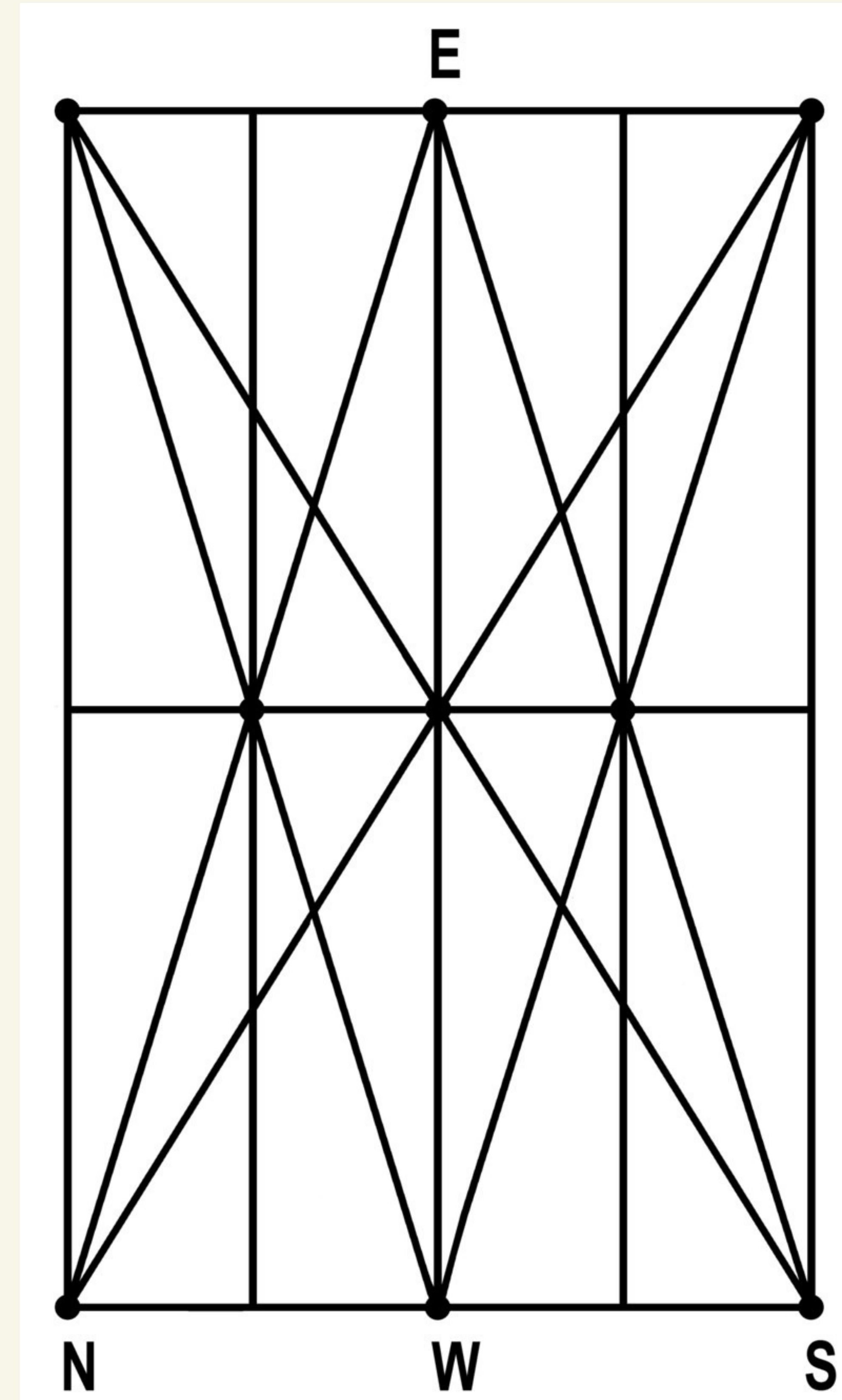
Все по конечному модулю...

mod p

(Арифметика, фризы, звуки, граф Фарея, оригами)



- Рассмотрим целые числа.
- Выберем число m.
- Каждое число заменим его остатком по модулю m, т.е одним из $0, 1, 2, \ldots, m-1$

Например: $m=3$, различные остатки: $0, 1, 2$

$$2+2 \equiv 1 \pmod 3$$

(4 сравнимо с 1 по модулю 3)

Это значит, что $2+2 = 3 \cdot k + 1$

для какого-то целого k

Разминка арифметическая

Вычислите:

$3+9 \equiv ? \pmod 7$

$1-3 \equiv ? \pmod 4$

$4+? \equiv 2 \pmod 5$

$3 \cdot ? \equiv 4 \pmod 8$

$3+9 \equiv 7 \pmod ?$

$\frac{1}{x} \equiv n \pmod m$

если $n \cdot x \equiv 1 \pmod m$

$\frac{1}{2} \equiv 2 \pmod 3$

mod m:

$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$

сравнимо

Можно ли делить на 0?

Вычислите mod 5!

$\frac{1}{2} \equiv ? \pmod 5$

$\frac{1}{3} \equiv ? \pmod 5$

$\frac{1}{4} \equiv ? \pmod 5$

$\frac{1}{5} \equiv ? \pmod 5$

Разминка арифметическая

Вычислите:

$3+9 \equiv 5 \pmod{7}$

$1-3 \equiv 2 \pmod{4}$

$4+3 \equiv 2 \pmod{5}$

$3\cdot 4 \equiv 4 \pmod{8}$

$\underset{2}{\underset{\equiv}{3+9}} \equiv \underset{2}{\underset{\equiv}{7}} \pmod{5}$

$\frac{1}{x} \equiv n \pmod{m}$

если $n\cdot x \equiv 1 \pmod{m}$

mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod{3}$

сравнимо

$\frac{1}{2} \equiv 2 \pmod{3}$

Можно ли делить на 0?

НЕТ: $\frac{x}{0} \equiv ? \pmod{m}$

$x \equiv 0\cdot ? \pmod{m}$

Если $x \not\equiv 0 \pmod{m}$, то нет остатка y, т.ч. $0\cdot y \equiv x$!

Вычислите mod 5:

$\frac{1}{2} \equiv 3 \pmod{5}$

$\frac{1}{3} \equiv 2 \pmod{5}$

$\frac{1}{4} \equiv 4 \pmod{5}$

$5 \equiv 0$
На 0 делить НЕЛЬЗЯ! $\rightarrow$ $\frac{1}{5} \equiv ? \pmod{5}$

Разминка из жизни

Приведите примеры

Когда нам в жизни приходится считать по конечным модулям? По каким?

mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$

сравнимо

Разминка из жизни

Приведите примеры

Когда нам в жизни приходится считать по конечным модулям? По каким?

mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod{3}$
сравнимо

- часы: 12, 24, 60
- дни недели: 7
- месяцы: 12
- часовые пояса: 24
- углы: 360
- ноты (7, 5, 12)

что ещё?

① Продолжите фриз по модулю 4 и сравните с фризом в целых числах:

	1		1		1		1		1		1		
3		1		2		3		1		2		3

	1		1		1		1		1		1	

	1		1		1		1		1		1	
...		1		2		3		1		2		...
	2		1		5		2		1		5	
...		1		2		3		1		2		...
	1		1		1		1		1		1	

mod m:
0, 1, 2, ..., m−1

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

$ad-bc \equiv 1$ mod m

$a \;\, {}^{b}_{c} \;\, d$

$ad-bc=1$

① Продолжите фриз по модулю 4
и сравните с фризом в целых числах:

mod m:
0, 1, 2, ..., m−1

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

Решение: фриз по модулю 4:

```
     1     1     1     1     1     1
3       1     2     3     1     2     3
     2     1     1     2     1     1
        1     2     3     1     2     3
     1     1     1     1     1     1
```

целочисленный фриз:

```
     1     1     1     1     1     1
...     1     2     3     1     2     ...
     2     1     5     2     1     5
...     1     2     3     1     2     ...
     1     1     1     1     1     1
```

$ad-bc \equiv 1$
mod m

$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$

$ad-bc=1$

Из фриза в целых числах можно сделать фриз по модулю m взяв каждое число по модулю m

При этом могут появиться нули!

Все ли фризы mod m можно так получить?

(2) Покажите, что фриз по модулю 6

	0		0		0		0		0			
		1		1		1		1		1		
$\cdots$	2		4		2		4		2		$\cdots$	
		1		1		1		1		1		
	0		0		0		0		0			

невозможно получить из фриза в целых числах, взяв все числа по модулю 6.

mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$

сравнимо

$ad-bc \equiv 1$ mod m

$$a \;{}^{b}_{c}\; d$$

$ad-bc=1$

② Покажите, что фриз по модулю 6

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
\cdots & 2 & & 4 & & 2 & & 4 & & 2 & & \cdots & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & &
\end{array}
$$

невозможно получить из фриза в целых числах, взяв все числа по модулю 6.

mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

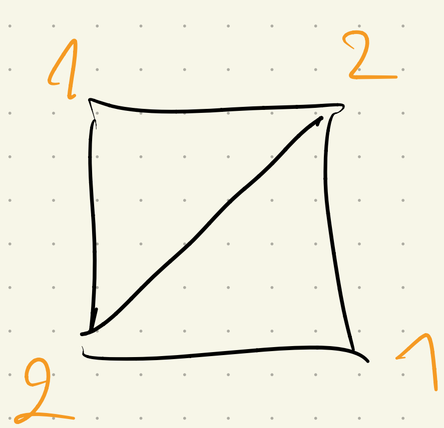
$ad-bc \equiv 1$ mod m ⟶

$$
\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & d \\
 & c &
\end{array}
$$

$ad-bc=1$

Решение: Целочисленные фризы ширины 1 соответствуют триангуляциям четырёхугольника и исчерпываются следующим,

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
\ldots & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$



Из чего не получается указанный выше фриз.

