Inleiding tensorrekening

28-10-91 versie 2.0, 26-09-95 versie 3.0

Contents

Inleiding

Deze syllabus bevat een uitleg over tensorrekening voor studenten met een basiskennis lineaire algebra. De aandacht ligt vooral bij het aanleren van het begrip van de principes en ideeën die ten grondslag liggen aan het begrip tensor. Er is niet gestreefd naar een zeer streng wiskundige aanpak of volledigheid (zie hiervoor evt. de bibliografie). Alhoewel tensoren hun toepassing vinden in zeer uiteenlopende takken van de natuur- en wiskunde wordt in deze syllabus vooral de nadruk gelegd op de toepassing ervan in de speciale en algemene relativiteitstheorie.

Onze dank gaat uit naar alle mensen, waaronder met name G. Bäuerle, die eerdere versies van dit manuscript zorgvuldig hebben gelezen en van nuttig commentaar hebben voorzien.

Chapter 1

De kernindexnotatie

Voordat we beginnen met het hoofdonderwerp van deze syllabus, de tensoren, zullen we eerst het een en ander veranderen aan de tot nu toe gebruikelijke manier van noteren van rekenkundige bewerkingen met vectoren en matrices. Het blijkt namelijk dat dit in het algemeen een stuk handiger kan. Om dit duidelijk te maken zullen we alle bewerkingen (optellen, vermenigvuldigen etc.) omschrijven naar de nieuwe notatie.

Laten we daartoe een vectorruimte nemen met een dimensie n. De componenten van de vectoren duiden we aan met de getallen $v_1, \ldots, v_n$. Als je de basis waarop je de componenten baseert verandert, dan veranderen de componenten van de vectoren. We kunnen zo'n transformatie beschrijven met een matrix A, waarvan je de kolommen kunt voorstellen als de oude basisvectoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, uitgedrukt in de nieuwe basis $\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$: (In het volgende hoofdstuk komen we uitgebreid terug op transformatie van vectoren. Hier gaat het eigenlijk uitsluitend om de vermenigvuldiging van een vector met een matrix)

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Merk op dat de eerste index van A dus het nummer van de rij aangeeft en de tweede index het nummer van de kolom.

Volgens de regels van de matrixvermenigvuldiging staat hier dus dat:

$$\begin{array}{ccccccccc} v_1' & = & A_{11}\cdot v_1 & + & A_{12}\cdot v_2 & + & \cdots & + & A_{1n}\cdot v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ v_n' & = & A_{n1}\cdot v_1 & + & A_{n2}\cdot v_2 & + & \cdots & + & A_{nn}\cdot v_n \end{array} \tag{1.2}$$

oftewel

$$\begin{array}{ccc} v_1' & = & \sum_{\nu=1}^{n} A_{1\nu} v_\nu \\ \vdots & & \vdots \\ v_n' & = & \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu} v_\nu \end{array} \tag{1.3}$$

of nog korter:

$$v'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} v_\nu \qquad (\forall \mu \in \mathsf{N} \quad | \quad 1 \le \mu \le n) \tag{1.4}$$

In deze formule hebben we de essentie van de matrixvermenigvuldiging gevat. De index ν heet in deze formule een dode of dummy index, μ heet de lopende index. De namen voor de indices, in dit geval μ ('mu') en ν ('nu'), zijn geheel willekeurig gekozen. Ze hadden net zo goed α en β kunnen heten:

$$v'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} v_\beta \qquad (\forall \alpha \in \mathsf{N} \quad | \quad 1 \le \alpha \le n) \tag{1.5}$$

Meestal worden de voorwaarden voor μ (in vgl. (1.4)) of α (in vgl. (1.5)) er niet bij gezet omdat ze uit de context blijken.

De volgende beweringen zijn dan ook equivalent:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{v} & = & \vec{y} & \Leftrightarrow & v_\mu = y_\mu & \Leftrightarrow & v_\alpha = y_\alpha \\ \vec{v} & = & A\vec{y} & \Leftrightarrow & v_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} y_\nu & \Leftrightarrow & v_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu} y_\mu \end{array} \tag{1.6}$$

Deze *indexnotatie* is ook toepasbaar op andere bewerkingen, bijvoorbeeld het inproduct. Neem twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$, dan hebben we het inproduct gedefinieerd als[1]:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n = \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu w_\mu \tag{1.7}$$

Behalve dit soort bewerkingen is het ook natuurlijk mogelijk om de som van matrices en vectoren te geven:

$$\begin{array}{rcc} C = A + B & \Leftrightarrow & C_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \\ \vec{z} = \vec{v} + \vec{w} & \Leftrightarrow & z_\alpha = v_\alpha + w_\alpha \end{array} \tag{1.8}$$

of het verschil:

$$\begin{array}{rcc} C = A - B & \Leftrightarrow & C_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} \\ \vec{z} = \vec{v} - \vec{w} & \Leftrightarrow & z_\alpha = v_\alpha - w_\alpha \end{array} \tag{1.9}$$

▷ **Maak nu opgaven 1 t/m 6.**

Uit de opgaven is gebleken dat de somtekens altijd aan het begin van de formule gezet mogen worden en dat hun volgorde er verder niet toe doet. We kunnen dus in feite volstaan met het noteren van de formule *zonder* somtekens, als we van tevoren hebben afgesproken over welke indices we sommeren, bijvoorbeeld door ze achter de formule te zetten:

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} v_\nu & \rightarrow & A_{\mu\nu} v_\nu & & \{\nu\} \\ \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\delta} & \rightarrow & A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\delta} & & \{\beta, \gamma\} \end{array} \tag{1.10}$$

Nu kun je uit de opgaven al enigszins het vermoeden krijgen dat:

[1] We komen straks nog uitvoerig op het inproduct terug. Het gaat er hier alleen even om dat je ziet wat je met de indexnotatie kan doen.

- Vrijwel nooit wordt gesommeerd over een index die slechts 1 keer in een product voorkomt.
- Vrijwel altijd wordt gesommeerd over een index die 2 keer voorkomt in een product.
- Een index vrijwel nooit meer dan 2 keer voorkomt in een product.

Als je vaak rekent met de indexnotatie, dan wordt je snel geïrriteerd van het iedere keer opschrijven van de lijst met indices waarover je moet sommeren. Je weet uit ervaring (zie de bovenstaande 3 punten) toch wel over welke indices je moet sommeren. Je komt dan zelf wel op het idee om af te spreken dat, indien het tegendeel niet expliciet staat vermeld:

- automatisch wordt gesommeerd over alle indices die 2 keer in een product voorkomen.
- *niet* gesommeerd wordt over indices die slechts 1 keer voorkomen in een product.

Voortaan schrijven we de formule dus op zonder de somtekens en zonder de lijst met indices. Deze afspraak heet de *sommatieconventie van Einstein*. De indexnotatie samen met de sommatieconventie noemen we de *kern*indexnotatie. (Als we het helemaal netjes willen doen is dit niet correct. De kernindexnotatie behelst meer dan alleen het aanduiden van componenten met indices en het toepassen van de sommatieconventie. Voor meer informatie verwijzen we naar [4]). We krijgen dus:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} v_\nu \quad &\rightarrow \quad A_{\mu\nu} v_\nu \\ \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\delta} \quad &\rightarrow \quad A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\delta} \end{aligned} \tag{1.11}$$

$\triangleright$ **Je kunt nu opgaven 7 t/m 10 maken**.

Chapter 2

Bases, co- en contravariante vectoren

In dit hoofdstuk introduceren we een nieuw soort vector, die van essentieel belang is voor de rest van het verhaal.

Om je alvast te laten wennen laten we eerst op een intuïtieve manier zien wat je je moet voorstellen bij deze nieuwe vector. Daarna gaan we de zaak op een wiskundige manier bekijken.

2.1 Intuïtief

De ruimte om ons heen kunnen we in kaart brengen met behulp van een coördinatenstelsel. Fysische objecten (bv. pijlvectoren) in die ruimte kunnen we dan beschrijven in termen van de basisvectoren behorende bij dit stelsel (zo'n beschrijving heeft nog wat voeten in de aarde, maar daar gaan we nu niet op in). In deze paragraaf gaan we kijken naar wat er gebeurt met die coördinaten als we een andere set basisvectoren kiezen, dus, wat er gebeurt bij een basistransformatie.

Bij een beschrijving met coördinaten moeten we goed bedenken dat de coördinaten op zich niets betekenen. Pas als de bijbehorende basisvectoren bekend zijn krijgen ze betekenis. Belangrijk is ook dat het object dat je beschrijft niet afhankelijk is van het coördinatenstelsel dat je kiest: als we een pijl beschrijven door gewone coördinaten verandert er niets aan *de pijl zelf* als we op poolcoördinaten overgaan.

Laten we zo'n basistransformatie eens opschrijven:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{e}_1{}' & = & a_{11}\vec{e}_1 & + & a_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' & = & a_{21}\vec{e}_1 & + & a_{22}\vec{e}_2 \end{array} \tag{2.1}$$

Dit zouden we als een soort vermenigvuldiging van een 'vector' met een matrix kunnen zien, mits we voor de componenten van die 'vector' de basisvectoren nemen. Als we de matrixelementen met woorden omschrijven wordt het dus iets als:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{projectie van } \vec{e}_1{}' \text{ op } \vec{e}_1 & \text{projectie van } \vec{e}_1{}' \text{ op } \vec{e}_2 \\ \text{projectie van } \vec{e}_2{}' \text{ op } \vec{e}_1 & \text{projectie van } \vec{e}_2{}' \text{ in } \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

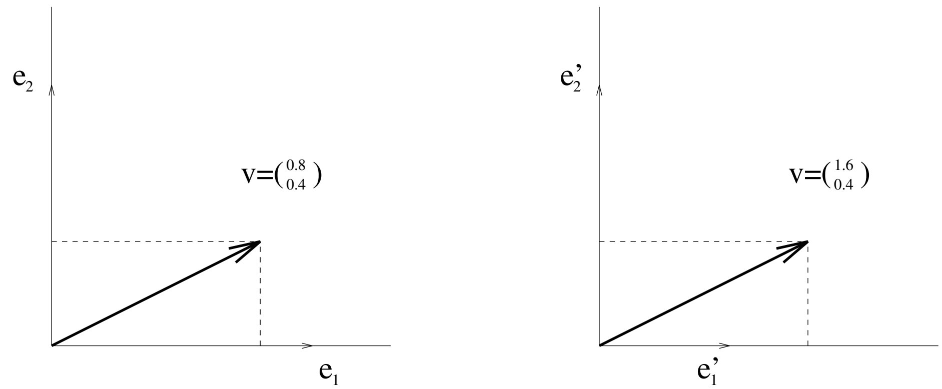

Figure 2.1: basisvector $\vec{e}_1{}' = \frac{1}{2}\vec{e}_1 \rightarrow v_1{}' = 2v_1$

Let op dat de basisvector-kolommen $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ dus GEEN vectoren zijn, maar slechts een manier om het geheel makkelijk op te schrijven!

We kunnen ook kijken naar wat er gebeurt met de componenten van een VECTOR als we een ander stelsel basisvectoren nemen. Uit de lineaire algebra weten we dat we de transformatiematrix van een vector krijgen door de in de kolommen van die matrix de oude basisvectoren te zetten, uitgeschreven op de nieuwe basis. Als we dat met woorden omschrijven op een manier zoals hierboven komt er:

$$\begin{pmatrix} v_1{}' \\ v_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{projectie van } \vec{e}_1 \text{ op } \vec{e}_1{}' & \text{projectie van } \vec{e}_2 \text{ op } \vec{e}_1{}' \\ \text{projectie van } \vec{e}_1 \text{ op } \vec{e}_2{}' & \text{projectie van } \vec{e}_2 \text{ op } \vec{e}_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Duidelijk is dat de matrices uit vgl. (2.2) en vgl. (2.3) *niet* hetzelfde zijn.

We willen nu de basistransformatie-matrix uit vgl. (2.2) vergelijken met de coördinaten-transformatie-matrix uit vgl. (2.3). Daartoe vervangen we alle geaccentueerde elementen in de matrix uit vgl. (2.3) door niet geaccentueerde elementen en andersom. Vergelijking met de matrix in vgl. (2.2) laat zien dat we ook nog de transponent van de matrix moeten nemen. Dus, als we de matrix uit vgl. (2.2) Λ noemen, is vgl. (2.3) equivalent met:

$$\vec{v}' = (\Lambda^{-1})^T \vec{v} \tag{2.4}$$

De gewone vectoren noemt men, om de reden dat ze 'tegenovergesteld' transformeren als de basisvector-kolommen, nu ook wel 'contravariante vectoren'. Dat er een verschillend gedrag moet zijn is intuïtief ook wel duidelijk: als we een 'pijl' hebben beschreven door coördinaten en daarna de basisvectoren veranderen, moeten de coördinaten natuurlijk 'tegengesteld' veranderen, om toch hetzelfde object op te leveren (zie figuur 2.1).

