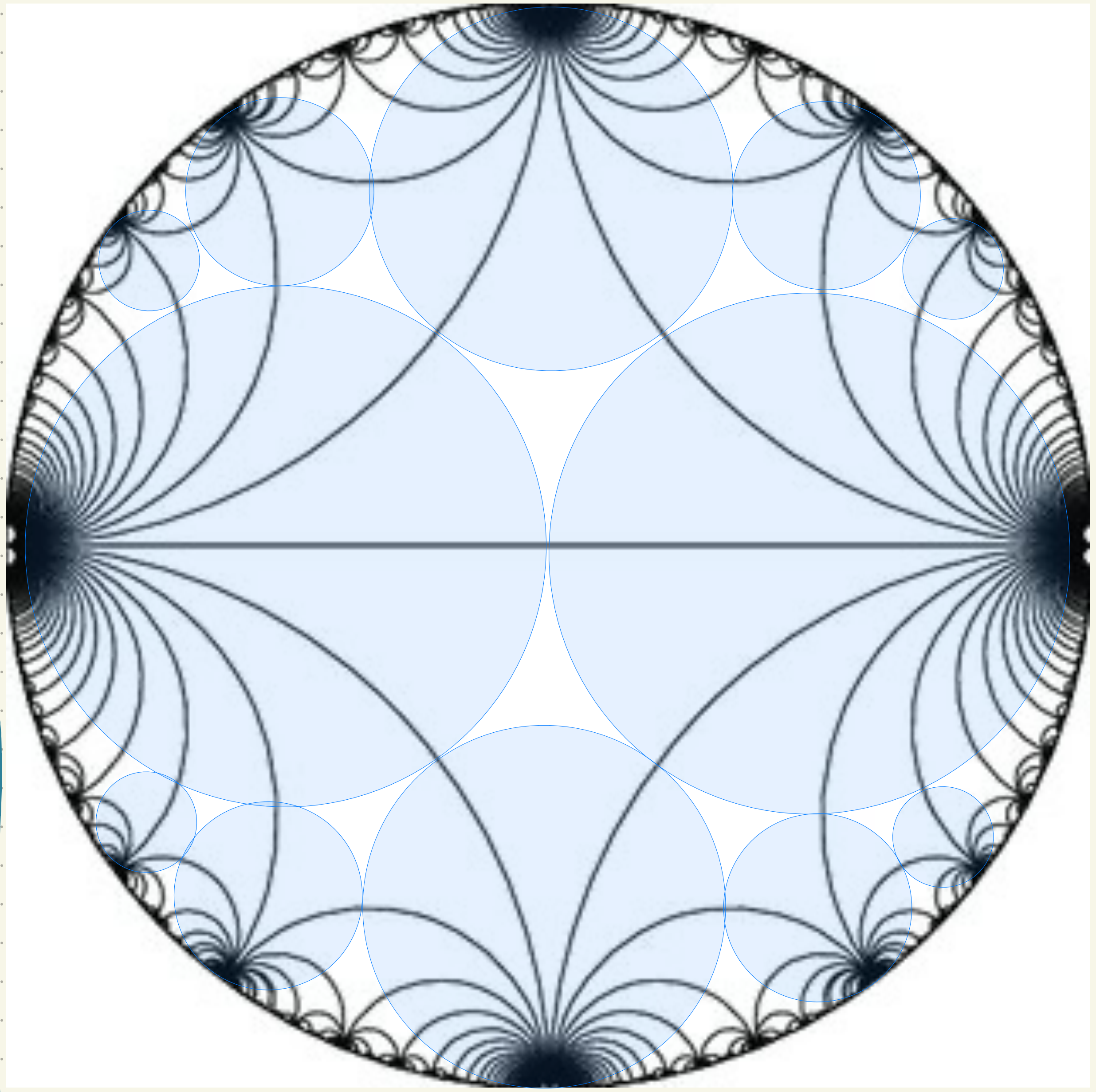





```
                                                                                    0
  1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
4   1   2   3   1   3   1   4   1   2   3   1   3   1   4   1   2   3   1   3   1   4   1   2   3   1   3   1   4
  3   1   5   2   2   2   3   3   1   5   2   2   2   3   3   1   5   2   2   2   3   3   1   5   2   2   2   3   3
2   2   2   3   3   1   5   2   2   2   3   3   1   5   2   2   2   3   3   1   5   2   2   2   3   3   1   5   2
  1   3   1   4   1   2   3   1   3   1   4   1   2   3   1   3   1   4   1   2   3   1   3   1   4   1   2   3   1
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
                                                                                                  0
```