Ian Short:

Matty Van Son
Andrei Zabolotskii
(2024)

Фризы mod m описываются путями на графе Фарея $\mathcal{F}_m$ mod m

mod m: $0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

$ad-bc \equiv 1$ mod m

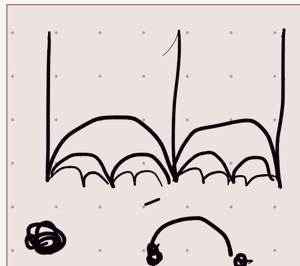
$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$

$ad-bc=1$

Граф Фарея $\mathcal{F}_m$ (mod m):

- **вершины:** $\frac{p}{q}$, "взаимно простые": пары (p,q) остатков mod m, такие что есть a, b (mod m) для которых $ap+bq=1$.
  При этом считаем, что $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$

- **ребра:** ребро между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, если $ad-bc \equiv \pm 1$.



$\frac{p}{q}$ $\quad \frac{p}{q}$ $\quad \frac{r}{s}$

$|qr-ps|=1$

граф Фарея

③ Постройте граф Фарея по модулю 2

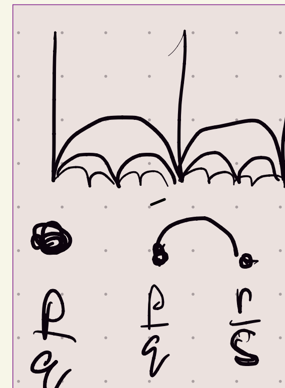
mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

$ad-bc \equiv 1 \mod m$

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$ad-bc=1$



$|qr-ps|=1$

граф Фарея

Граф Фарея F_m (mod m):

• **вершины:** $\frac{p}{q}$, «взаимно простые»:
пары (p,q) остатков mod m,
такие что есть a, b (mod m)
для которых $ap+bq=1$
При этом считаем, что $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$

• **ребра:** ребро между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$,
если $ad-bc=\pm 1$.

③ Постройте граф Фарея по модулю 2

mod m: $0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

Решение: возможные вершины: $\cancel{\frac{0}{0}}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}$

вычеркиваем, т.к. не взаимно просты: $a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0 \neq 1$

какие соединять:

$\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$: $0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$ ✓

$\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$: $0\cdot 1 - 1\cdot 1 = -1$ ✓

$\frac{1}{0}$ и $\frac{1}{1}$: $1\cdot 1 - 0\cdot 1 = 1$ ✓

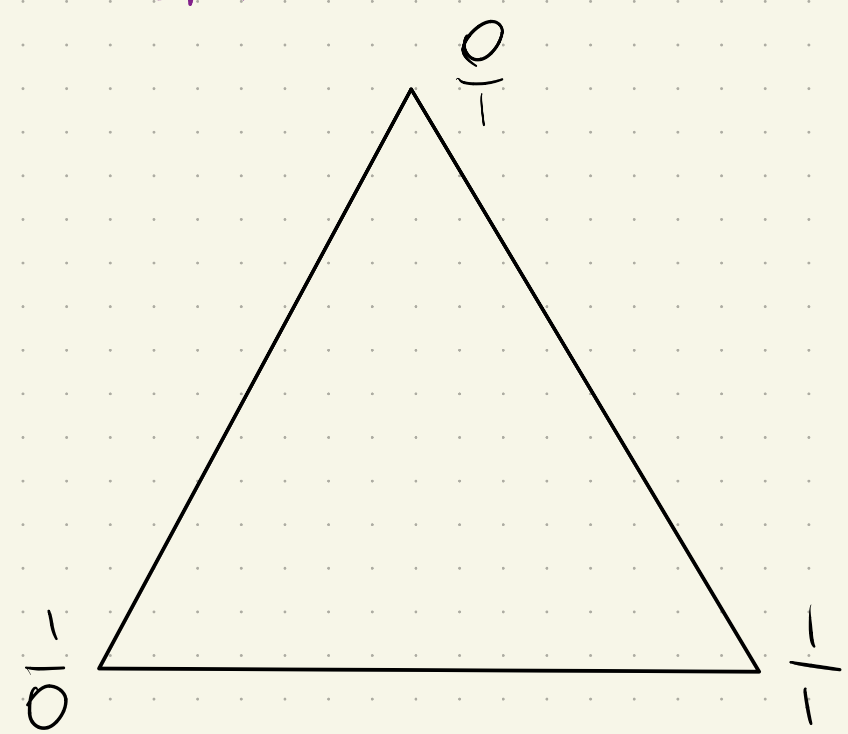
$ad-bc \equiv 1$ mod m ⟶ $ad-bc=1$

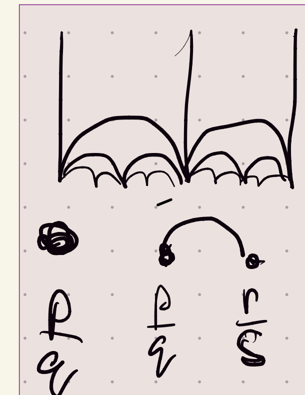
$a \ {}^{b}_{c}\ d$

Граф Фарея F_m (mod m):

- **вершины:** $\frac{p}{q}$, "взаимно простые": пары (p,q) остатков mod m, такие что есть a, b (mod m) для которых $ap+bq=1$.
  При этом считаем, что $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$
- **ребра:** ребро между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, если $ad-bc=\pm 1$.

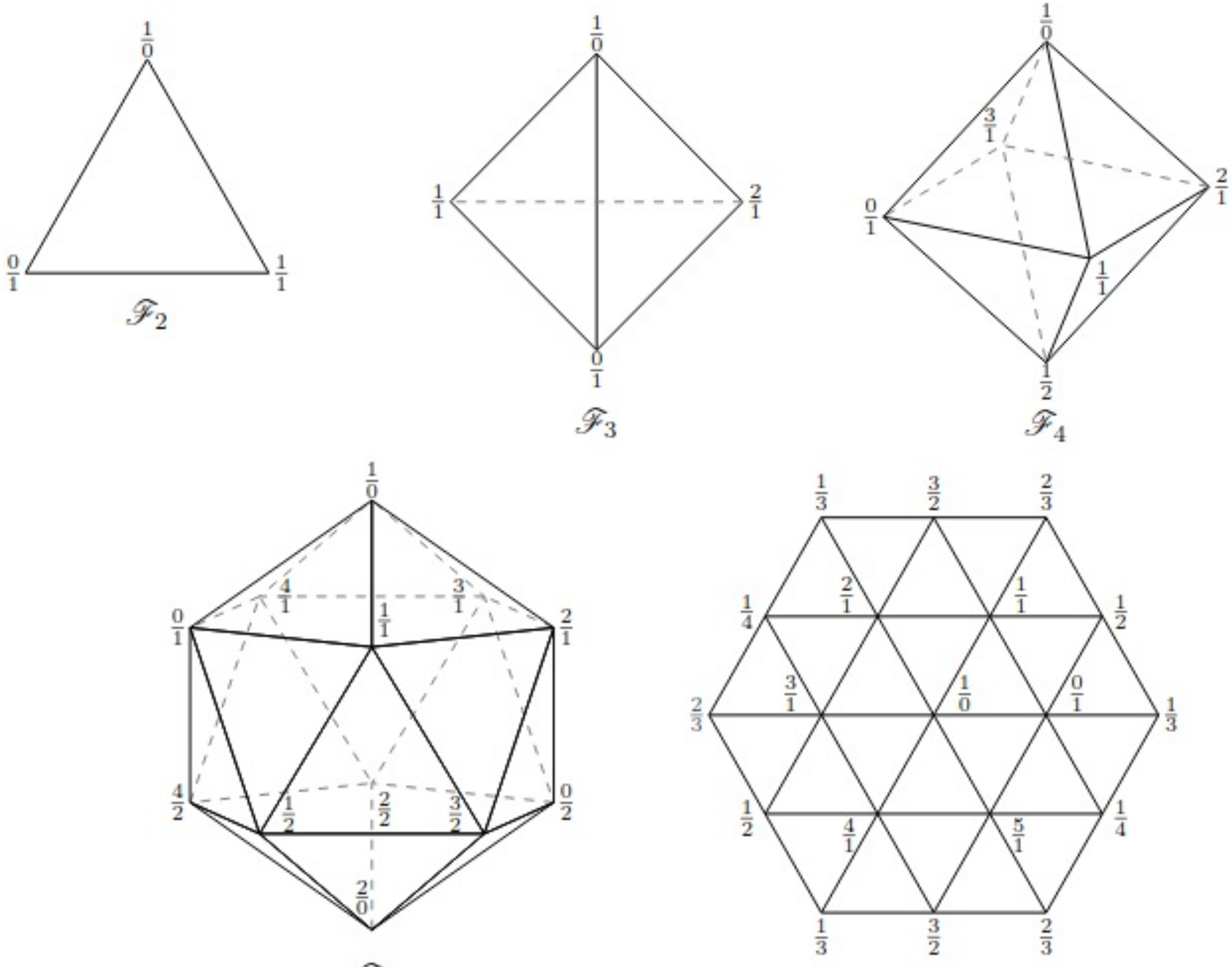
Ответ:





$|qr-ps|=1$

граф Фарея



$\mathscr{F}_2$ $\mathscr{F}_3$ $\mathscr{F}_4$ $\mathscr{F}_5$ $\mathscr{F}_6$

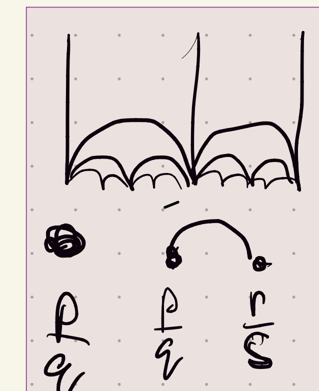
mod m:
$0, 1, 2, \ldots, m-1$

$2+2 \equiv 1 \pmod 3$
сравнимо

$ad-bc \equiv 1$ mod m

$a \; {}^{b} \; {}_{c} \; d$

$ad-bc=1$



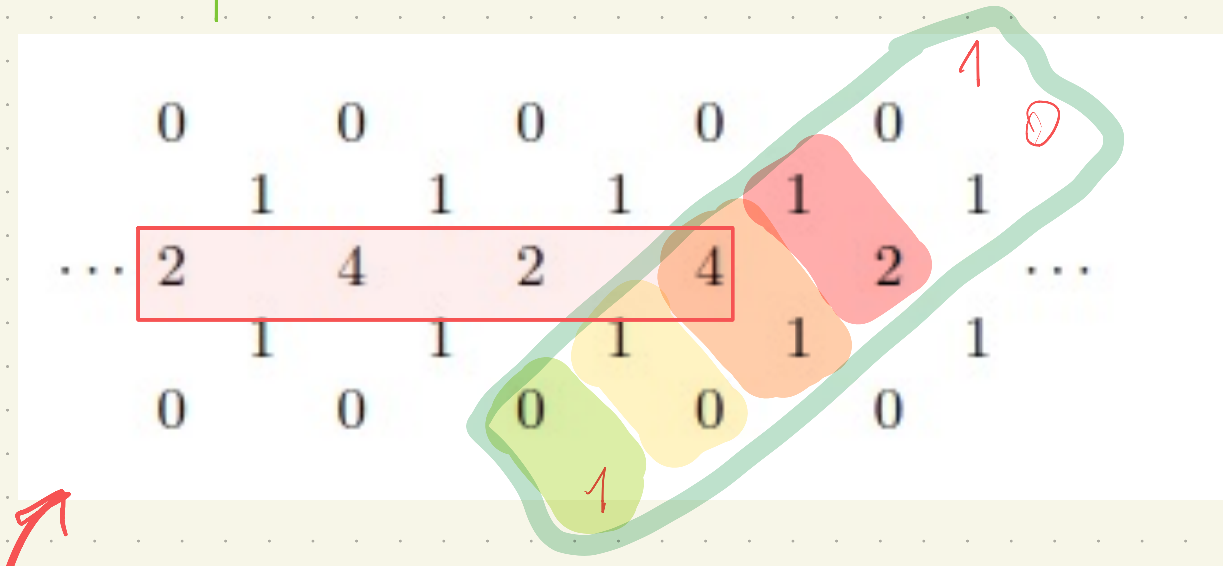
$|qr-ps|=1$

граф Фарея

Из статьи
Short, Van Son, Zabolotskii

Графы Фарея по модулю 2, 3, 4, 5, 6 ($\mathscr{F}_6$ нарисован на торе)

Пример:



2 4 2 4

mod m:
0, 1, 2, ..., m−1

$2+2\equiv 1 \pmod 3$

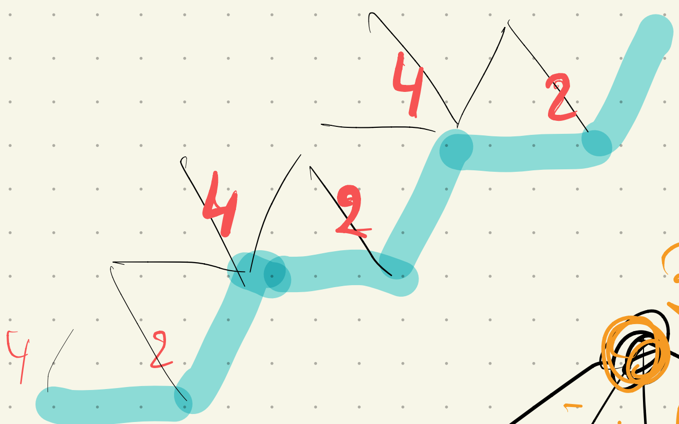
сравнимо

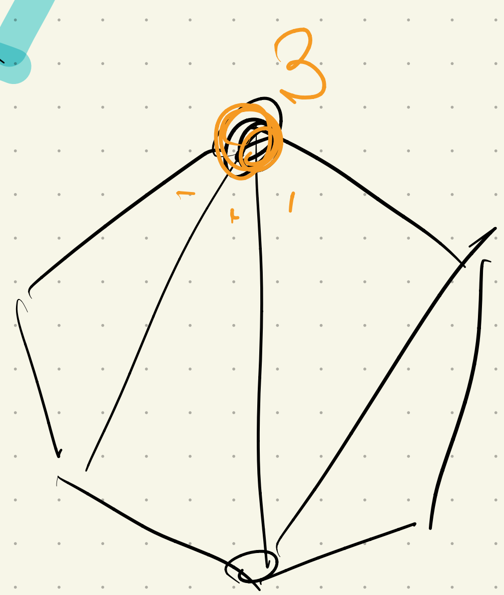
$ad-bc\equiv 1$ mod m

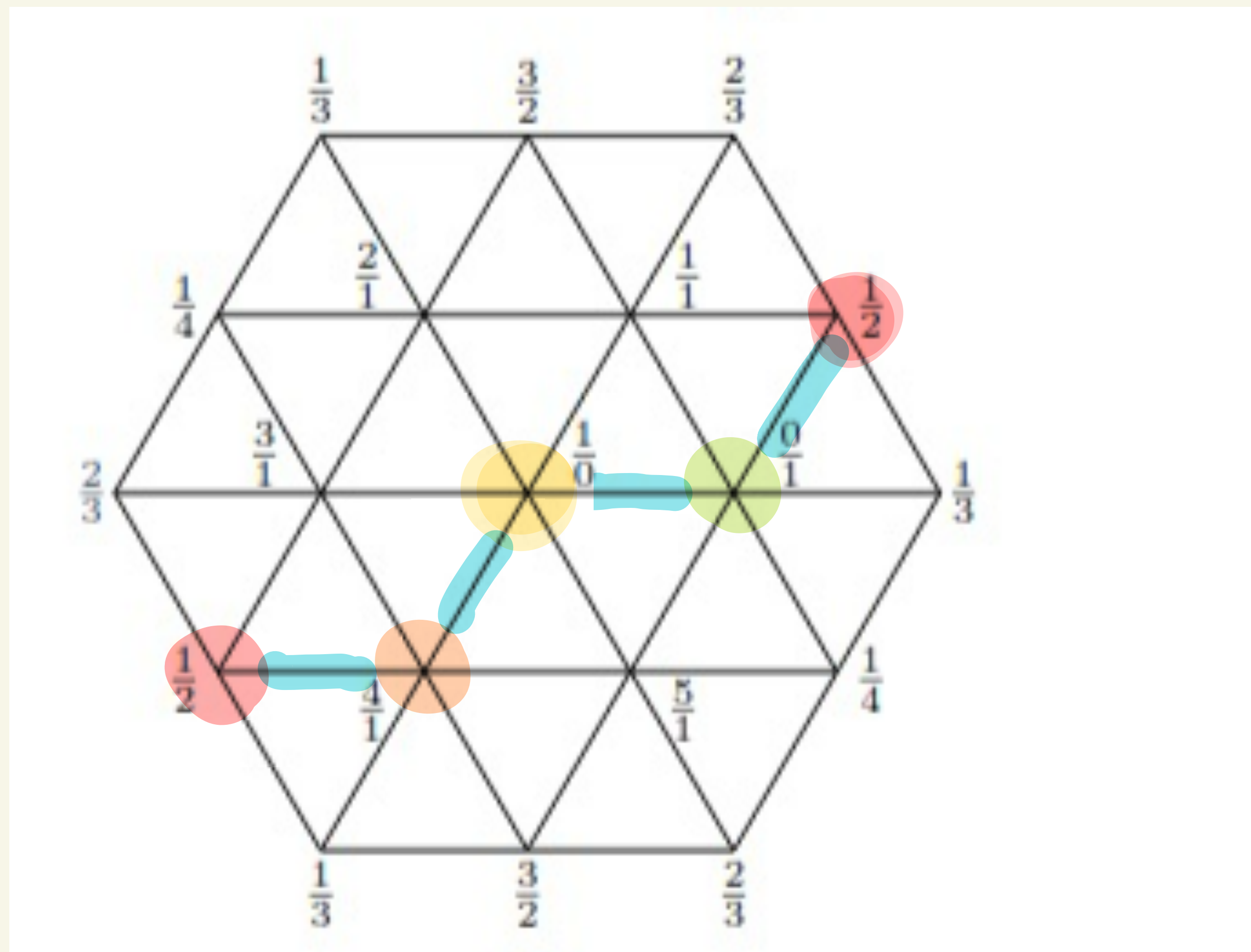
$\longrightarrow$

$a\ {}^{b}_{c}\ d$

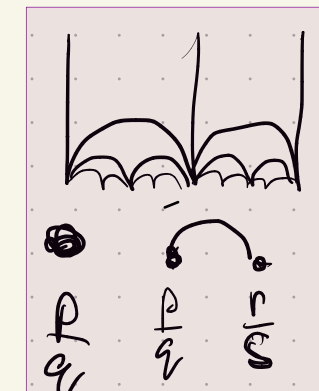
$ad-bc=1$







$\mathscr{F}_6$



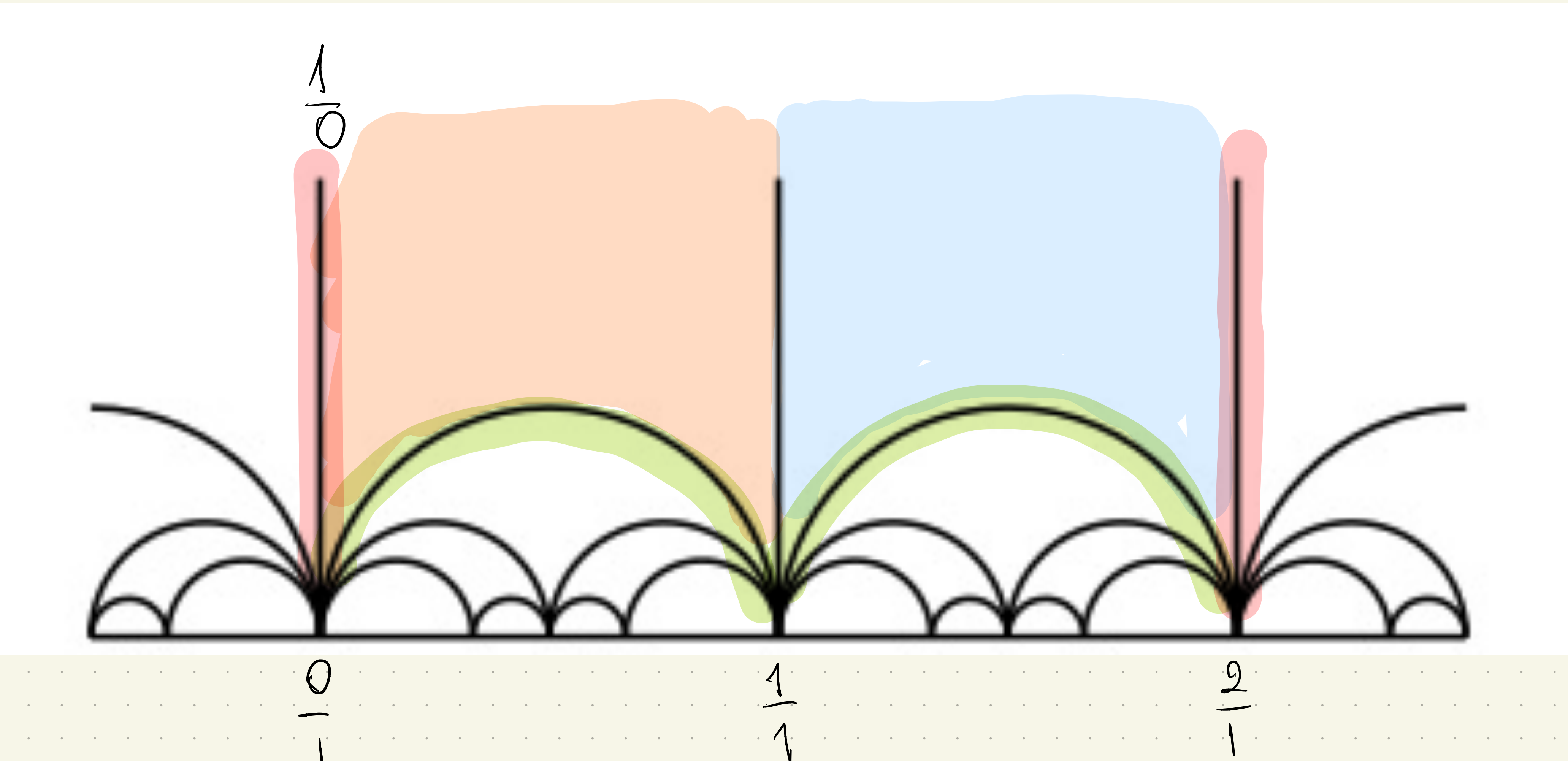
$|qr-ps|=1$

граф Фарея

Графы Фарея по модулю 2, 3, 4, 5, 6 ($\mathscr{F}_6$ нарисован на торе)

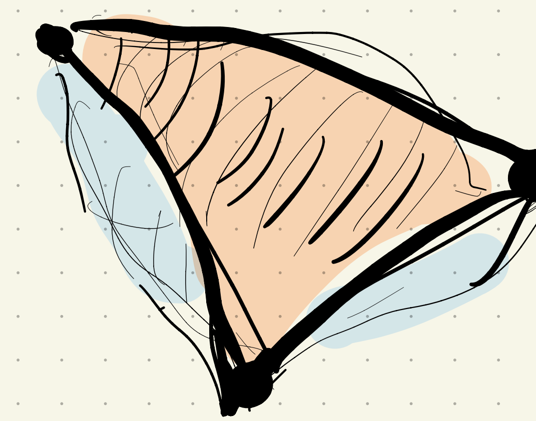
Граф Фарея классический и $\mathcal{F}_m$:

2

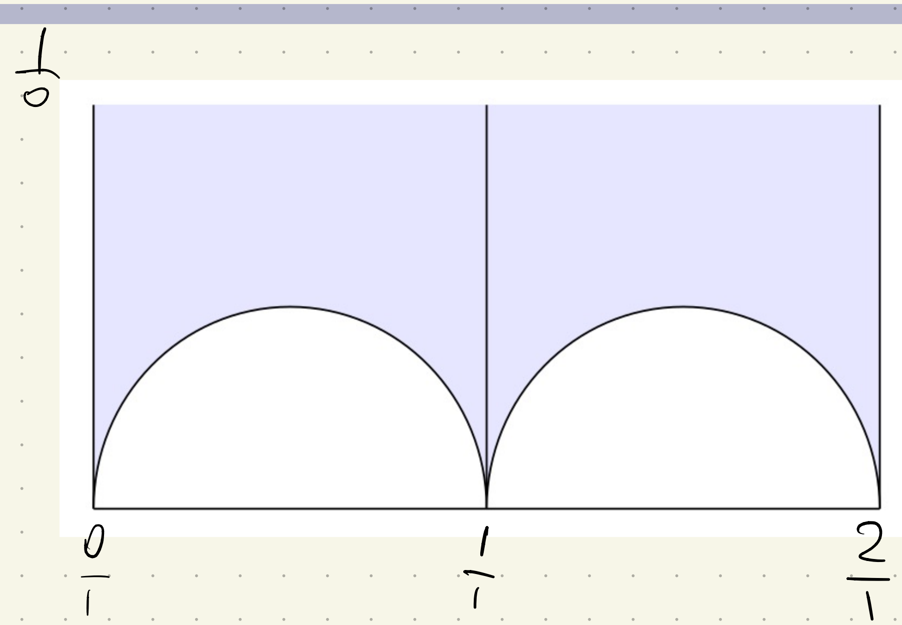


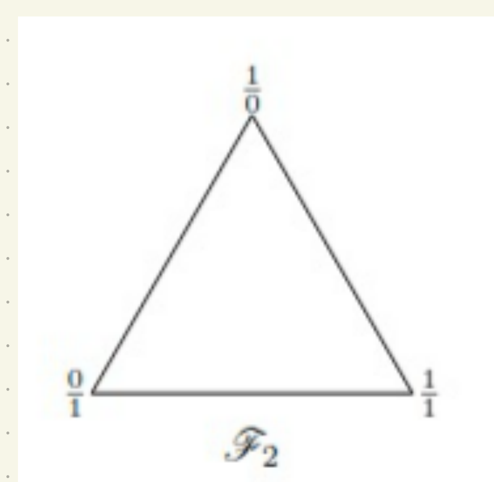
$\frac{2}{1} \equiv \frac{0}{1}$

$\longrightarrow$



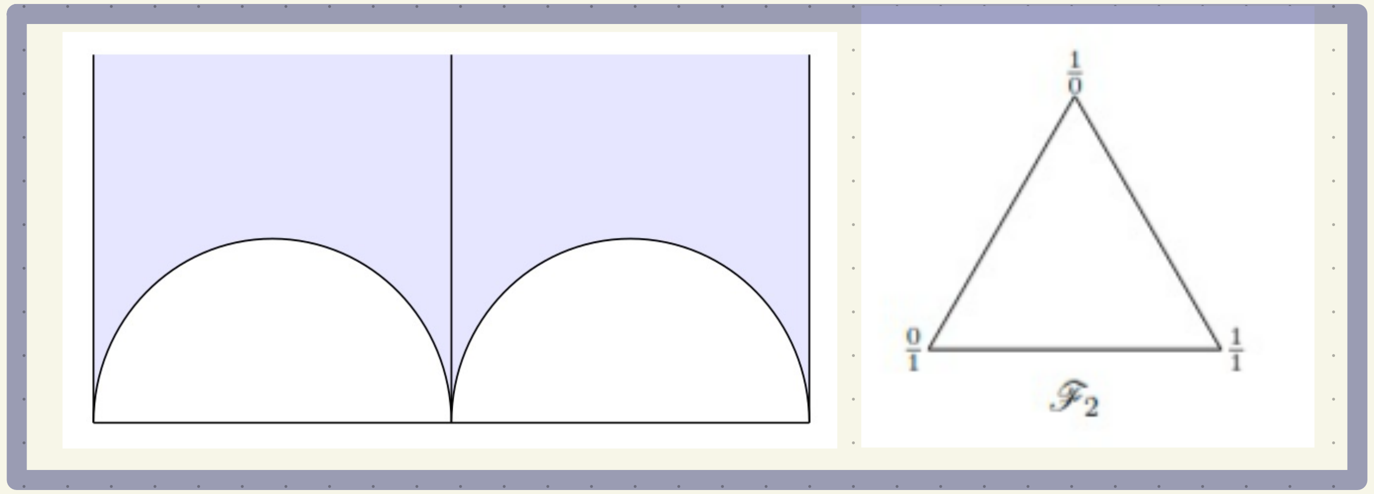
двусторонняя
треугольная
подушка

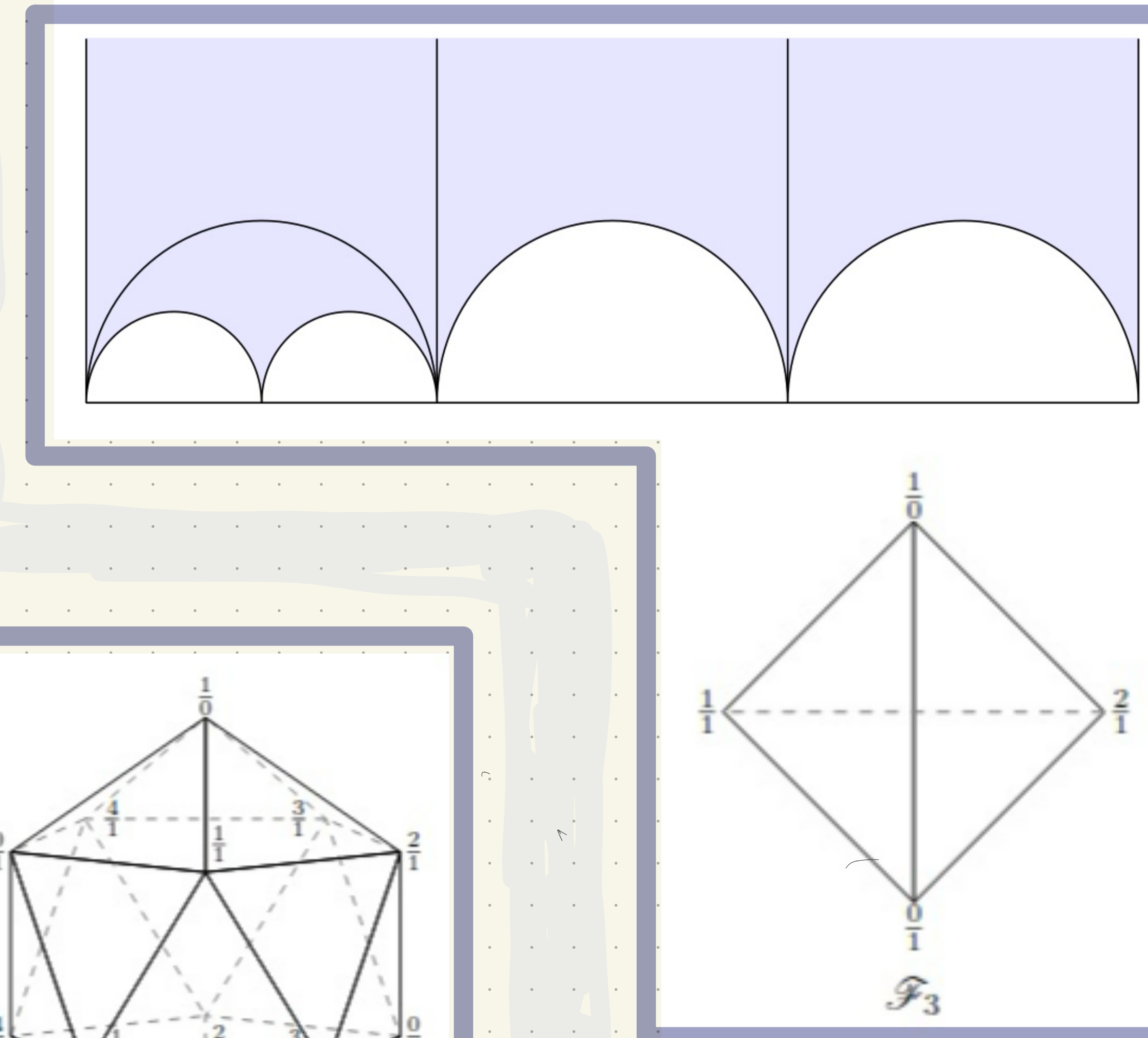


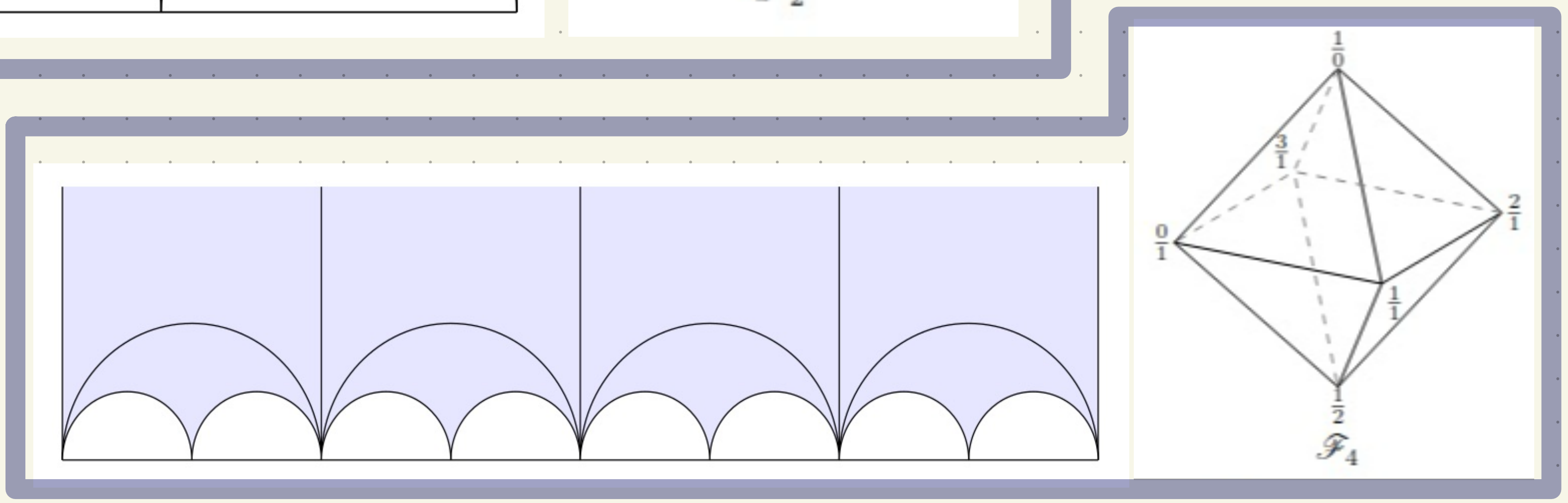


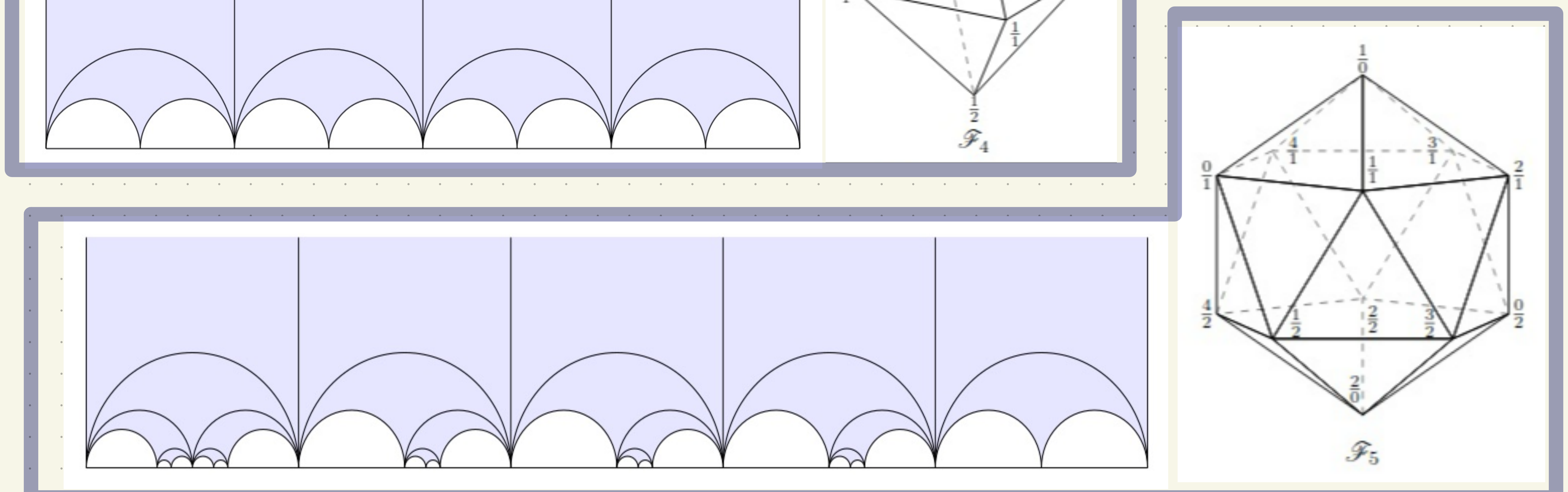
$\mathscr{F}_2$

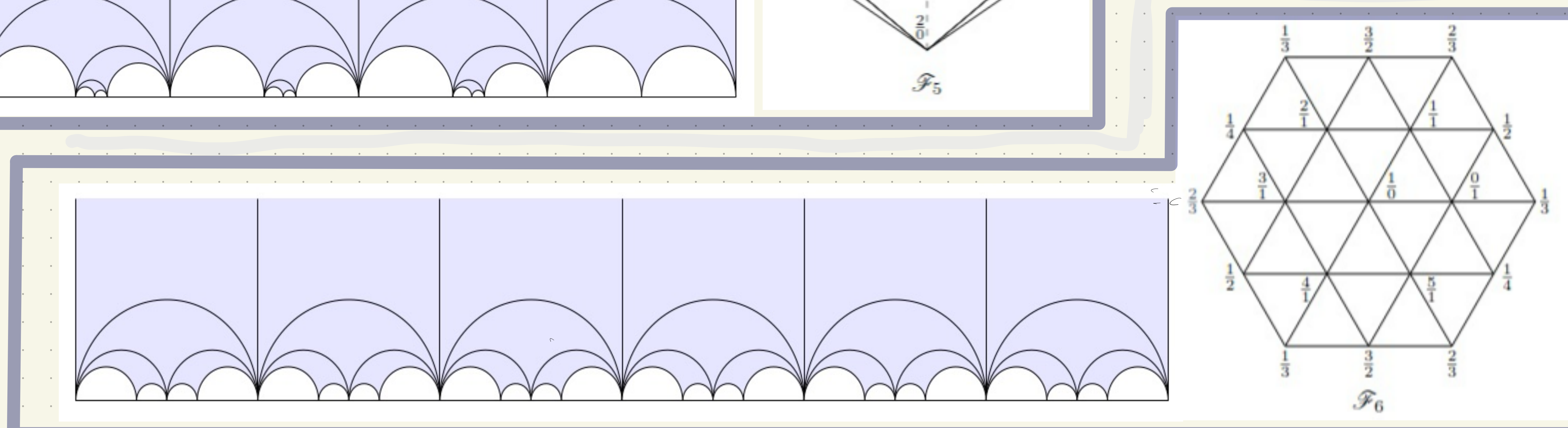
Граф Фарея классический и $\mathcal{F}_m$:











- Статья Short, Van Son, Zabolotskii — конец 2023
- Начало 2024! статья Konstanze Rietsch про обобщенные тональные сети