Naar aanleiding van deze twee verschillende transformatiewijzen kunnen we nu zoeken naar objecten die, in tegenstelling tot vectoren, hetzelfde transformeren als de basisvector-kolommen. In een eenvoudig geval, waarbij bijvoorbeeld de basisvector $\vec{e}_1{}'$ gelijk wordt aan $\frac{1}{2} \times \vec{e}_1$ moet dus de eerste coördinaat van dit object ook $\frac{1}{2}$ maal zo groot worden. Maar dat is juist wat er gebeurt met de coördinaten van een gradiënt van een scalarfunctie! We hebben het daarbij namelijk over de verandering van een functiewaarde per eenheid

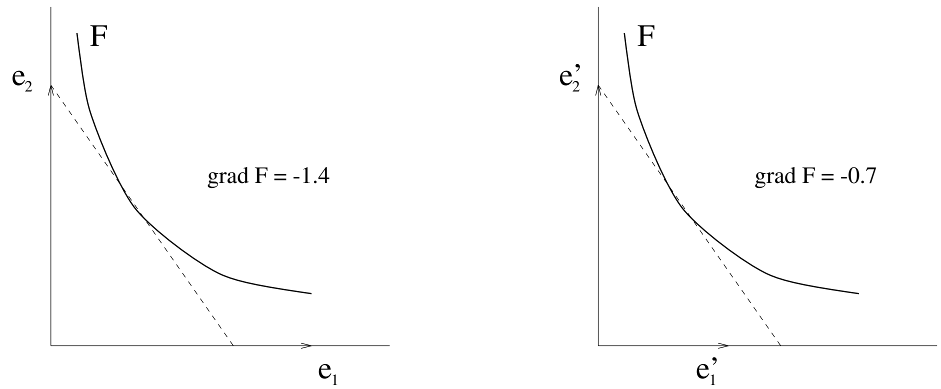

Figure 2.2: basisvector $\vec{e}_1{}' = \frac{1}{2}\vec{e}_1 \rightarrow \vec{\nabla} f' = \frac{1}{2}\vec{\nabla} f$

verandering in de richting van een basisvector. Als de 'eenheid' nu ineens een veel kleiner gedeelte van de ruimte beslaat (dus, als de basisvector korte wordt), betekent dit dat de gradiënt kleiner wordt (zie fig. 2.1 voor een 1 dimensionaal voorbeeld). Een gradiënt, die we tot nu toe altijd als een vector hebben gezien, heet vanaf nu dan ook een 'covariante vector'. Hij transformeert hetzelfde als de basisvector-kolommen.

Het feit dat gradiënten vrijwel altijd als vectoren werden behandeld komt omdat bij gewone transformaties van het ene naar het andere cartesische coördinatenstelsel de matrices Λ en $(\Lambda^{-1})^T$ hetzelfde zijn (ga dat bijvoorbeeld na voor een eenvoudige rotatie (opgave 1), of maak opgave 2). Het verschil tussen co- en contravariante transformatie is dan volledig verdwenen. In de speciale relativiteitstheorie is dit echter niet het geval: de getransponeerde inverse matrix van de zuivere lorentztransformatie is zeker niet hetzelfde als de transformatiematrix zelf (ga dat na, kleine oefening in matrixinversie).

2.2 Mathematisch

Nu we met een natte vinger methode hebben gevonden wat het verschil is tussen de transformatie van een vector en de transformatie van een gradiënt zullen we er nog eens op een meer wiskundige manier naar kijken.

We definiëren de gradiënt van een functie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$(\nabla f)_\mu := \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \tag{2.5}$$

Het verschil in transformatie zullen we laten zien aan de hand van de eenvoudigste soort transformaties: de homogeen lineaire (dat hebben we in de vorige paragraaf ook gedaan, we hebben daar immers alle transformaties met matrices beschreven). In het algemeen kan zo'n transformatie natuurlijk ook niet-homogeen-lineair zijn (denk bv. aan translatie), maar we zullen het daar hier niet over hebben.

Neem nu een puntenruimte X. We kunnen daarin een vectorveld $V : \vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ definiëren.

Als we nu zo'n lineaire transformatie op de coördinaten uitvoeren:

$$x'_\mu = A_{\mu\nu} x_\nu \tag{2.6}$$

veranderen niet alleen de coördinaten x_μ maar ook de componenten van de vectoren $\vec{v}(\vec{x})$:

$$v'_\mu(\vec{x}) = A_{\mu\nu} v_\nu(\vec{x}) \tag{2.7}$$

waarbij A dezelfde matrix is als in vgl. (2.6) (Lijkt triviaal; toch even nagaan! Let ook op dat we hier als transformatiematrix de matrix nemen die de transformatie van de vectorcomponenten beschrijft, terwijl we in de vorige paragraaf juist voor Λ de matrix namen die de transformatie van de basisvectoren aangaf. A is dus gelijk aan $(\Lambda^{-1})^T$).

Neem nu echter de functie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ en de gradiënt w_α in een punt P als volgt:

$$w_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \tag{2.8}$$

en in het nieuwe coördinatensysteem als:

$$w'_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x'_\alpha} \tag{2.9}$$

Er geldt (gebruik makend van de kettingregel):

$$\frac{\partial f}{\partial x'_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x'_1} \tag{2.10}$$

oftewel

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\mu} = \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\right)\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \tag{2.11}$$

$$w'_\mu = \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\right) w_\nu \tag{2.12}$$

Hier staat dus hoe een gradiënt transformeert. Hierbij kun je de partiële afgeleide $\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$ zien als de matrix $(A^{-1})^T$ waarbij A is zoals gedefinieerd in vgl. (2.6). Om dit te laten zien nemen we eerst de inverse van vgl. (2.6):

$$x_\mu = (A^{-1})_{\mu\nu} x'_\nu \tag{2.13}$$

en differentiëren dit

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} = \frac{\partial((A^{-1})_{\mu\nu} x'_\nu)}{\partial x'_\alpha} = (A^{-1})_{\mu\nu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\alpha} + \frac{\partial (A^{-1})_{\mu\nu}}{\partial x'_\alpha} x'_\nu \tag{2.14}$$

Omdat A niet van x'_α afhangt valt de laatste term aan de rechterkant weg. Bovendien geldt

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\alpha} = \delta_{\nu\alpha} \qquad \delta_{\nu\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{als } \nu = \alpha \\ 0 & \text{als } \nu \neq \alpha \end{cases} \tag{2.15}$$

en blijft er dus over:

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} = (A^{-1})_{\mu\nu}\delta_{\nu\alpha} = (A^{-1})_{\mu\alpha} \tag{2.16}$$

Met vgl.(2.12) geeft dit dus voor de transformatie van een gradiënt:

$$w'_\mu = (A^{-1})^T_{\mu\nu} w_\nu \tag{2.17}$$

De indices staan nu op de juiste plaats om dit in matrixvorm te schrijven:

$$w' = (A^{-1})^T w \tag{2.18}$$

(Ten overvloede melden we nogmaals dat de hier gebruikte A de matrix is die de coördinaten-transformatie van coördinaten x naar coördinaten x' beschrijft).

Hiermee hebben we laten zien wat het verschil is in de wijze van transformeren tussen de (pijl-)vector en de gradiënt. Pijl-vectoren noemen we vanaf nu *contravariante vectoren* (maar kortweg ook wel gewoon *vectoren*) en gradiënten *covariante vectoren* (pas op: in het algemeen is niet elk covariant vectorveld te maken uit de gradiënt van een scalarveld[1]). Deze laatste worden ook wel covectoren of éénvormen genoemd (Engels: one-form) en we zullen ze aangeven door er een tilde (˜) boven te zetten (dus: $\tilde{w}$). Om co- en contravariante vectoren verder te onderscheiden zullen we in formules de componenten van de contravectoren aanduiden met bovenindices en de componenten van covectoren met onderindices:

y^α	: contravariante vector
w_α	: covariante vector, ofwel covector

In de praktijk zal het nuttig blijken ook de matrix te voorzien van een dergelijke conventie. Zonder verdere beargumentering (komt later nog) delen we mee dat de matrix A geschreven wordt als:

$$A : A^\mu{}_\nu \tag{2.19}$$

De getransponeerde van zo'n matrix wordt:

$$A^T : A_\nu{}^\mu \tag{2.20}$$

Met deze afspraak worden dus de transformatieregels voor vectoren resp. covectoren:

$$v'^\mu = A^\mu{}_\nu v^\nu \tag{2.21}$$

$$w'_\mu = (A^{-1})^T{}_\mu{}^\nu w_\nu = (A^{-1})^\nu{}_\mu w_\nu \tag{2.22}$$

Ook de delta δ uit vgl. (2.15) krijgt een vorm als die van een matrix:

$$\delta_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \delta^\mu{}_\nu \tag{2.23}$$

We noemen dit de 'kronecker delta'. Hij zorgt ervoor dat een index een andere naam krijgt:

$$\delta^\mu{}_\nu y^\nu = y^\mu \tag{2.24}$$

[1] de rotatie van de gradient van een scalarfunctie is immers nul

Chapter 3

Inleiding tensoren

Tensorrekening is een techniek die als vervolg kan worden beschouwd op de lineaire algebra. In feite is het een veralgemenisering van de lineaire algebra zoals die op het gelijknamige college is behandeld. In de lineaire algebra heb je te maken met vectoren en matrices. Je zult zien dat tensoren eigenlijk niets anders zijn dan een uitbreiding van de begrippen matrices en vectoren.

In paragraaf 3.1 zul je aan de hand van een probleemstelling zien hoe een tensor op natuurlijke wijze naar voren komt. In paragraaf 3.2 zullen we de essentiële stap uit paragraaf 3.1 nog eens goed van alle kanten belichten voor een goed begrip ervan.

3.1 Het nieuwe inproduct en de eerste tensor

Het inproduct is zeer belangrijk in de fysica. Laten we een voorbeeld nemen: In de klassieke mechanica geldt dat de arbeid die wordt verricht bij verplaatsing van een voorwerp gelijk is aan het inproduct tussen de constante kracht en de verplaatsingsvector $\vec{x}$:

$$W = \langle \vec{F}, \vec{x} \rangle \tag{3.1}$$

De arbeid W moet natuurlijk onafhankelijk zijn van de het coördinatenstelsel waarin je $\vec{F}$ en $\vec{x}$ beschrijft. Het inproduct zoals we het kennen:

$$s = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^\mu b^\mu \quad \text{(oude definitie)} \tag{3.2}$$

heeft deze eigenschap in het algemeen echter niet:

$$s' = \langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle = A^\mu{}_\alpha a^\alpha A^\mu{}_\beta b^\beta = (A^T)^\mu{}_\alpha A^\mu{}_\beta a^\alpha b^\beta \tag{3.3}$$

met A de transformatiematrix. Alléén als A^{-1} gelijk is aan A^T (dus als we te maken hebben met *orthogonale* transformaties [1]) verandert s niet (de matrices vormen dan samen de kronecker delta $\delta_{\beta\alpha}$). Schijnbaar beschrijft dit inproduct de fysische situatie alleen maar correct in een voorkeurs-coördinatenstelsel: een stelsel dat volgens onze menselijke

[1] Zie eventueel syllabus Lin. Alg.

waarneming ‘rechthoekig’ is en ook nog een roosterbreedte heeft van 1 meter! Een orthogonale transformatie op zo’n stelsel levert weer zo’n ‘rechthoekig’ stelsel op. Aangezien je waarschijnlijk nooit hebt gerekend in een ander stelsel dan zo’n voorkeursstelsel heeft dit inproduct altijd gewerkt.