А С И Б О С П А С И Б О С П А С И Б О С П А С И Б О С П А

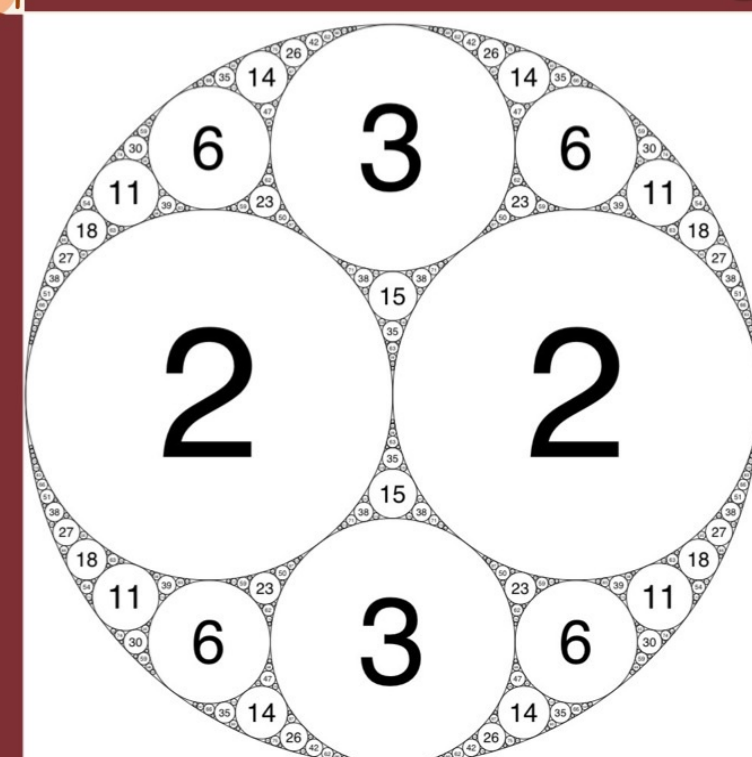
Где встречались такие касающиеся окружности?



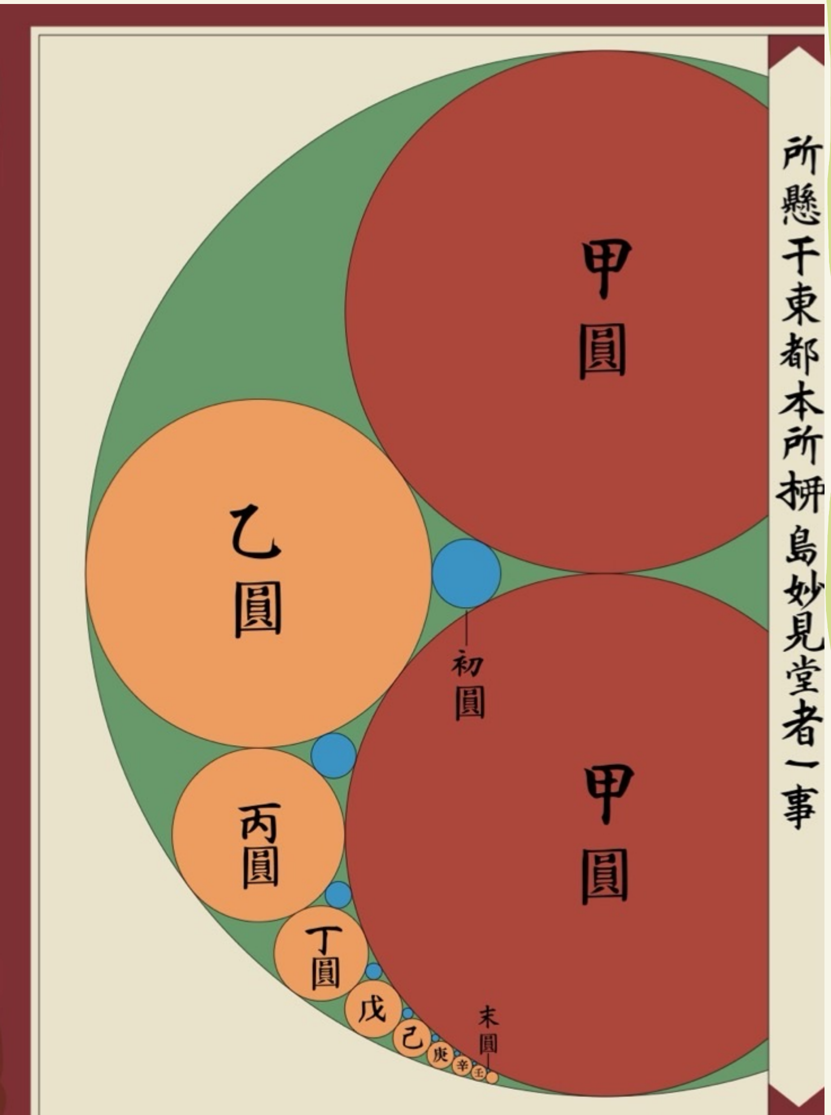
СПАСИБО!

см Занятие 15 цикла „Японская храмовая геометрия".

15 Снова окружности:



Ковёр Аполлония



СПАСИБО!