Пример на том же торе →

на каждом ребре — одна нота с одной стороны и одна с другой

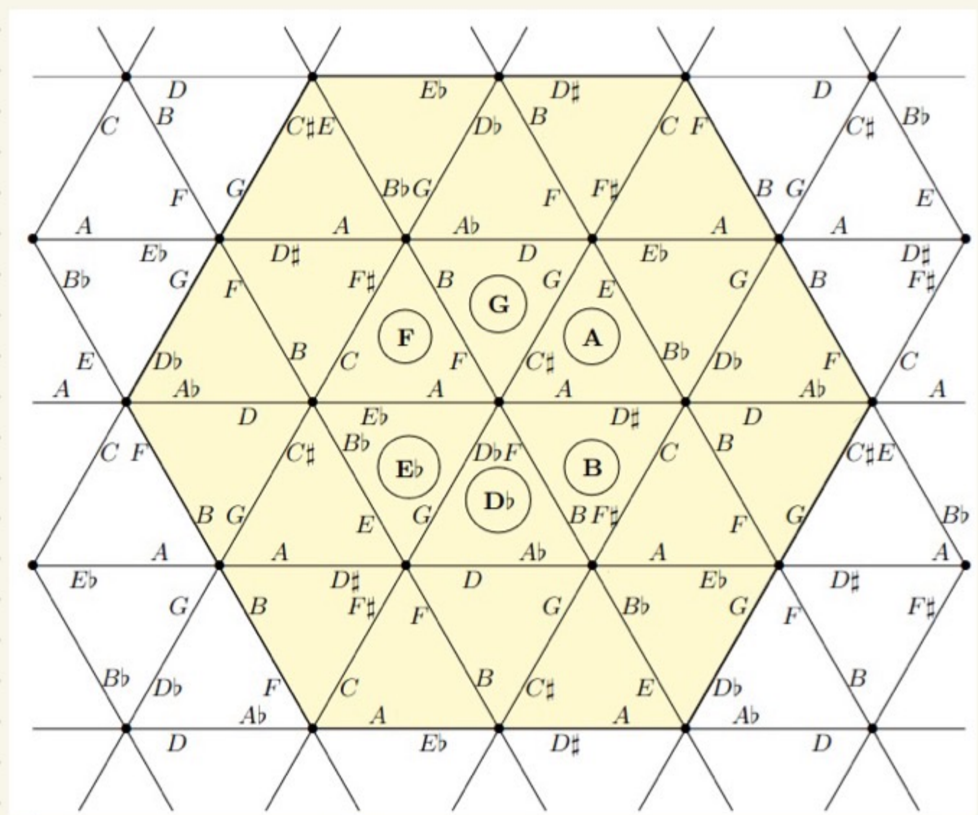
Обобщенная тональная сеть (Konstanze Rietsch)

[и другие работы]

- любая триангулированная поверхность
- вершины, ребра, треугольники — помечены наборами нот (аккордами)
- с некоторыми условиями, обеспечивающими симметрию, [или просто остатками от деления на 12 — или другое число]

A	ля
B	си
C	до
D	ре
E	ми
F	фа
G	соль

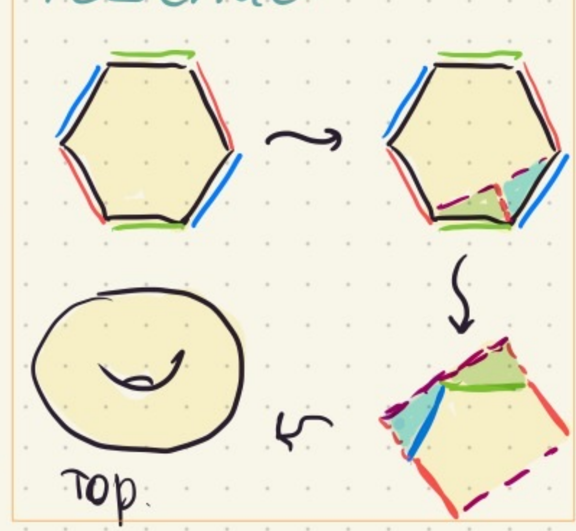
B	си
E	ми
A	ля
D	ре
G	соль
C	до
F	фа

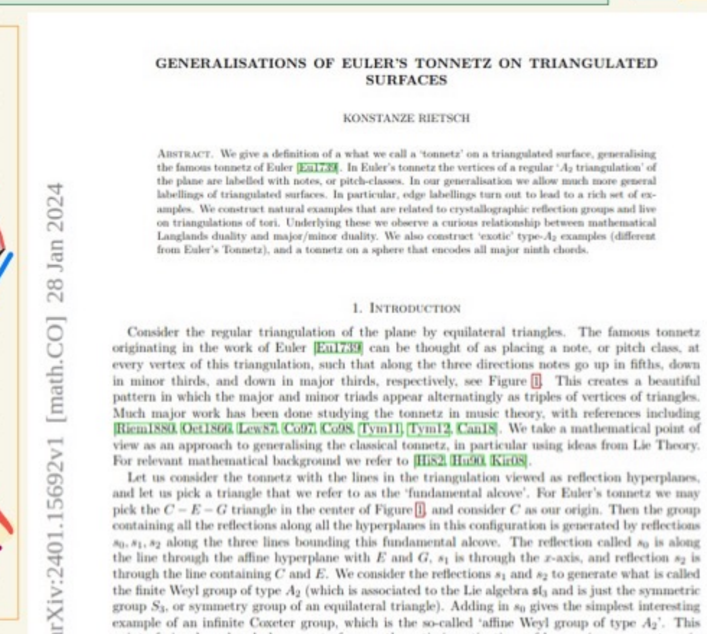


Пример обобщенного тоннетца

⑥ Какая поверхность получится, если склеить шестиугольник по одинаковым буквам?

Решение:





arXiv:2401.15692v1 [math.CO] 28 Jan 2024

GENERALISATIONS OF EULER'S TONNETZ ON TRIANGULATED SURFACES

KONSTANZE RIETSCH

Abstract. We give a definition of a what we call a 'tonnetz' on a triangulated surface, generalising the famous tonnetz of Euler [Eu1739]. In Euler's tonnetz the vertices of a regular 'A_2 triangulation' of the plane are labelled with notes, or pitch-classes. In our generalisation we allow much more general labellings of triangulated surfaces. In particular, edge labellings turn out to lead to a rich set of examples. We construct natural examples that are related to crystallographic reflection groups and live on triangulations of tori. Underlying these we observe a curious relationship between mathematical Langlands duality and major/minor duality. We also construct 'exotic' type-A_2 examples (different from Euler's Tonnetz), and a tonnetz on a sphere that encodes all major ninth chords.

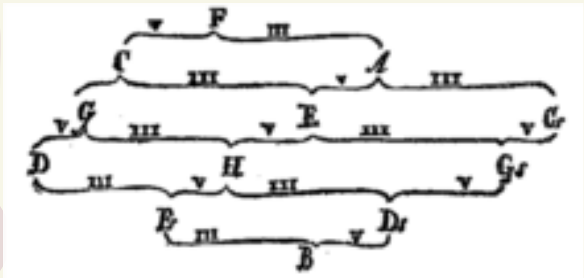
1. Introduction

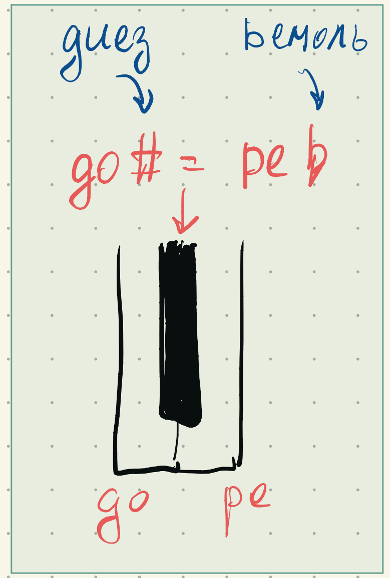
Consider the regular triangulation of the plane by equilateral triangles. The famous tonnetz originating in the work of Euler [Eu1739] can be thought of as placing a note, or pitch class, at every vertex of this triangulation, such that along the three directions notes go up in fifths, down in minor thirds, and down in major thirds, respectively, see Figure 1. This creates a beautiful pattern in which the major and minor triads appear alternatingly as triples of vertices of triangles. Much major work has been done studying the tonnetz in music theory, with references including [Riem1880, Oet1866, Lew87, Co97, Co98, Tym11, Tym12, Can18]. We take a mathematical point of view as an approach to generalising the classical tonnetz, in particular using ideas from Lie Theory. For relevant mathematical background we refer to [Hi82, Hu90, Kir08].