Het inproduct tussen een vector x en een covector y is echter *wel* invariant onder elke transformatie:

$$s = x^\mu y_\mu \tag{3.4}$$

Immers, voor alle A geldt:

$$s' = x'^\mu y'_\mu = A^\mu{}_\alpha x^\alpha (A^{-1})^\beta{}_\mu y_\beta = (A^{-1})^\beta{}_\mu A^\mu{}_\alpha x^\alpha y_\beta = \delta^\beta{}_\alpha x^\alpha y_\beta = s \tag{3.5}$$

Met behulp van dit inproduct kunnen we een nieuw inproduct tussen twee contravariante vectoren definiëren, dat deze eigenschap ook heeft. Daartoe voeren we een covector w_μ in en definiëren we het inproduct tussen x^μ en y^ν *ten opzichte van* deze covector w_μ als volgt:

$$s = w_\mu w_\nu x^\mu y^\nu \quad \text{(eerste poging)} \tag{3.6}$$

(**Waarschuwing:** straks zal blijken dat deze definitie van het inproduct niet werkzaam zal zijn, maar het brengt ons wel op het juiste spoor). Dit nieuwe inproduct is dus eigenlijk een soort ‘dubbel’ inproduct. De verkregen s transformeert nu (uiteraard) wel goed:

$$\begin{aligned} s' &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha w_\mu (A^{-1})^\nu{}_\beta w_\nu A^\alpha{}_\rho x^\rho A^\beta{}_\sigma y^\sigma \\ &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha A^\alpha{}_\rho (A^{-1})^\nu{}_\beta A^\beta{}_\sigma w_\mu w_\nu x^\rho y^\sigma \\ &= \delta^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma w_\mu w_\nu x^\rho y^\sigma \\ &= w_\mu w_\nu x^\mu y^\nu \\ &= s \end{aligned} \tag{3.7}$$

We hebben door het invoeren van een covector die moet dienen als referentie (meetliniaal), een werkend inproduct gemaakt. Echter, deze covector komt dubbel voor in de formule. Je kunt de termen ook rangschikken op de volgende wijze:

$$s = (w_\mu w_\nu) x^\mu y^\nu = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 & w_1 \cdot w_3 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 & w_2 \cdot w_3 \\ w_3 \cdot w_1 & w_3 \cdot w_2 & w_3 \cdot w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Hierbij voeg je de twee w’s samen tot één object: een soort product van w met zichzelf. Dit is een soort matrix, immers: het is een verzameling getallen gelabeld met de indices μ en ν. Noem dit object nu even g.

$$g = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 & w_1 \cdot w_3 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 & w_2 \cdot w_3 \\ w_3 \cdot w_1 & w_3 \cdot w_2 & w_3 \cdot w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

In plaats van het vastleggen van een covector w_μ ten opzichte waarvan je het inproduct definieert kun je ook gelijk het object g geven: dat is wat directer. Zo definieer je dus een inproduct *ten opzichte van* het object g:

$$\boxed{s = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu} \quad \text{nieuwe definitie} \tag{3.10}$$

Nu moeten we g nog zodanig invoeren dat dit moderne inproduct in geval van een orthonormaal ('recht') stelsel overeen komt met het oude inproduct. Dus, met vgl. (3.8), moet in een orthonormaal stelsel gelden:

$$\begin{aligned} s &= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \\ &= x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \qquad \text{in een orthonormaal stelsel!} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Daartoe moet g in zo'n orthonormaal ('recht') stelsel dus als het ware de eenheidsmatrix zijn:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in orthonormaal stelsel!} \tag{3.12}$$

Je kunt zien dat we deze getallenset niet kunnen maken volgens vgl. (3.9), zodat de definitie van het inproduct in vgl. (3.6) onhoudbaar is en we het inproduct wel *moeten* definiëren volgens vgl. (3.10)[2]. We beschouwen g dus niet meer als opgebouwd uit 2 maal een covector, maar als een getallenset op zich. De hier gevonden set g is een voorbeeld van een tensor.

Met deze laatste stap hebben we een complete omschrijving voor een nieuw inproduct dat zich wel netjes gedraagt bij basistransformatie en dat exact hetzelfde resultaat levert als het oude inproduct indien we in orthonormale stelsels werken. Kortom, om weer terug te komen op het oorspronkelijke probleem:

$$W = \langle \vec{F}, \vec{x} \rangle = g_{\mu\nu} F^\mu x^\nu \quad \text{algemene formule} \tag{3.13}$$

In deze paragraaf hebben we eigenlijk twee nieuwe dingen naar voren gebracht: het nieuwe inproduct en het nieuwe begrip 'tensor'. Beide zullen we nog verder behandelen: de tensoren in paragraaf 3.2 en hoofdstuk 4, het inproduct in hoofdstuk 5.

3.2 Het creëren van tensoren uit vectoren

In de vorige paragraaf hebben we een tensor gemaakt uit twee covectoren. Misschien is dit nogal snel gegaan. Deze paragraaf dient om dit combineren van vectoren opnieuw te benaderen, ditmaal via een iets andere invalshoek.

Laten we gaan kijken naar producten tussen vectoren en matrices, zoals we dat in de eerste twee hoofdstukken gedaan hebben. Je begint, in het geval van het product tussen een matrix en een vector, met een object met twee indices en dus n^2 componenten (de matrix) en een object met één index en dus n componenten (de vector). Samen hebben ze dus $n^2 + n$ componenten. Na de vermenigvuldiging hou je één object over (vector) met

[2] Dit is dus waarom er een waarschuwing stond toen we het inproduct definieerden ten opzichte van w_μ: een zinnig inproduct is namelijk niet te maken ten opzichte van een covector alléén; wel ten opzichte van het meer algemene object $g_{\mu\nu}$.

1 index en dus n componenten. Je hebt dus $(n^2+n)-n=n^2$ componenten *verloren*. Je hebt ze als het ware 'weggesommeerd'. Eenzelfde verhaal is op te hangen over het product tussen een covector en een contravariante vector. Je begint met $2n$ componenten en je eindigt met 1:

$$s = x^\mu y_\mu = x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 \tag{3.14}$$

Sommeren reduceert het aantal componenten dus. De kernindexnotatie maakt het ons echter mogelijk om hetzelfde te doen als hier boven, maar dan niet met twee keer dezelfde index (en dus sommeren), maar met twee verschillende indices (en dus *niet* sommeren). Het object wat je dan krijgt heeft *niet* minder componenten dan de twee vectoren waarmee je begon:

$$s^\mu{}_\nu := x^\mu y_\nu = \begin{pmatrix} x^1\cdot y_1 & x^1\cdot y_2 & x^1\cdot y_3 \\ x^2\cdot y_1 & x^2\cdot y_2 & x^2\cdot y_3 \\ x^3\cdot y_1 & x^3\cdot y_2 & x^3\cdot y_3 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

We hebben nu niet één getal gemaakt, maar een geordende set van getallen, gelabeld met twee indices μ en ν. Dus als we als voorbeeld nemen: $\vec{x}=(1,3,5)$ en $\tilde{y}=(4,7,6)$, dan is $s^2{}_3 = x^2\cdot y_3 = 3\cdot 6 = 18$ en $s^1{}_1 = x^1\cdot y_1 = 1\cdot 4 = 4$, etc.

Het zal je niet verbazen dat dit object de 'tensor' is waar deze syllabus eigenlijk voor geschreven is. Toch heeft dit ding nog verdacht veel weg van een matrix, immers een matrix is eigenlijk ook niets anders dan een set getallen gelabeld met twee indices! Of het nu ook echt een matrix is valt te zien aan de wijze van transformeren:

$$s'^\alpha{}_\beta = x'^\alpha y'_\beta = A^\alpha{}_\mu x^\mu (A^{-1})^\nu{}_\beta y_\nu = A^\alpha{}_\mu (A^{-1})^\nu{}_\beta (x^\mu y_\nu) = A^\alpha{}_\mu (A^{-1})^\nu{}_\beta s^\mu{}_\nu \tag{3.16}$$

Vergelijk dit met de transformatiewijze van een matrix (zie opgave 2) en het antwoord is duidelijk: de pas gemaakte tensor is niets anders dan een doodgewone matrix. Toch is dit geen dooddoener, want we zullen nu op exact analoge wijze tensoren maken die wel degelijk iets nieuws zijn.

Neem bijvoorbeeld:

$$t_{\mu\nu} = x_\mu y_\nu = \begin{pmatrix} x_1\cdot y_1 & x_1\cdot y_2 & x_1\cdot y_3 \\ x_2\cdot y_1 & x_2\cdot y_2 & x_2\cdot y_3 \\ x_3\cdot y_1 & x_3\cdot y_2 & x_3\cdot y_3 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Ook hier heb je te maken met een set getallen met twee indices, net als in het vorige voorbeeld. Het veschil met de vorige tensor is de wijze van transformeren:

$$\begin{aligned} t'_{\alpha\beta} = x'_\alpha y'_\beta &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha x_\mu (A^{-1})^\nu{}_\beta y_\nu \\ &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha (A^{-1})^\nu{}_\beta (x_\mu y_\nu) \\ &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha (A^{-1})^\nu{}_\beta t_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Het verschil met $s^\mu{}_\nu$ zit 'm dus in de eerste matrix in de transformatievergelijking. Bij s is die de transformatiematrix voor pijl-vectoren; bij t is die de transformatiematrix voor co-vectoren. De tensor die we hier hebben is duidelijk *geen* matrix. Dit keer hebben we *wel* iets geheel nieuws gemaakt. De g in de vorige paragraaf is van hetzelfde type als deze t: hij transformeert hetzelfde (ga na).

Behalve tensoren met 2 indices kun je ook tensoren maken met meerdere indices, bv. 3:

$$A_{\alpha\beta\gamma} = x_\alpha y_\beta z_\gamma \tag{3.19}$$

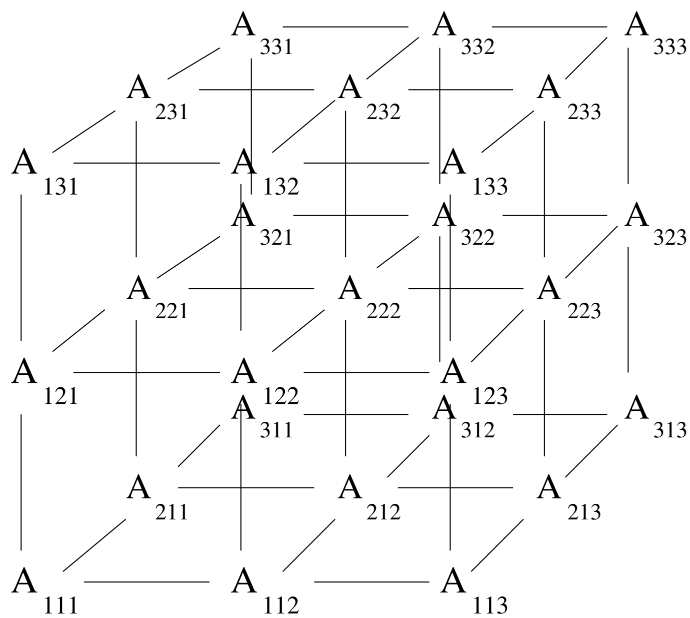

Figure 3.1: Een derde orde tensor...

Wat je nu hebt is een geordende set getallen gelabeld met *drie* indices! Je hebt een soort supermatrix gemaakt! Een matrix-achtig object met als het ware drie dimensies. Een soort kubus van getallen (zie figuur 3.2).

Je kunt zo nog veel meer verschillende tensoren maken. We hebben echter al eerder (in paragraaf 3.1) de opmerking gemaakt dat lang niet elke tensor kan worden gebouwd uit vectoren, omdat een m-de orde tensor in een n dimensionale ruimte n^m componenten heeft en m vectoren samen slechts $n \cdot m$ componenten hebben. Het is dus verstandig af te stappen van het idee van 'samenstellen van vectoren' en dit slechts te beschouwen als een eenvoudig voorbeeld.

Chapter 4

Tensoren, definities en eigenschappen

Nu we een duidelijk idee hebben van hoe tensoren worden gemaakt en waarom we tensoren nodig hebben, is het tijd om een iets formelere beschrijving te geven van tensoren en hun eigenschappen.

We beginnen met de kale definitie van een tensor in paragraaf 4.1. Paragraaf 4.2 en 4.3 leveren wat belangrijke wiskundige technieken betreffende de tensoren. Paragraaf 4.4 levert een andere, in de literatuur vaak gebruikte, notatiewijze van tensorrekening. Tot slot kijken we in paragraaf 4.5 op een wat andere manier naar tensoren.

4.1 De definitie van een tensor

Definitie van een tensor: Een (N, M)-tensor is een grootheid met $N + M$ indices, die toegevoegd wordt aan een punt in de ruimte en waarvan de componenten bij een coördinatentransformatie A als volgt transformeren:

$$\boxed{t'^{\alpha_1\ldots\alpha_N}{}_{\beta_1\ldots\beta_M} = A^{\alpha_1}{}_{\mu_1}\ldots A^{\alpha_N}{}_{\mu_N}(A^{-1})^{\nu_1}{}_{\beta_1}\ldots(A^{-1})^{\nu_M}{}_{\beta_M}t^{\mu_1\ldots\mu_N}{}_{\nu_1\ldots\nu_M}} \tag{4.1}$$

Hiermee worden tensoren van het type

$$t_\alpha{}^\beta{}_\gamma \tag{4.2}$$

natuurlijk niet uitgesloten, omdat we hier eigenlijk niet te maken hebben met een ander soort tensor. Je kunt namelijk met transponeren deze tensor in de standaardvorm van de definitie brengen: net zoals je dat met een matrix kon doen als in vgl.(2.20). Als je een tensor op de oude manier bekijkt (opgebouwd uit vectoren en covectoren) dan komt het er op neer dat je alle vectoren naar links verschuift en alle covectoren naar rechts.

Matrices (2 indices), vectoren en covectoren (1 index) en scalars (0 indices) zijn dus ook tensoren, waarbij de laatste dus transformeert als:

$$s' = s \tag{4.3}$$

Een (N, M)-tensor in een driedimensionale ruimte heeft dus $3^{(N+M)}$ componenten. Hij is contravariant in N componenten en covariant in M componenten.

4.2 Symmetrie en antisymmetrie

In de praktijk komt het vaak voor dat er een bepaalde mate van symmetrie zit in tensoren, net zoals we dat kennen van de matrices. Zo'n symmetrie heeft sterke invloed op de eigenschappen van de tensor. Heel vaak kunnen vele eigenschappen van tensoren of tensorvergelijkingen al worden afgeleid uit pure symmetrie-overwegingen.

Een tensor t heet *symmetrisch* in de indices μ en ν als geldt dat de componenten hetzelfde zijn bij verwisseling van de indices. Dus (voor een 2^e orde contravariante tensor):

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} \quad \text{symmetrische (2,0)-tensor} \tag{4.4}$$

Een tensor t heet *anti-symmetrisch* in de indices μ en ν als geldt dat de componenten van teken veranderen bij verwisseling van de indices. Dus:

$$t^{\mu\nu} = -t^{\nu\mu} \quad \text{anti-symmetrische (2,0)-tensor} \tag{4.5}$$

Het heeft geen zin om te spreken van symmetrie of anti-symmetrie bij indices die niet van hetzelfde soort (co- of contravariant) zijn. De eigenschappen symmetrie of anti-symmetrie blijven bij basistransformatie namelijk alleen behouden als de indices waarvoor de eigenschap geldt van hetzelfde soort zijn (ga dit na, maak opgaven 2 en 3).

4.3 Contractie van indices

Bij tensoren van een type met minstens 1 covariante en minstens 1 contravariante index kunnen we een soort 'inwendig in-product' maken. Bv., in het eenvoudigste geval:

$$t^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{4.6}$$

(Denk aan de sommatie!) Hier staat eigenlijk, omdat we als tensor een matrix hebben genomen, niets anders dan het nemen van het spoor. De definitie van tensoren laat zien dat deze sommatie over 2 indices van verschillende typen zorgt voor een getal dat onafhankelijk is van de basis (zie ook opgave 3). Uit de lineaire algebra kwam dit echter ook al tevoorschijn als de stelling dat het spoor van een matrix niet verandert door basistransformatie.

Ook bij een tensor van hogere orde kunnen we deze *contractie van indices* uitvoeren, maar daar blijft er na contractie nog steeds een object over met 1 of meerdere indices. Bv:

$$t^{\alpha\beta}{}_{\alpha} = v^{\beta} \tag{4.7}$$

Wat er gebeurt is dat we een tensor van type (N, M) omvormen tot een tensor van type $(N-1, M-1)$. Duidelijk is overigens dat er bij zo'n proces informatie verloren gaat, immers na contractie zijn er minder componenten over.

4.4 Tensoren als ruimtelijke objecten

Vectoren kun je zien als getallensetjes, maar ook als pijlen. Je kunt met deze pijlen rekenen als je de pijl ziet als een lineaire combinatie van ‘basispijlen’:

$$\vec{v} = \sum_\mu v^\mu \vec{e}_\mu \tag{4.8}$$

Iets dergelijks willen we ook doen met covectoren en uiteindelijk natuurlijk met alle tensoren. Voor de covectoren komt het neer op het maken van een set ‘eenheids-covectoren’ die dient als basis voor de covectoren. We noteren als volgt:

$$\tilde{w} = \sum_\mu w_\mu \tilde{e}^\mu \tag{4.9}$$

Let op! We geven de basisvectoren en basiscovectoren weliswaar met een index aan, maar hier bedoelen we natuurlijk niet de componenten van die objecten. Deze notatie, met de bijbehorende mogelijkheid tot verwarring, zagen we ook al in paragraaf 2.1. Dat we toch de notatie met een index gebruiken komt uiteraard omdat we dan de sommatieconventie kunnen hanteren. Merk op dat we hier een basis-covector noteren met een *boven*index en een basis-vector met een *onder*index.

De volgende stap is natuurlijk het uitdrukken van de basis van covectoren in de basis van vectoren (dat dat kan ligt nogal voor de hand, we hebben immers ook een algemene regel die bepaalt hoe een vector in een covector wordt omgezet). We merken daartoe op dat het inproduct tussen een vector en een covector altijd, onafhankelijk van de gekozen basis (want het inproduct is invariant onder een basistransformatie), voldoet aan:

$$\vec{v} \cdot \tilde{w} = v^\alpha w_\alpha \tag{4.10}$$

We vullen nu vgl. (4.8) en (4.9) aan de linkerkant in (en we laten de somtekens weer weg omdat we de sommatieconventie gebruiken).

$$\vec{v} \cdot \tilde{w} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \cdot w_\beta \tilde{e}^\beta \tag{4.11}$$

Als vgl. (4.10) en vgl. (4.11) consistent moeten zijn, volgt automatisch dat

$$\tilde{e}^\beta \cdot \vec{e}_\alpha = \delta^\beta{}_\alpha \tag{4.12}$$

Ook hier geldt weer de waarschuwing dat er NIET een product tussen 2 getallen (gelabeld met β en α) staat, maar het inproduct tussen de β^{e} basis-covector $\tilde{e}^\beta$ en de α^{e} basisvector $\vec{e}_\alpha$. Dit inproduct kunnen we niet uitschrijven in componenten (tenzij we nog een tweede basis voor vectoren en covectoren aanleggen, waarin we de oude basis kunnen uitdrukken) en heeft dan ook een meer geometrisch karakter. Zie voor een geometrische beschrijving van vectoren, covectoren en het inproduct appendix B.

De hier ingevoerde basis voor de covectoren heet de ‘duale basis’. Je kunt, door de basiscovectoren in kolommen te noteren zoals in paragraaf 2.1, laten zien dat de basiscovectoren bij een basisvectortransformatie transformeren als:

$$\tilde{e}'^\alpha = A^\alpha{}_\beta \tilde{e}^\beta \tag{4.13}$$

indien we A (die gelijk was aan $(\Lambda^{-1})^T$) zó kiezen dat

$$\vec{e}'_\alpha = ((A^{-1})^T)_\alpha{}^\beta \vec{e}_\beta \tag{4.14}$$

Ofwel: basis-covector-kolommen transformeren als vectoren i.t.t. basis-vector-kolommen die transformeren als covectoren.

Het beschrijven van vectoren en covectoren in een object-achtige manier is nu compleet. Analoog aan de situatie bij vectoren en covectoren kunnen we ook naar tensoren gaan kijken als ruimtelijke objecten (Ook hier hebben we het over de wiskundige aspecten; hoe je je een geometrische voorstelling van een tensor kan maken staat wederom in appendix B). We beschrijven dan de tensoren in termen van 'eenheidstensoren'. Deze 'eenheidstensoren' zijn in verband te brengen met de eenheidsvectoren door middel van een soort 'uitproduct' tussen de eenheidsvectoren (de term 'uitproduct' is op z'n zachtst gezegd misleidend):

$$t = t^{\mu\nu}{}_\rho \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu \otimes \tilde{e}^\rho \tag{4.15}$$

De operator $\otimes$ heet het 'tensor uitproduct'. Het is de ruimtelijke variant van het 'uitproduct' dat we in paragraaf 3.2 hebben gebruikt om tensoren te creëren. $\otimes$ is niet commutatief:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \neq \vec{b} \otimes \vec{a} \tag{4.16}$$

(ga na, uitgaande van vgl. (4.15)).

4.5 Tensoren als operatoren

Laten we nog eens het nieuwe inproduct bekijken (met v een vector en w een covector):

$$w_\alpha v^\alpha = s \tag{4.17}$$

Als we de kernindexnotatie weer even weglaten en het in de gebruikelijke symbolen opschrijven staat er:

$$\tilde{w}\vec{v} = s \tag{4.18}$$

Wat je ook zou kunnen schrijven is dit:

$$\tilde{w}(\vec{v}) = s \tag{4.19}$$

waarbij we met de haakjes bedoelen dat de covector $\tilde{w}$ *werkt* op de vector $\vec{v}$. We zien $\tilde{w}$ hier dus als een vaststaand iets, waar we steeds weer een andere vector $\vec{v}$ tegenaan plakken om er een inproduct mee te vormen. We zouden zo'n covector $\tilde{w}$ dus ook kunnen zien als een soort functie, werkend op een vector, met als resultaat een scalar. Dus, in de gebruikelijke notatie om de afbeelding van de ene naar de andere verzameling aan te duiden:

$$\tilde{w} : \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R} \tag{4.20}$$

Een covector wordt dan een 'lineaire functie van richting' genoemd: de uitkomst van de bewerking (de scalar, het inproduct) is lineair afhankelijk van de input (de vector), die niet gewoon een getal is maar een object met 'richting' (meerdimensionaal). We zouden het geheel natuurlijk ook andersom kunnen bekijken:

$$\vec{v}(\tilde{w}) = s \tag{4.21}$$

Hier zien we dus de vector als de functie en de covector als het argument. Om verwarring met de voorgaande situatie te vermijden schrijven we formule (4.20) iets anders:

$$\vec{v} : \mathsf{R}^{*3} \rightarrow \mathsf{R} \tag{4.22}$$

Een willekeurige tensor van het type (N, M) kunnen we ook zo bekijken. Deze tensor heeft als input een tensor van het type (M, N), of het product van meerdere tensoren van lagere orde, zodanig dat het aantal contravariante indices in de input gelijk is aan M en het aantal covariante indices gelijk is aan N. Na contractie over alle indices ontstaat dan een getal uit R. Voorbeeld (voor een $(2, 1)$-tensor):

$$t^{\alpha\beta}{}_{\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c^{\gamma} = s \tag{4.23}$$

De tensor t is op te vatten als een functie van 2 covectoren (a en b) en 1 vector (c), die deze objecten afbeeldt op de reële rechte. De functie is lineair afhankelijk van zijn input, zodat we kunnen spreken van een 'multilineaire functie van richting'. Deze ietwat complexe naamgeving voor een tensor wordt vooral in oudere literatuur veel gebruikt.

Bij dit alles moeten we er wel aan denken dat we tensoren niet uitsluitend gaan zien als operatoren. Je kunt ze uiteraard soms wel zo interpreteren, maar dat betekent niet dat ze op zichzelf niets te betekenen hebben. (Kijk bijvoorbeeld naar een vector: die kan je zien als een operator die uit een covector een scalar maakt (middels het inproduct), maar hij heeft op zich ook de voorstelling van een pijl in de ruimte). De oude definitie van een tensor, zoals in de vorige alinea, is wat dit punt betreft misleidend.

Chapter 5

De metrische tensor en het nieuwe inproduct

In dit hoofdstuk zullen we dieper ingaan op het nieuwe inproduct. Dit hoofdstuk neemt eigenlijk een zeer belangrijke rol in, omdat het nieuwe inproduct van essentieel belang is bij meetkunde op o.a. gekromde oppervlakken of, algemener, gekromde ruimtes. Ook als je een algemenere beschrijving wil geven van fysische zaken onafhankelijk van de keuze van een coördinatensysteem, is het nieuwe inproduct van wezenlijk belang.