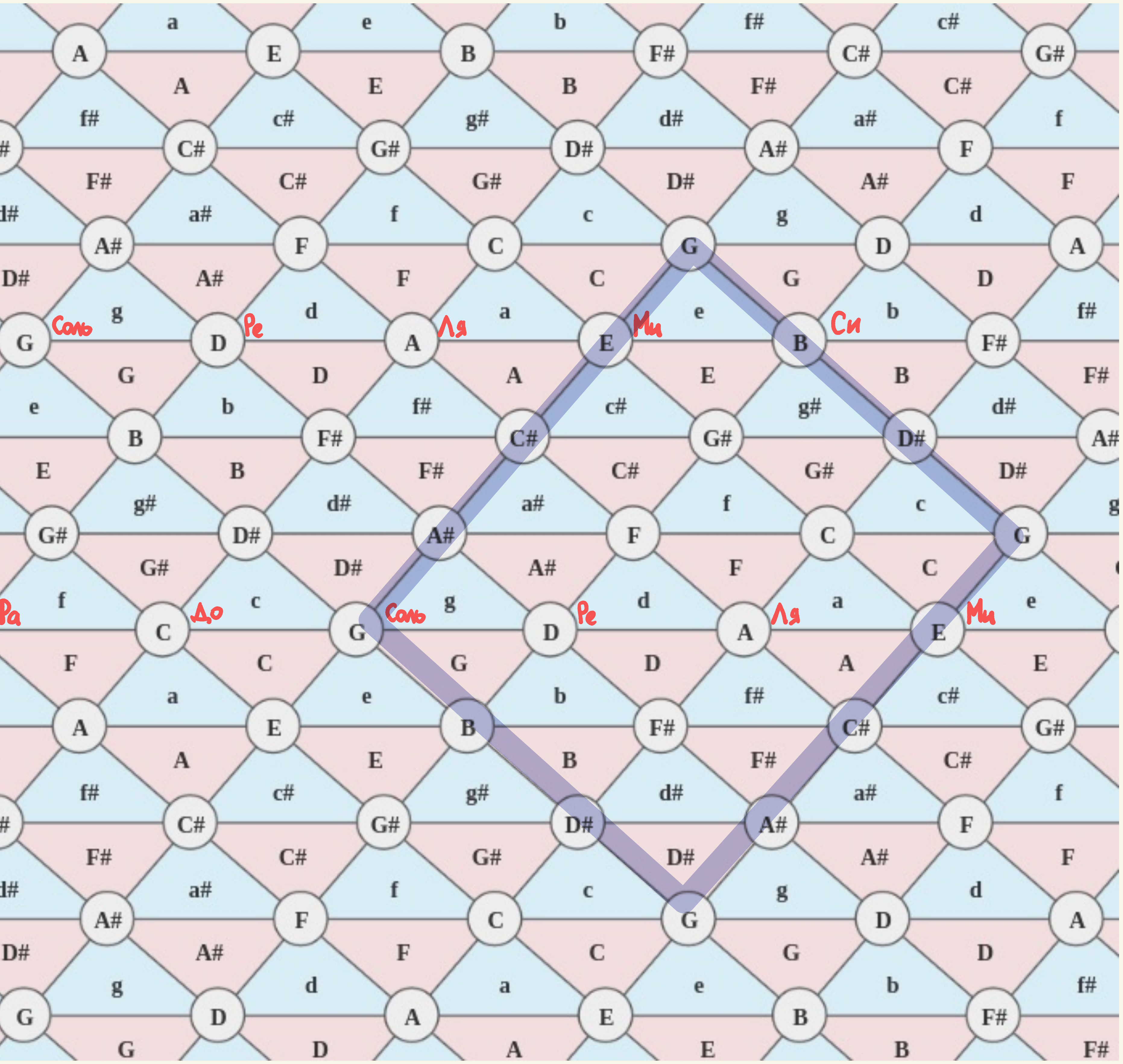
Let us consider the tonnetz with the lines in the triangulation viewed as reflection hyperplanes, and let us pick a triangle that we refer to as the 'fundamental alcove'. For Euler's tonnetz we may pick the $C-E-G$ triangle in the center of Figure 1, and consider C as our origin. Then the group containing all the reflections along all the hyperplanes in this configuration is generated by reflections s_0, s_1, s_2 along the three lines bounding this fundamental alcove. The reflection called s_0 is along the line through the affine hyperplane with E and G, s_1 is through the x-axis, and reflection s_2 is through the line containing C and E. We consider the reflections s_1 and s_2 to generate what is called the finite Weyl group of type A_2 (which is associated to the Lie algebra $\mathfrak{sl}_3$ and is just the symmetric group S_3, or symmetry group of an equilateral triangle). Adding in s_0 gives the simplest interesting example of an infinite Coxeter group, which is the so-called 'affine Weyl group of type A_2'. This

Тональная сеть Эйлера (Euler's Tonnetz)

Эйлер, 1739

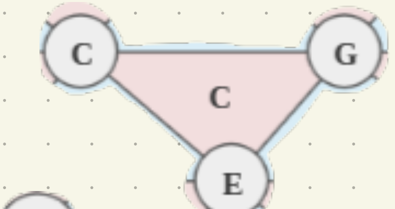
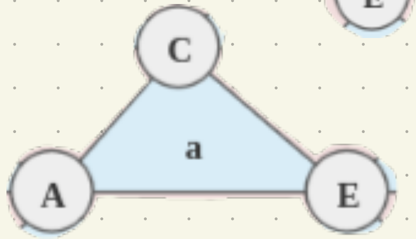
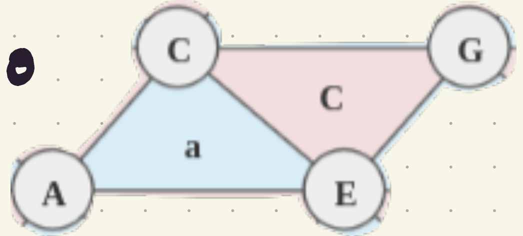






- В узлах – ноты
- В треугольниках: трезвучия (аккорды из трёх нот, определяющие тональность)

B	си
E	ми
A	ля
D	ре
G	соль
C	до
F	фа

-  мажор
-  минор
-  мажор и параллельный минор

③ Найдите квинтово-квартовый круг.

Решение: любая строка

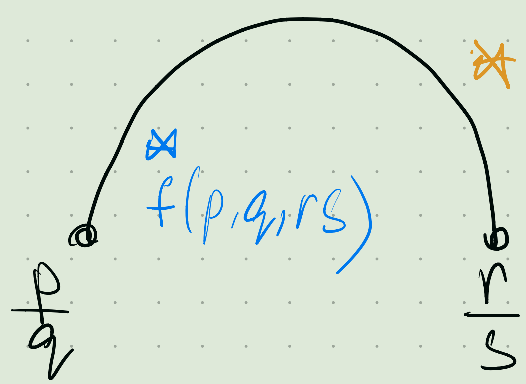
Вопрос: можно ли граф Фарея использовать для построения "хорошей" тональной сети?

- содержащей много тональностей/аккордов
- с какой-нибудь регулярностью

Возможная конструкция

* На классическом графе Фарея

На ребре



* $f(r,s,p,q)$

пишем $f(p,q,r,s) \mod m$

↑ многочлен, например p^2+q^4-rs

* Если

$$f(p,q,r,s) = f(p^2, q^2, r^2, s^2, ps, rq) \mod m$$

Получится функция на $\mathcal{F}_m$ (совпадет на ребрах, которые отождествили)

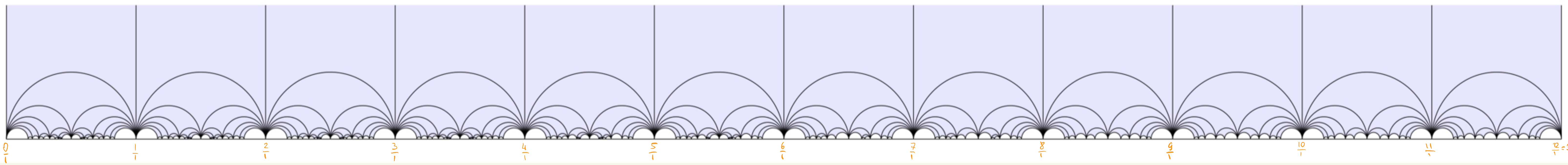
* Если $m=12$, то используя

сможем "услышать" f.

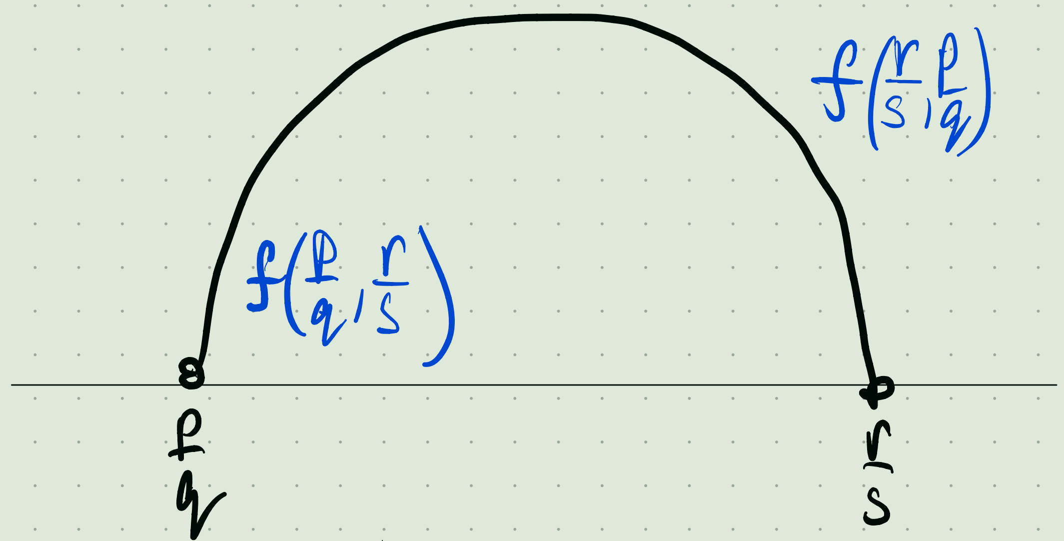
Пример: звуки на $\mathcal{F}_{12}$

(сфера с 22 ручками и 48 проколами)

$\Gamma = 192 = 12\cdot 16$, $P = \frac{3\Gamma}{2} = 288$, $B = \frac{2P}{12} = \frac{P}{6} = 48$



Рассмотрим

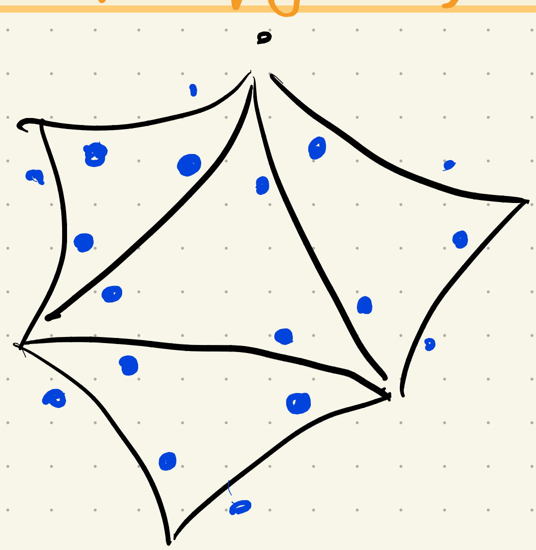


где

$$f(p,q,r,s) = f(p^2, q^2, r^2, s^2, ps, rq) \mod 12$$

Получится функция на $\mathcal{F}_{12}$

→

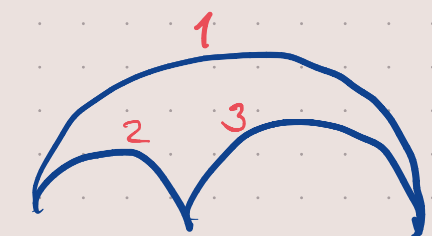


3 числа mod 12 в каждом треугольнике → аккорд

Какая функция хорошая?