In de paragraaf 5.1 zal een schets gegeven worden van de rol die de grootheid g in het inproduct heeft in de meetkunde. Paragraaf 5.2 behandelt de eigenschappen van deze metrische tensor g. Tenslotte beschrijft paragraaf 5.3 het 'op en neer halen van indices' met behulp van de metrische tensor.

5.1 g als meetlineaal

Als je een fysisch systeem wilt beschijven dan wil je dat graag doen met behulp van getallen, want getallen zijn exact en je kunt ze op papier schrijven. Om dat te kunnen doen moet je allereerst een coördinatensysteem aanleggen in de ruimte waarin je de metingen doet. Je kunt dit systeem natuurlijk willekeurig aanleggen, maar dat is niet handig. Je legt het natuurlijk zo aan dat je een orthonormaal coördinatensysteem hebt, want dan kun je voor afstandsmeting op een eenvoudige wijze de wet van Pythagoras toepassen.

Soms is het echter onhandig, of zelfs onmogelijk om zo'n orthonormaal stelsel aan te leggen. Je kunt dan het gewone inproduct niet meer gebruiken en je moet dan overstappen naar het nieuwe inproduct. Een sterk voorbeeld hiervan is de landkaart van de aarde. Als je op een Mercator-wereldkaart (waarbij alle lengtecirkels verticale en alle breedtecirkels horizontale lijnen zijn) naar Rusland kijkt, dan lijkt dit land veel groter dan het in werkelijkheid is. Sterker nog, de noordpool is uitgerekt tot een lijn. Je kunt voor het bepalen van afstanden dus niet Pythagoras toepassen. Wat je nu moet doen om toch overal op de wereldkaart een idee te krijgen wat de proporties ter plekke zijn, is: op verscheidene plekken de locale eenheidscirkel tekenen. Op de evenaar zal het een mooie cirkel worden, maar naarmate je verder naar het noorden gaat worden de cirkels steeds meer uitgerekt (in de richting van oost naar west): ze worden dus ellipsen. Op de noordpool zal de cirkel zijn uitgerekt tot een balk (een ellips met eindige breedte, maar oneindige lengte). Er is een sterk verband tussen zo'n eenheidscirkel en de meetlineaal g in het nieuwe inproduct, maar dat is verder uitgewerkt in appendix B.

Hoe bepaal je nu de afstand tussen twee punten? Je kunt immers, als je de afstand wilt meten tussen twee punten, A en B, met een verschillende g, dus geen objectieve g vinden. Er is ook inderdaad geen objectieve afstand te bepalen. Wel kun je exact de afstand bepalen langs een pad van A naar B. Wat je dan doet is dat je de weg van A naar B aflegt in kleine stapjes. Ieder stapje vindt ruwweg plaats in één punt, met dus ook maar één g. Je meet nu met die plaatstelijke g de lengte ds van die stap op als volgt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad \text{met} \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\vec{x}) \tag{5.1}$$

en je integreert al die stapjes tot je bij B bent. Wat je hier eigenlijk hebt gedaan is het doen van meetkunde in een dusdanig klein gebiedje dat je daar de kromming van de aarde (die het mij onmogelijk maakt om gewoon met één g te meten) kunt verwaarlozen. Binnen dit gebiedje verandert de g zo weinig dat het mogelijk is om hier gewoon met lineaire algebra te rekenen.

Laten we dit verduidelijken aan de hand van het inproduct in bolcoördinaten. Uit geometrische overwegingen weten we dat de lengte dl van een infinitesimaal vectortje op positie (r, θ, ϕ) in bolcoördinaten voldoet aan:

$$dl^2 = s = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{5.2}$$

We zouden dit ook kunnen schrijven als:

$$dl^2 = s = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{5.3}$$

Alle informatie over het lengtebegrip zit dus in de metrische tensor g. Het metrische tensorveld $g(\vec{x})$ heet ook wel de metriek van de ruimte.

5.2 Eigenschappen van de metrische tensor

De metrische tensor g heeft bepaalde belangrijke eigenschappen. Allereerst willen we erop wijzen dat de metrische tensor symmetrisch is. Dit is eenvoudig in te zien als men zich realiseert dat de metrische tensor g in de praktijk altijd een transformatie is van de 'eenheids g', immers, er is altijd een coördinatensysteem te vinden waarin de wet van Pythagoras wel geldt en dus de g de 'eenheids g' is. Aangezien de 'eenheids g' symmetrisch is en de eigenschap van symmetrie behouden blijft (zie evt. paragraaf 4.2) is de metrische tensor symmetrisch. Deze eigenschap van symmetrie is zeer plezierig in het gebruik: de volgorde van de indices van g doet er dan niet meer toe. Je mag ze zonder meer verwisselen.

Elke symmetrische tweede orde covariante tensor kan worden getransformeerd in een diagonaal vorm, waarbij de componenten in de diagonaal 1,0 of -1 zijn. In de praktijk zullen die componenten bij de metrische tensor allemaal 1 zijn, omdat we bij een metrische tensor *uitgaan* van deze 'eenheidsvorm'. Wiskundig gezien is dit echter niet altijd zo. Zo'n tensor die ook een aantal keren -1 in de diagonaal heeft[1] kan *nooit* (door coördinatentransformatie) getransformeerd worden in een tensor die alleen enen heeft (zie opgave 1). Wel kun je een transformatie verzinnen waardoor alle (-1)-en linksboven in de diagonaal komen en alle enen rechtsonder (of andersom). De som van de enen en (-1)-en in de diagonaal noemt men de signatuur. Hierdoor kun je dus alle symmetrische tweede orde covariante tensoren groeperen in groepen van verschillende signatuur. Dat er ook wel eens metrische tensoren mét (-1)-en in de diagonaal worden gebruikt in de fysica is te zien in de relativiteitstheorie. Hier gebruikt men in een vierdimensionale ruimte een metrische tensor met signatuur 2, dus met één (-1) en drie 1'en (zie ook appendix A).

Tot slot van deze paragraaf nog e.e.a. over het inproduct tussen twee co-vectoren. Net als bij de twee contravariante vectoren gebruik je hier een soort referentie-tensor, een soort metrische tensor, maar dan *contravariant*. We geven het dezelfde naam:

$$\boxed{s = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu} \tag{5.4}$$

Onderscheid tussen de twee metrische tensoren kan eenvoudig worden gemaakt door onder-, dan wel bovenindices. De eigenschappen die in deze paragraaf zijn behandeld voor $g_{\mu\nu}$ gelden natuurlijk ook voor $g^{\mu\nu}$. Er is natuurlijk is een-eenduidig verband tussen de $g^{\mu\nu}$ en de $g_{\mu\nu}$, hetgeen in de volgende paragraaf wordt behandeld.

5.3 Co ↔ contra

Voordat we kennis maakten met de co-vector hadden we alleen meetkunde gedaan in orthonormale stelsels. Dit was de reden dat we het onderscheid tussen een pijl-vector en een co-vector nooit hebben gezien. We werkten met bijvoorbeeld de gradiënt van een functie alsof het een vector was.

Een sterk voorbeeld hiervan is het electrische veld. Je kunt een E-veld zien als een gradiënt:

$$\tilde{E} = -\nabla V \quad \Leftrightarrow \quad E_\mu = -\frac{\partial V}{\partial x^\mu} \tag{5.5}$$

Anderzijds zien we het ook als een pijlvormige grootheid, gerelateerd aan de kracht:

$$\vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F} = \frac{1}{q}m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad E^\mu = \frac{1}{q}F^\mu = \frac{1}{q}ma^\mu \tag{5.6}$$

(de covariante en contravariante E geven we gemakshalve maar dezelfde naam. Onderscheid maakt men door de boven en onderindices, of door $\tilde{E}$ en $\vec{E}$)

[1]Het gedeelte met de nullen gooien we weg, want in de deelruimte waarvoor die componenten van de metrische tensor de afstanden bepalen zijn alle afstanden nul.

In een orthonormaal stelsel kun je zonder problemen E^μ verwarren met E_μ, maar ga je over op een niet orthonormaal stelsel, dan krijg je daarmee problemen. Dan moet je onderscheid maken tussen de covariante $\tilde{E}$ en de contravariante $\vec{E}$.

Als je een potentiaalveld V hebt, hoe krijg je hieruit nu de contravariante $\vec{E}$ en vice versa? De meest voor de hand liggende oplossing is: transformeer eerst naar een orthonormaal stelsel (hierin zijn de componenten van de pijl-vector en de co-vector hetzelfde) en na omzetting in een contravariante vector transformeer je terug. Dit is omslachtig. Er is een betere manier die overigens wel op dit idee is gestoeld: als je aan iedere pijl-vector een covector toevoegt met behulp van de metrische tensor g:

$$E_\mu := g_{\mu\nu} E^\nu \tag{5.7}$$

dan is in een orthonormaal stelsel E_μ gelijk aan E^μ, omdat de metrische tensor als het ware de 'eenheidsmatrix' is in een orthonormaal stelsel. Echter, nu blijft deze formule óók geldig na een transformatie naar elk ander stelsel:

$$\begin{aligned} (A^{-1})^\mu{}_\alpha E_\mu &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha (A^{-1})^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} A^\beta{}_\sigma E^\sigma \\ &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} E^\sigma \\ &= (A^{-1})^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} E^\nu \end{aligned} \tag{5.8}$$

(Hierbij is de sigma geïntroduceerd, omdat er anders vier ν's in voor zouden komen). Aan beide kanten vermenigvuldigen met $A^\alpha{}_\rho$ levert exact (de index ρ kun je natuurlijk vervangen door μ) vgl. (5.7).

Je kunt natuurlijk op extact analoge manier terug naar de contravariante $\vec{E}$:

$$E^\mu = g^{\mu\nu} E_\nu \tag{5.9}$$

Omdat deze contravariante $\vec{E}$ hetzelfde moet zijn als $\vec{E}$ waar we mee begonnen kunnen we een relatie tussen $g_{\mu\nu}$ en $g^{\mu\nu}$ afleiden:

$$E^\mu = g^{\mu\nu} E_\nu = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} E^\rho = \delta^\mu{}_\rho E^\rho = E^\mu \quad \Rightarrow \quad g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta^\alpha{}_\beta \tag{5.10}$$

Hiermee is dus het in de vorige paragraaf aangekondigde contravariante broertje van de metrische tensor vastgelegd.

We noemen een de omzetting van co- naar contravariant 'het naar boven halen van een index'. Je mag raden wat het omgekeerde is. De vector en de covector heten elkaars 'duaal toegevoegde'.

Chapter 6

Tensor calculus

Nu we vertrouwd zijn met het begrip tensor, is het van belang om te bestuderen hoe je er mee kan rekenen. Dit is nog lang niet zo triviaal. De kernindex maakt het mogelijk om alle bewerkingen die je wenst compact te noteren, maar helaas is het daarmee ook te gemakkelijk mogelijk om bewerkingen te noteren die ofwel zeer slechte eigenschappen hebben, ofwel gewoon geen betekenis hebben. We moeten dus gaan onderzoeken waar dergelijke problemen zich voordoen.

Waar we ons ook nog mee bezig gaan houden is de differentiaalrekening in tensorvelden. Ook hier zijn de notaties in kernindexnotatie vrij logisch, maar ook hier rijzen problemen. Het onderzoeken van deze problemen is echter een minder eenvoudige zaak dan in het vorige geval en valt buiten de doelstelling van deze syllabus.

Tot slot van dit hoofdstuk zullen we weer terug gaan naar vectoren en covectoren. We zullen de laatste hiaten in de kennis van de vectorcalculus in kernindexnotatie vullen. We hadden namelijk in de vorige hoofdstukken het vector uitproduct en de rotatie-operator nog niet in kernindexnotatie weten op te schrijven.

6.1 Covariantie van vergelijkingen

We hebben in hoofdstuk 3 gezien dat het oude inproduct geen goede definitie was. Er stond dat de arbeid gelijk was aan (het oude) inproduct tussen $\vec{F}$ en $\vec{x}$. De arbeid is invariant onder coördinatentransformatie, maar het oude inproduct was dat niet. Kortom: de vergelijking gold in voorkeursstelsels, maar in een ander stelsel gold de vergelijking niet. Na invoering van het nieuwe inproduct gold het wel. We noemen deze 'universele geldigheid' van de vergelijking 'covariantie', niet te verwarren met een covariante vector. Men bedoelt met covariant dat de vergelijking als het ware 'mee transformeert' zodat de vergelijking blijft gelden.