Попробуем послушать:

- играем аккорды в 192 треугольниках сверху вниз



- лучший звук НЕ соответствует более симметричным функциям

Что хотелось бы сделать:

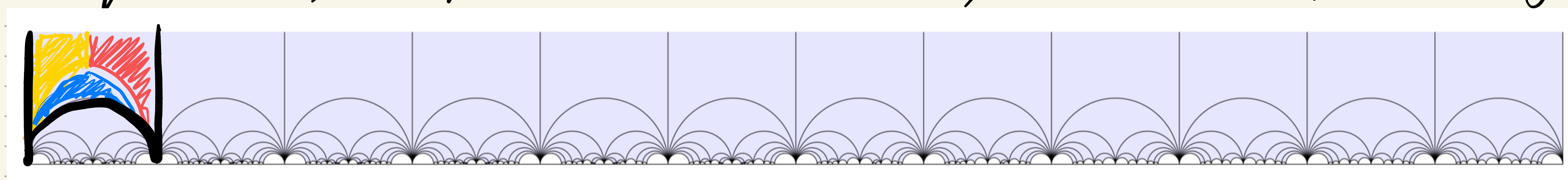
Улучшить звук

Попробовать много разных функций — поискать, какие дают больше хороших аккордов?

- Трезвучия
- септаккорды
- джазовые аккорды

Сделать чтобы функцию задавал пользователь (и сразу мог послушать)

Картинка, окрашивающаяся, пока играет звук



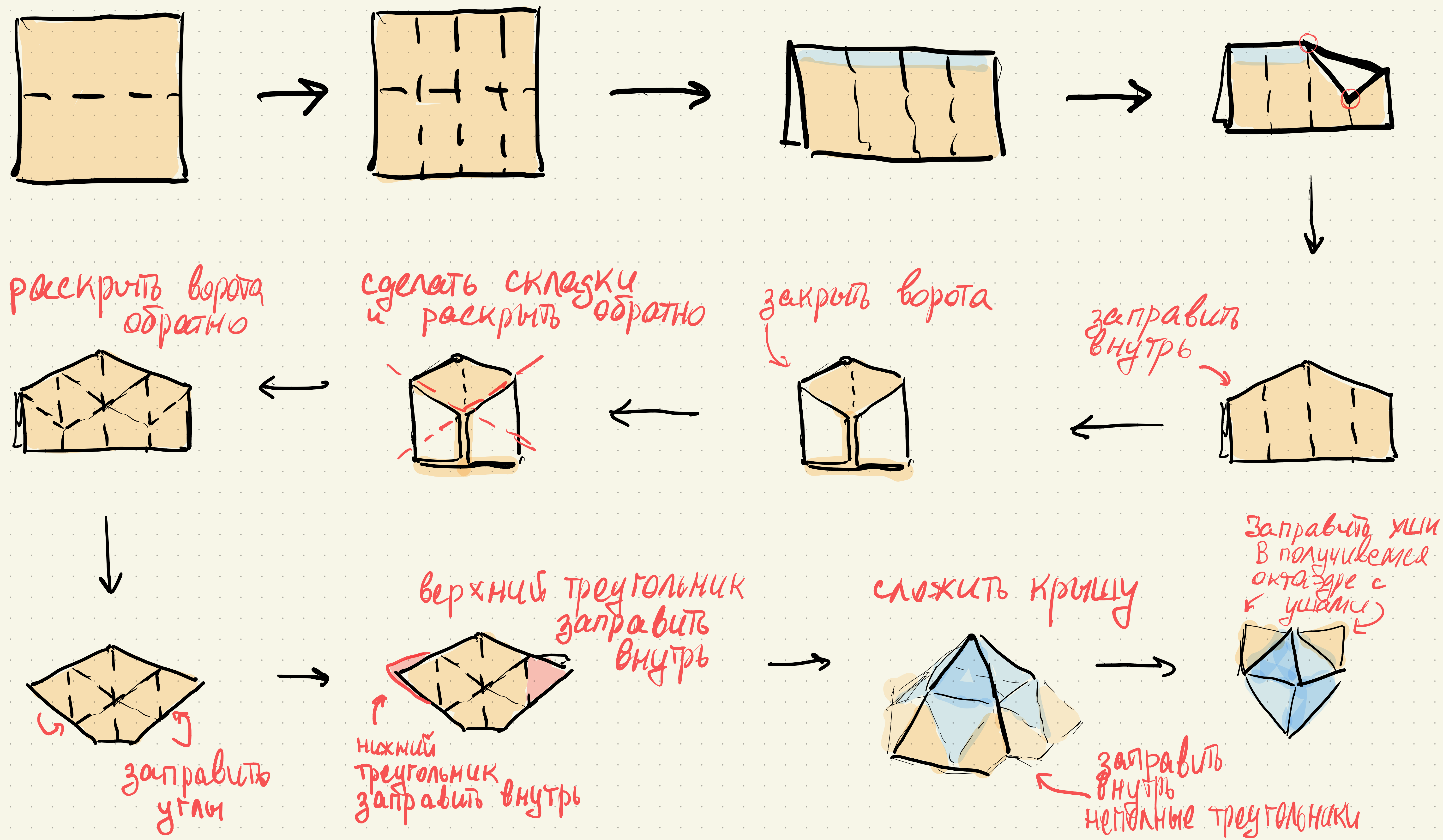
(оставляющее сыгранное окрашенным но бледно)

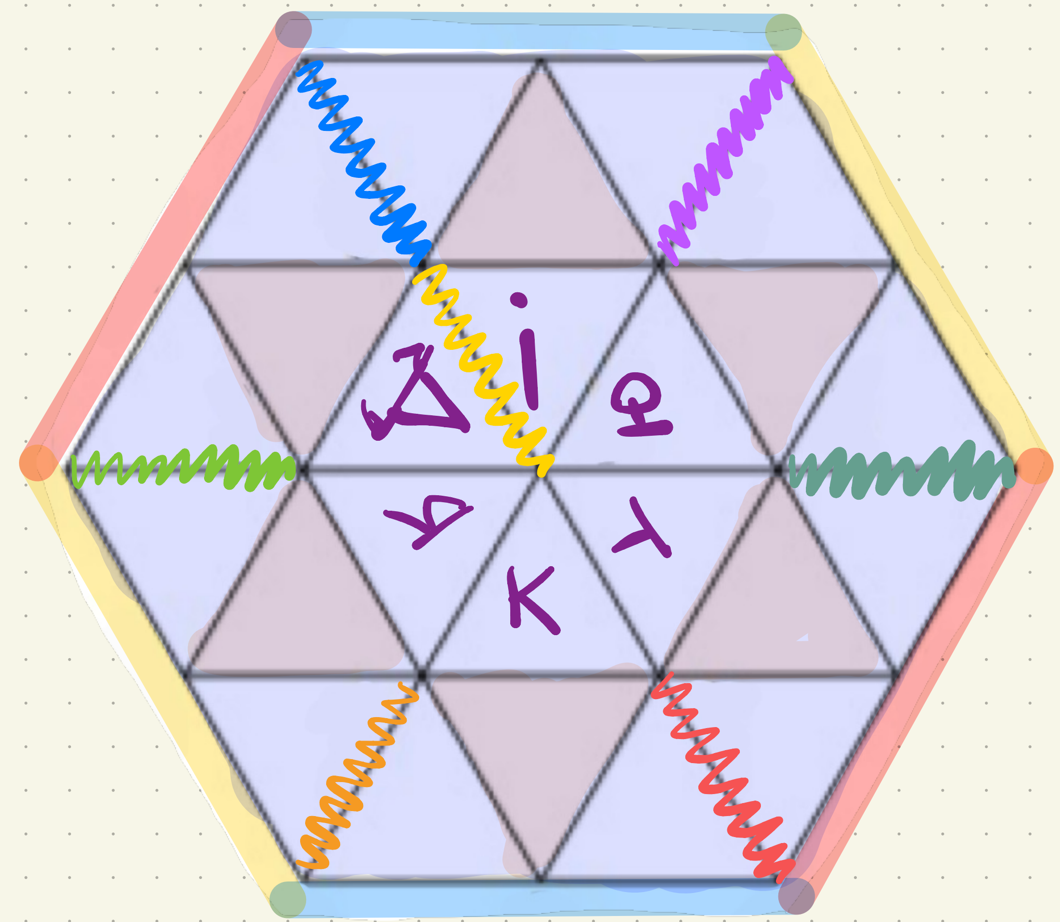
Сделать, чтобы пользователь мог выбрать цвета, соответствие цветов числам, соответствие нот числам.

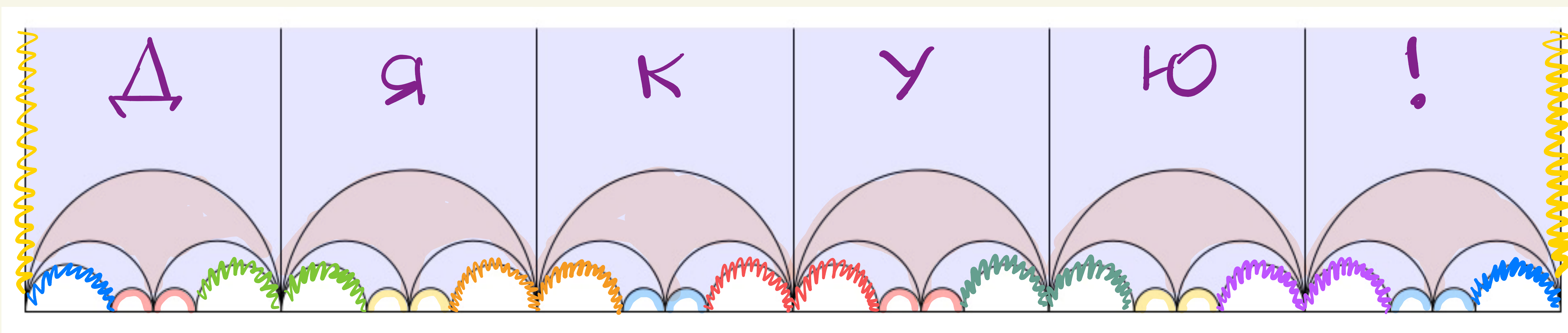
Поезд: запустить по гиперболической прямой поезд с равномерной гиперболической скоростью что услышит пассажир?

стартовую точку и направление выбирает пользователь

Оригами : октаэдр







Д
я
к
у
ю
!