De volgende vergelijkingen zijn dus covariant:

$$x_\mu = y_\mu \tag{6.1}$$

$$x^\mu = y^\mu \tag{6.2}$$

want beide zijden transformeren op dezelfde manier. De volgende vergelijking is dus *niet* covariant:

$$x_\mu = y^\mu \tag{6.3}$$

omdat de linkerzijde transformeert als en covector (en dus met $(A^{-1})^T$) en de rechterzijde als een vector (en dus met A). Als de vergelijking dus *toevallig* geldt in één coördinatensysteem, dan zal hij niet gelden na (niet-orthogonale) transformatie. De componenten van een covector en een vector kunnen dus alleen toevallig gelijk zijn en niet fundamenteel gelijk. Aangezien je alleen geïnteresseerd bent in vectoren en covectoren als *ruimtelijke objecten* en niet zozeer in de componenten ervan in een arbitrair coördinatensysteem, kun je dus zeggen dat een covector en een vector niet aan elkaar gelijk kunnen zijn.

Het zelfde als hierboven kunnen we dus zeggen van de volgende vergelijking:

$$t_{\mu\nu} = s^\mu{}_\nu \tag{6.4}$$

Ook deze vergelijking is niet covariant. De tensoren zijn niet van dezelfde soort: ze transformeren anders.

Vaak echter is het niet nodig om alle vergelijkingen covariant te schrijven, omdat je vaak toch alleen in orthonormale stelsels werkt. Om in zo'n geval verwarring met de covariante vergelijking te voorkomen schrijven we dan alles met benedenindices (zo suggereer je geen covariantie).

6.2 Optellen van tensoren

Het optellen van twee tensoren kun je alleen doen als ze dezelfde orde hebben: je kunt geen vector optellen bij een matrix! Het optellen van twee tensoren van dezelfde orde gaat ook niet zomaar: als de tensoren niet van dezelfde soort zijn dan is het resultaat van de berekening *géén* tensor. Dus

$$v^\mu + w_\mu \tag{6.5}$$

is geen tensor. (Het dubbel voorkomen van een index in een *som* betekent overigens niet dat er gesommeerd wordt over die index. Zie hoofdstuk 1). Ook als je tensoren wilt optellen met ongelijke lopende indices kom je in de problemen bij transformatie:

$$v_\mu + w_\nu \tag{6.6}$$

Dit kun je zien als een object met twee indices (en dus n^2 componenten), maar het transformeert niet als een tensor (ga na...). Alleen als de tensoren van dezelfde soort zijn en dezelfde componenten hebben kunnen ze worden opgeteld:

$$x^{\mu\nu} + y^{\mu\nu} \tag{6.7}$$

Nu is dus de volgende vergelijking wel covariant:

$$z^{\mu\nu} = x^{\mu\nu} + y^{\mu\nu} \tag{6.8}$$

want links en rechts zijn tensoren van dezelfde orde en soort.

6.3 Tensorproducten

De belangrijkste eigenschap van het product tussen tensoren is:

> *Het resultaat van een product tussen tensoren is weer een tensor als bij elke sommatie is gesommeerd over één bovenindex en één onderindex.*

(Toon dit aan. Zie e.v.t. vgl. 3.5)
De volgende producten zijn dus geen tensoren, maar nogal nare objecten, die we dus vanaf nu 'verbieden':

$$x^{\mu}T^{\mu\nu} \tag{6.9}$$

$$h^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}t^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \tag{6.10}$$

Bij de eerste wordt over μ gesommeerd, maar μ staat twee keer boven (ga zelf na dat dit object niet transformeert als een contravariante vector). Bij het tweede product wordt correct gesommeerd over β en γ, maar 'foutief' over α, waardoor dit object geen scalar is (ga zelf na).

De volgende producten zijn *wel* tensoren:

$$x_{\mu}T^{\mu\nu} \tag{6.11}$$

$$h^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}t_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \tag{6.12}$$

De eerste is een contravariante vector en de tweede is een scalar (dus een tensor zonder indices).

Als we dus maar volgens de regels een product maken tussen tensoren, dan is het resultaat ook een tensor. Sterker nog: de resulterende tensor heeft dezelfde *boven*indices als de vrije bovenindices in het product en idem voor de onderindices. Bovenindices *blijven* dus bovenindices en onderindices blijven onderindices (Dit was intuïtief al duidelijk, als we tensoren opvatten als bestaande uit vectoren).

Duidelijk is nu ook het verband met het begrip covariantie: als je aan de linkerkant van de vergelijking een tensor zet, maar aan de rechterkant zo'n vervelend object dat gemaakt is door sommeren over gelijk geplaatste indices, dan heb je een niet-covariante vergelijking: de rechterkant transformeert niet als een tensor. Als je echter correct sommeert dan zal de vergelijking covariant zijn. Dus

$$t^{\mu\nu} = a^{\mu\rho}{}_{\sigma}b^{\nu\sigma}{}_{\rho} \tag{6.13}$$

is covariant, want de linker- en de rechterkant transformeren hetzelfde.

Ondanks het feit dat de stelling aan het begin van deze paragraaf aangeeft dat we uitsluitend tensoren krijgen als we over één boven- en één onderindex sommeren, kunnen we toch wel producten maken over twee gelijke indices. Dit gebeurde ook al, met twee contravariante vectoren, in paragraaf 2.2. We gebruikten daar toen de metrische tensor voor. Op dezelfde manier doe je dat voor een product tussen bijvoorbeeld $t^{\mu\nu}$ en v^{ν}:

$$w^{\mu} = g_{\alpha\beta}t^{\mu\alpha}v^{\beta} \tag{6.14}$$

De metrische tensor wordt hier dus als het ware gebruikt als een soort 'lijm' tussen twee indices waar je anders niet over kunt sommeren.

6.4 Eerste orde afgeleiden

We hebben het tot nu toe voornamelijk gehad over de eigenschappen van afzonderlijke tensoren. Als we differentiaalrekening willen doen met tensoren zullen we moeten overgaan op tensor*velden*; waarbij dus de tensoren afhangen van de plaats $\vec{x}$. We zullen in deze paragraaf laten zien hoe de bekende operator ∇ eruit ziet in kernindexnotatie en een aantal handige en veel gebruikte notatietrucs invoeren.

We beginnen met de gradiënt van een scalarveld zoals we die al kennen (zie hoofdstuk 2):

$$(\mathrm{grad} f)_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{6.15}$$

Op soortgelijke wijze zouden we de 'gradiënt' van een vectorveld kunnen maken:

$$(\mathrm{grad} \vec{v})^\mu{}_\nu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \tag{6.16}$$

Of van het metrische tensor-veld:

$$(\mathrm{grad} g)_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{6.17}$$

Deze laatste twee zijn grootheden met twee resp. drie indices, echter ze transformeren, bij niet-lineaire transformaties, niet als tensoren (en zijn daarom dus geen tensoren). Als we ons beperken tot lineaire transformaties kunnen we ze echter toch als tensoren beschouwen. Daarom zullen we toch met boven- en onderindices blijven werken.

Laten we nu eerst twee vaak gebruikte afkortingen invoeren:

$$v^\mu{}_{,\nu} := \partial_\nu v^\mu := \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \tag{6.18}$$

Voor de volledigheid voeren we dan ook maar meteen de volgende notatie in:

$$v^{\mu,\nu} := \partial^\nu v^\mu := g^{\nu\rho} \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} \tag{6.19}$$

We kunnen met de kernindexnotatie ook de divergentie van een vectorveld definiëren:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\rho} = \partial_\rho v^\rho = v^\rho{}_{,\rho} \tag{6.20}$$

Hier wordt gesommeerd over de index ρ. Je kunt het bovenstaande namelijk zien als een product tussen een operator en een vector waarbij, aangezien er twee identieke indices in het product zitten, er gesommeerd moet worden.

(In de literatuur wordt ∇, in verband met tensoren, meestal gebruikt voor een ander soort differentiaaloperator, maar terwille van de leesbaarheid v.d. vergelijkingen zullen we hier toch ∇ gebruiken).

We kunnen geheel analoog ook de divergentie definiëren van een tensor:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \tag{6.21}$$

We kunnen ook de rotatie van een vectorveld beschrijven met de kernindexnotatie. Dit echter wat minder triviaal dan het voorgaande. We behandelen dit in de volgende paragraaf.

6.5 Rotatie, uitproduct en het permutatiesymbool

Een, vooral in de Electrodynamica veel voorkomende, getallenset, is het permutatiesymbool ϵ. Het is een set getallen met drie indices, als we in een drie dimensionale ruimte werken. Het heeft n indices in n dimensies.

ϵ transformeert niet als een tensor en is daarom geen tensor. We zullen daarom in deze paragraaf gaan werken in een orthonormaal stelsel (we laten de covariantie even varen) en alle indices als onderindices noteren. Bij de meeste toepassingen die het permutatiesymbool gebruiken maken we ons sowieso niet druk om het verschil tussen co- en contravariant.

De ϵ is volledig anti-symmetrisch:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} \tag{6.22}$$

(We werken hier in 3 dimensies). Als twee van de drie indices dezelfde waarde hebben, geeft bovenstaande vergelijking dat het door die indices aangeduide element gelijk is aan zijn tegengestelde; nul dus. De enige elementen van ϵ die ongelijk zijn aan nul zijn dus de elementen met i, j en k ongelijk. Per definitie neemt men meestal

$$\epsilon_{123} = 1 \tag{6.23}$$

Uit vgl. (6.22) volgt nu dat als we de waarden van de indices cyclisch permuteren over de indices, de waarde van het tensorelement wederom 1 is. Verwisseling levert -1 op. Samengevat:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als } ijk \text{ een even permutatie van 123 is} \\ -1 & \text{als } ijk \text{ een oneven permutatie van 123 is} \\ 0 & \text{als 2 indices gelijk zijn} \end{cases} \tag{6.24}$$

De contractie tussen twee epsilons levert een leuke identiteit op:

$$\epsilon_{\alpha\mu\nu}\epsilon_{\alpha\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \tag{6.25}$$

Hieruit volgt:

$$\epsilon_{\alpha\beta\nu}\epsilon_{\alpha\beta\sigma} = 2\delta_{\nu\sigma} \tag{6.26}$$

en

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6 \tag{6.27}$$

Met dit symbool kunnen we het uitproduct tussen 2 vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ heel simpel noteren:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \rightarrow \quad c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{6.28}$$

Voor de eerste component van c geldt dus:

$$c_1 = \epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - b_2 a_3 \tag{6.29}$$

hetgeen inderdaad de eerste component van het uitproduct tussen de vectoren a en b is.

Deze notatie levert voordelen op zodra we bv. de divergentie van de rotatie moeten uitrekenen:

$$c = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \nabla_i (\epsilon_{ijk} \nabla_j a_k) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j a_k \tag{6.30}$$

omdat

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{en dus} \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} := \partial_i \tag{6.31}$$

Aan de rechterkant van vgl. (6.30) staat nu de volledige contractie tussen een set die symmetrisch is in de indices i en j ($\partial_i \partial_j$) en een set die antisymmetrisch is in de indices i en j (ϵ_{ijk}). Uit opgave 4 in paragraaf C.4 weten we dat zo'n volledige contractie altijd nul oplevert, zodat we hier heel snel hebben aangetoond dat de divergentie van een rotatie nul is.

Er is nog een ander soort rotatie te definiëren: de *gegeneraliseerde rotatie* van een covector:

$$(\mathrm{rot}\tilde{w})_{\alpha\beta} = \partial_\alpha w_\beta - \partial_\beta w_\alpha \tag{6.32}$$

Dit transformeert als een tensor en is dus ook een tweede orde covariante tensor (ga dit na). Tevens is het anti-symmetrisch.

Appendix A

Tensoren in de speciale relativiteitstheorie

Alhoewel tensoren voornamelijk hun nut bewijzen in de algemene relativiteitstheorie maken ze het leven ook in de speciale theorie soms eens stuk makkelijker. Bovendien leggen de formules mèt tensoren veel beter de structuur van de theorie bloot dan de formules zònder. We zullen de draad oppikken op de plaats waar vier-vectoren in de speciale relativiteitstheorie worden ingevoerd.

In de eenvoudige gedachtenexperimenten met rijdende treintjes, bedoeld om de lorentztransformaties inzichtelijk te maken, werd duidelijk dat de 3-dimensionale ruimte en de 1-dimensionale tijd niet gescheiden zijn maar als één geheel gezien moeten worden (het overbekende citaat van Minkowski zullen we niet herhalen). In matrixvorm vonden we voor de zuivere lorentztransformatie:

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

(met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ en $\beta = \frac{v}{c}$). Tevens vonden we voor het inproduct de merkwaardige formule

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \tag{A.2}$$

Met de kennis die we nu hebben over het begrip 'metrische tensor' is deze formule beter te begrijpen. We weten namelijk dat het inproduct van twee vectoren eigenlijk helemaal niet bestaat (althans, niet in een vorm die onafhankelijk is van het referentiesysteem), maar dat we het moeten hebben over het inproduct van een vector met een covector. De één ontstaat uit de ander door het op- of neerhalen van een index m.b.v. de metrische tensor:

$$a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta \tag{A.3}$$

Vgl. (A.2) zou er eigenlijk uit moeten zien als:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_g = a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \tag{A.4}$$

waarbij $\tilde{b}$ dus een covector is. Uit het feit dat het 'inproduct' zoals in vgl. (A.2) invariant is onder de lorentztransformatie volgen nu de componenten van de metrische tensor:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

De Minkowskiruimte, de ruimte waarin de regels van de speciale relativiteitstheorie gelden, is dus een ruimte die een andere metriek heeft dan de normale euclidische ruimte. Om ermee te kunnen rekenen voeren we niet een vreemd inproduct in, maar passen we gewoon de kennis over inproducten toe, die ons automatisch naar een gewijzigde metrische tensor leidt.

Tot slot nog een kleine opmerking. We hebben gezien in hoofdstuk 5 dat je met de metriek ook gekromde ruimtes kunt beschrijven. Welnu, met deze Minkowski metriek kun je ook gekromde *ruimte-tijd* beschrijven. Dit concept vormt de basis van de algemene relativiteits theorie. In die theorie wordt zwaartekracht verklaard als het gevolg van een kromming van de ruimte-tijd. Een goede inleiding tot die theorie wordt gegeven in [5].

Appendix B

Meetkundige voorstelling van tensoren

De tensoren zoals die in de hoofdtekst zijn geïntroduceerd komen waarschijnlijk nogal abstract over. Er zijn echter heel beeldende voorstellingen van tensoren te maken: een soort geometrische (3D) objecten. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is de pijl-vector. Een pijl-vector is in wezen slechts een setje getallen dat op een bepaalde wijze transformeert bij een basistransformatie. Echter, het is zeer plezierig om te denken in termen van een pijl, omdat de zaak er een stuk beeldender op wordt.

Ook van een covector kunnen we zo'n soort (3 dimensionaal) geometrische object maken, evenals voor alle andere tensoren. Deze appendix somt al deze voorstellingen op. Gaandeweg worden ook enkele basisbewerkingen die kunnen worden uitgevoerd op deze tensoren (zoals optellen en inproducten) vertaald in een geometrische bewerking. Deze appendix heeft alleen tot doel een en ander te verduidelijken en vormt geen essentieel onderdeel van de syllabus.

- **pijl-vector**

  De pijl-vector wordt voorgesteld door (hoe kan het anders) een pijl in de n-dimensionale ruimte. De componenten van de vector (dus de getallen v^μ) vindt men uit het object terug door de projecties van de pijl op de assen te bepalen. Zie fig. B.1.

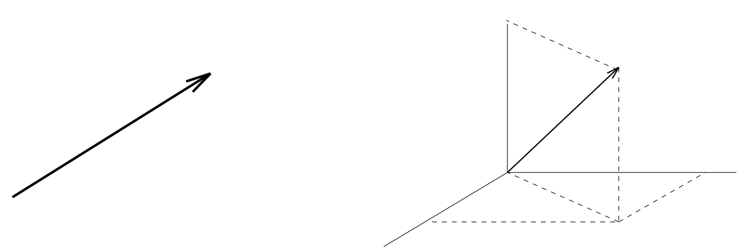

Figure B.1: Geometrische voorstelling v.e. vector; bepaling v.d. componenten

- **co-vector**

  De co-vector is nauw verbonden met de gradiënt van een functie $f(\vec{x})$, dus ligt het voor de hand om in deze hoek te gaan zoeken naar een toepasselijke voorstelling. Hierbij valt te denken aan hoogtelijnen (in twee dimensies) of hoogtevlakken (in drie dimensies). Bekijk eens twee opeenvolgende hoogtelijnen: de afsnede die ze maken aan een naburige (x^2 = constant)-lijn is gelijk aan de toename van x^1 die nodig is om $f(\vec{x})$ met 1 te vergroten, indien men de overige coördinaten constant houdt. Dus in twee dimensies:

$$\text{afsnede aan } x^1\text{-as} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial f}\right)_{x^2\text{constant}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^{-1}_{x^2\text{constant}} \tag{B.1}$$

  Als men dus het omgekeerde van deze afsnede neemt heeft men de 1^e component van de gradiënt terug!

  Het ligt dus voor de hand om als algemene voorstelling van een covector twee opeenvolgende lijnen (of in drie dimensies vlakjes) te nemen, waarvan de afsneden het omgekeerde zijn van de componenten van de covector. Wel moet men de volgorde van de vlakjes in acht houden.

  In de voorstelling is een soort flexibele pijl getekent: dit is geen pijlvector, maar dient alleen om de volgorde van de vlakjes te illustreren. Je zou de twee vlakjes in plaats daarvan ook de nummers 1 en 2 kunnen geven, of twee verschillende kleuren. Zie fig. B.2.

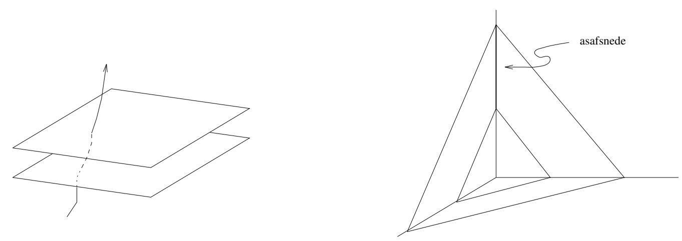

Figure B.2: Geometrische voorstelling v.e. covector; bepaling v.d. componenten

- **antisymmetrische contravariante tweede orde tensor $t^{\mu\nu}$**

  Je kunt een antisymmetrische contravariante tweede orde tensor maken uit twee vectoren als volgt:

$$t^{\mu\nu} = v^\mu w^\nu - w^\mu v^\nu \tag{B.2}$$

  Dit is een alternatief soort uitproduct. De volgorde van de vectoren is van belang. Je kunt dit object zien als een vlakje met een welbepaalde oppervlakte en oriëntatie. De componenten van de tensor zijn weer terug te vinden door de projecties van het oppervlakje op de verscheidene coördinaatvlakken op te meten. Hierbij moet men bedenken dat als de oriëntatie van de projectie tegen de klok in is, deze component negatief is. Een voorbeeld: als de oppervlakte van de projectie op het x^1, x^2-vlak gelijk is aan 2, dan is t^{12} gelijk aan 2 en t^{21} gelijk aan -2. Zie fig. B.3 en B.4.

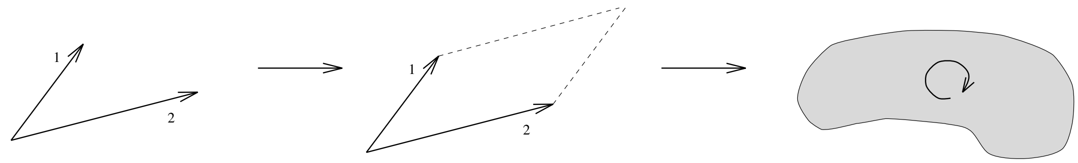

Figure B.3: Geometrische voorstelling v.e. antisymmetrische contravariante 2^e orde tensor

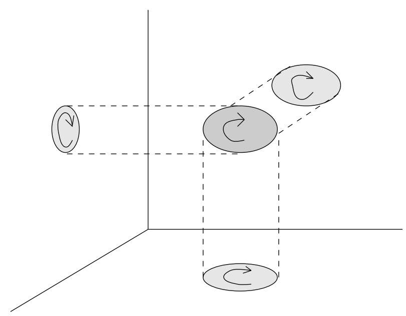

Figure B.4: Bepaling v.d. componenten v.e. antisymmetrische contravariante 2^e orde tensor

- **antisymmetrische covariante tweede orde tensor** $t_{\mu\nu}$

  Ook dit kan gezien worden als een uitproduct tussen twee vectoren, ditmaal co-vectoren:

$$t_{\mu\nu} = v_\mu w_\nu - w_\mu v_\nu \tag{B.3}$$

  Men kan dit zien als een soort buis met oriëntatie. De componenten kan men terug vinden door de afsneden die de buis maakt met alle coördinaatvlakken te bepalen en om te keren. Ook hier dient men er op te letten wat de oriëntatie is van de afsneden. Zie fig. B.5.

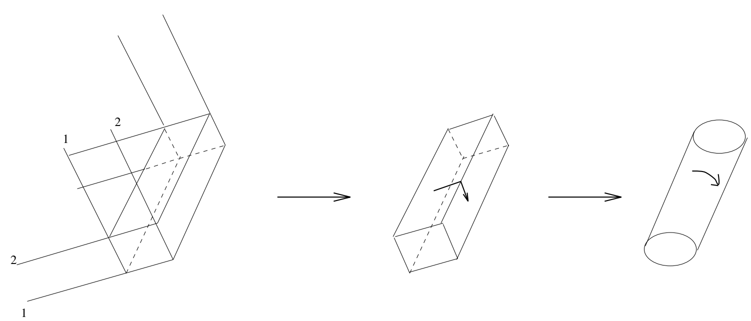

Figure B.5: Voorstelling v.e. antisymmetrische covariante 2^e orde tensor

- **optellen vectoren**

  Het optellen van vectoren is al bekend. Je transleert de ene pijl langs de ander tot aan de top. Deze getransleerde pijl wijst nu naar de top van de som-pijl. Zie fig. B.6.

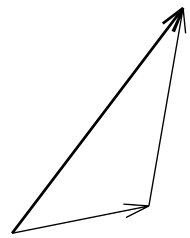

Figure B.6: Geometrische voorstelling v.h. optellen van vectoren

- **optellen covectoren**

  Het optellen van covectoren is iets complexer. Het is het beste als dit alleen geïllustreerd wordt. Woorden maken de zaak alleen ingewikkelder. Zie fig. B.7 voor een 2D voorstelling.

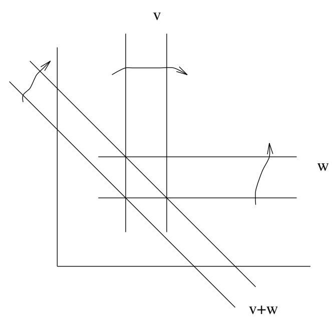

Figure B.7: Geometrische voorstelling v.h. optellen van covectoren

- **inproduct tussen een vector en een covector**

  Het inproduct tussen een vector en een covector is de verhouding tussen de lengte van de afsnede die de covector maakt aan de vector en de lengte van de pijl. Zie fig. B.8 voor een 3D voorstelling.

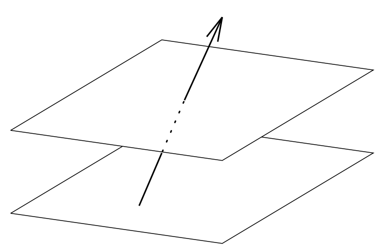

Figure B.8: Voorstelling v.h. inproduct tussen een vector en een covector

- **tweede orde symmetrische co-variante tensor $g_{\mu\nu}$.**

  De metrische tensor behoort tot dit type. Het ligt dan ook voor de hand dat we voor een voorstelling gaan zoeken in de richting van het inproduct. Je zou kunnen denken aan de verzameling punten die afstand 1 hebben tot een punt $\vec{x}_0$:

$$\{\vec{x} \in \mathsf{R}^3 \quad | \quad g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 1\} \tag{B.4}$$

Gaan we uit van een $g = g(\vec{x})$, dus van een metriek die plaatsafhankelijk is, dan is het handig om voor het punt $\vec{x}_0$ het punt te nemen waarin de betreffende $g_{\mu\nu}$ zit.

Nu is ook duidelijk wat het verband is tussen de ellipsen uit hoofdstuk 5. Zie fig. B.9 voor een 3D voorstelling: een ellipsoïde.

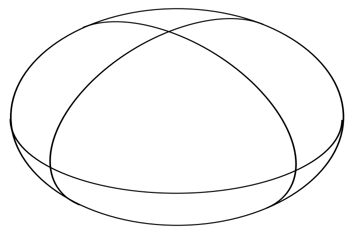

Figure B.9: Geometrische voorstelling v.e. tweede orde symmetrische covariante tensor

Van de tweede orde symmetrische contravariante tensor is moeilijker een voorstelling te maken, dus deze laten we achterwege.

- **covariant maken van een pijl-vector**

  Het omzetten van een vector in een covector kan ook beter worden gezien met behulp van een illustratie. De twee grote lijnen zijn raaklijnen en de onderste lijn van de covector gaat door het middelpunt van de cirkel. Zie fig. B.10 voor een 2D voorstelling. Het gaat met deze methode mis indien de pijlvector kleiner is dan de straal v.d. cirkel.

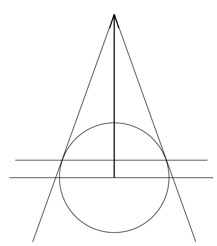

Figure B.10: Geometrische voorstelling v.h. covariant maken v.e. pijl-vector

Appendix C

Opgaven

C.1 Kernindexnotatie

1. A, B en C zijn matrices. Er geldt:

$$A = BC$$

   Schrijf deze matrixvermenigvuldiging op in indexnotatie.

2. A en B zijn matrices en x is een plaatsvector. Toon aan dat:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu}(\sum_{\alpha=1}^{n} B_{\nu\alpha}x_{\alpha}) &= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(A_{\mu\nu}B_{\nu\alpha}x_{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(A_{\mu\nu}B_{\nu\alpha}x_{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}(\sum_{\nu=1}^{n}(A_{\mu\nu}B_{\nu\alpha})x_{\alpha})
\end{aligned}$$

3. Welke van de volgende beweringen zijn juist en welke niet?

   (a) De somtekens in een formule kunnen zonder meer allemaal naar links geschoven worden, zonder de betekenis van de formule aan te tasten.

   (b) Als alle somtekens links staan mag je ze van volgorde verwisselen zonder de betekenis van de formule aan te tasten.

   (c) Indien alle somtekens links staan mag je niet zomaar de variabelen rechts van de somtekens verwisselen, omdat je hiermee de volgorde van matrixvermenigvuldiging verandert en er geldt in het algemeen:

$$AB \neq BA$$

   (d) $A_{\mu\nu} = (A^T)_{\nu\mu}$

   (e) $A_{\mu\nu} = (A^T)_{\mu\nu}$

4. A, B, C, D en E zijn matrices. Schrijf de volgende matrixvermenigvuldigingen in indexnotatie (met de somtekens allemaal bij elkaar aan 1 kant!).

   (a)
   $$A = B(C + D)$$

   (b)
   $$A = BCD$$

   (c)
   $$A = BCDE$$

5. Stel, je hebt de vectoren $\vec{x}, \vec{y}$ en $\vec{z}$ met de volgende onderlinge relaties:
   $$\vec{y} = B\vec{x}$$
   $$\vec{z} = A\vec{y}$$
   Schrijf ze beide in indexnotatie. Geef nu de relatie tussen $\vec{z}$ en $\vec{x}$ in indexnotatie.

6. Schrijf in matrixvorm:
   $$D_{\beta\nu} = \sum_{\mu 1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\mu\nu} B_{\alpha\mu} C_{\alpha\beta}$$

7. Probeer een aantal van de vorige opgaven met de sommatieconventie uit te voeren.

8. Schrijf als matrixvermenigvuldiging:

   (a)
   $$D_{\alpha\beta} = A_{\alpha\mu} B_{\mu\nu} C_{\beta\nu}$$

   (b)
   $$D_{\alpha\beta} = A_{\alpha\mu} B_{\beta\gamma} C_{\mu\gamma}$$

   (c)
   $$D_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma}(B_{\gamma\beta} + C_{\gamma\beta})$$

9. Gegeven: een vectorveld in een n-dimensionale ruimte:
   $$\vec{v}(\vec{x})$$
   Er vindt een coördinatentransformatie plaats:
   $$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad A \quad \text{is transformatiematrix}$$
   Toon aan dat geldt:
   $$\vec{v}' = A\vec{v}$$
   waarbij de matrix A dezelfde matrix is als in de eerste vergelijking.

10. Bij transformatie geldt:
   $$\vec{x}' = A\vec{x}$$
   Dit komt overeen met
   $$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} x_\nu$$

Maar wat is nu

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu A_{\mu\nu} =?$$

En hoe maak je een matrixvermenigvuldiging

$$\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu A_{\mu\nu} =?$$

(let op de plaats van de indices)

C.2 Covectoren

1. De matrix voor een rotatie in het $x - y$ vlak over een hoek ϕ wordt gegeven door:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Bereken de inverse van deze matrix (door vervangen van ϕ door $-\phi$ of door matrix-inversie) en laat zien dat $(\Lambda^{-1})^T$ gelijk is aan Λ.

2. Voor cartesische coördinatenstelsels geldt dat basisvectoren loodrecht op elkaar staan:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

(Dit is een misleidende notatie. Je zou dit kunnen interpreteren als het inproduct van de twee basisvectoren, waarbij de componenten van die basisvectoren zijn uitgedrukt in de basis die door die vectoren zelf gevormd wordt. Uiteraard zou dat *altijd* nul opleveren).

Transformeren we van het ene naar het andere cartesische stelsel:

$$\vec{e}_1{}' = \Lambda\vec{e}_1 \quad \& \quad \vec{e}_2{}' = \Lambda\vec{e}_2$$

(met Λ de transformatiematrix) dan moet deze relatie uiteraard ook opgaan:

$$\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0$$

Werk dit uit en toon daarmee aan dat voor transformaties tussen twee cartesische stelsels de transformatiematrix Λ gelijk is aan $(\Lambda^{-1})^T$ en we dus te maken hebben met orthogonale transformaties.

C.3 Inleiding tensoren

1. Je kunt met behulp van rekenkundige bewerkingen van enkele tensoren een nieuwe maken. Construeer bijvoorbeeld:

$$w_\mu = t_{\mu\nu} v^\nu$$

$t_{\mu\nu}$ en v^ν. Dit zijn tensoren.

(a) Laat zien dat dan w_μ ook een tensor is (dus bekijk deze formule na basistransformatie en zie hoe w_μ transformeert).

(b) Laat zien dat w^μ hier géén tensor is, als we w^μ maken volgens:

$$w^\mu = t^{\mu\nu} v^\nu$$

2. Een matrix kun je zien als iets dat een vector transformeert in een andere. We hebben in de theorie gezien dat dit een gewone transformatie of een basistransformatie kan zijn. De vraag is nu: transformeert een gewone transformatiematrix bij verandering van basis ook? En hoe dan? (Schrijf dit op in gewone matrixnotatie, met S de transformatiematrix van het gewone naar het geaccentueerde stelsel (let op dat we hier een iets andere conventie hanteren dan in de syllabus 'Wiskunde L1') en A de te transformeren matrix). Aanwijzing:

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

nu heb je na basis(of coördinaten-)transformatie

$$A\vec{y} = S(A\vec{x})$$

maar er is ook een matrix B' waarvoor geldt:

$$S\vec{y} = A'(S\vec{x})$$

3. Laat zien dat, als je uit enkele tensoren een nieuw ding maakt en de sommatieconventie toepast (dus, alleen sommeren over één bovenindex en één onderindex, nooit over 2 gelijk geplaatste indices), het verkregen object weer een tensor is.

C.4 Tensoren, algemeen

1. Je hebt gezien dat er vier soorten 2^e orde tensoren zijn. Hoeveel kun je er verzinnen van de 3^e orde?

2. Men neme een antisymmetrische tensor $t^{\mu\nu}$. Toon aan dat bij basistransformatie de eigenschap van antisymmetrie behouden blijft. Doe hetzelfde met een symmetrische tensor. (N.B. symmetrie en anti-symmetrie zijn dus fundamentele eigenschappen van tensoren).

3. Laat zien, door de transformatie van een $(1,1)$-tensor op te schrijven, dat het geen zin heeft om te spreken van symmetrie of anti-symmetrie van een tensor in indices die niet van hetzelfde soort zijn. (Laat dus zien dat die eigenschap na transformatie meestal verloren is).

4. Gegeven een tweede orde contravariante symmetrische tensor t en een tweede orde covariante antisymmetrische tensor r. Toon aan dat de dubbele contractie

$$t^{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}$$

altijd gelijk is aan nul.

5. De vogende tensor is gedefinieerd uit twee vectoren:

$$t^{\mu\nu} = v^\mu w^\nu - w^\nu v^\mu$$

Laat zien dat deze antisymmetrisch is.

6. Hoe transformeert een kronecker-delta? De kronecker-delta is symmetrisch; waarom blijft de eigenschap van symmetrie hier wel behouden, terwijl toch is bewezen dat de symmetrie in een boven en onderindex niet behouden blijft?

7. We hebben in opgave 2 in paragraaf C.3 gezien hoe een matrix A transformeert. Laat aan de hand daarvan zien hoe de matrix A^T transformeert. Toon aan de hand van de twee gevonden vergelijkingen aan dat het object g uit de tekst niet transformeert als een matrix, maar ook niet als de getransponeerde van een matrix.

8. Neem twee tensoren: $s^{\mu\nu}$ en $t_{\mu\nu}$. Maak een product van die twee dat

   (a) geen vrije indices heeft.

   (b) twee vrije indices heeft.

   (c) vier vrije indices heeft.

9. Hoe transformeert een 3^e orde geheel covariante tensor? Kan dit in matrixvorm geschreven worden?

10. Je kunt een niet-lineaire coördinatentransformatie geven door de nieuwe coördinaten uit te drukken als een functie van de oude coördinaten:

$$\begin{aligned} x'^1 &= f'^1(x^1, x^2 \dots, x^n) \\ &\vdots \\ x'^n &= f'^n(x^1, x^2 \dots, x^n) \end{aligned}$$

Deze functies zijn nu naar hun n coördinaten te Taylor-ontwikkelen om het punt $\vec{0}$. Maak zo'n Taylor-ontwikkeling.

Aanwijzing:

Bij het afleiden van de Taylorreeks van een gewone functie ging men uit van een eenvoudige machtreeks:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$$

Door deze vergelijking steeds te differentiëren kon men de coëfficienten $a_{0\dots n}$ bepalen. Doe iets dergelijks ook in dit geval.

C.5 Metrische tensor

1. Laat zien dat het onmogelijk is om een metrische tensor die zowel 1'en als -1'en op de hoofddiagonaal heeft, te transformeren naar een vorm waarin er nog uitsluitend 1'en aanwezig zijn.

2. Het nieuwe inproduct, met de metrische tensor, is invariant onder coördinatentransformaties:

$$g'_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$$

Bij de behandeling van de Speciale Relativiteitstheorie komen we echter ook vaak de volgende vergelijking tegen:

$$g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$$

(dus zonder accent bij g) Leg uit waarom we deze vergelijking mogen gebruiken in alle gevallen dat g de Minkowskimetriek is en we uitsluitend in lorentzframes werken.

C.6 Tensor calculus

1. Bewijs dat de volgende vergelijkingen covariant zijn:

$$z^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha}$$

$$z^{\alpha\beta} = x^{\alpha\beta} + y^{\beta\alpha}$$

2. Stel, je hebt 2 berekeningen uitgevoerd:

$$x^{\alpha} = \ldots$$

en

$$y^{\beta} = \ldots$$

Hoe kan je nu, terwijl de indices van x en y verschillend zijn, toch deze twee vectoren optellen?

3. Waarom is het bij

$$(\mathrm{grad}\vec{v})^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial v^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

niet nodig om de indices (aan de linkerkant van de vergelijking) op volgorde te zetten?

Bibliography

[1] Bäuerle G. G. A. (1981) *Syllabus* '*Algemene Relativiteitstheorie I*' (UvA)

[2] Dullemond C. (1986) *Syllabus* '*Algemene Relativiteitstheorie*' (KUN)

[3] Kay D. C. (1988) '*Tensor Calculus (Schaum's outline series)*' (McGraw-Hill)

[4] Schouten J. A. (1951) '*Tensor Analysis for Physicists*' (Oxford)

[5] Schutz B. F. (1985) '*A first course in general relativity*' (Cambridge)

[6] Takens R. J. (1985) *Syllabus* '*Hemelmechanica*' (UvA)